کنترل مدرن

رویت پذیری و کنترل پذیری

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

رویت پذیری و کنترل پذیری

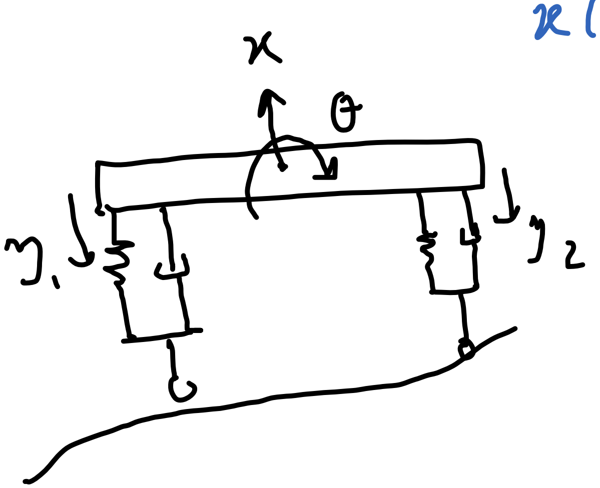
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

رویت پذیری ← ارتباط بین متغیرهای حالت و خروجی.

$y(t)$, $x(t)$

کنترل پذیری ← ارتباط بین ورودی و متغیرهای حالت.

$x(t)$, $u(t)$



$$X(t) = \begin{bmatrix} x & \theta & \dot{x} & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T$$

$$y(t) = x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X$$

رویت پذیری ← تعداد و نوع سنسورهای اندازه‌گیری

actuator

کنترل پذیری ← " " محرکهای لازم

تعریف رویت پذیری: یک سیستم LTI رویت پذیر نامیده می‌شود اگر شرایط اولیه متغیرهای حالت، $x(0)=x_0$، را بتوان به صورت یکتا از اطلاعات مربوط به $y(t)$ و $u(t)$ در محدوده زمانی $t\in[0\ \ T]$ به دست آورد.

$$t\in[0\ \ T],\ u(t)\ \checkmark,\ y(t)\ \checkmark \Rightarrow x_0 \rightarrow x(t)$$

$$x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \Rightarrow x(t)\rightarrow[0\ \ T]$$

$$y(t)=\underbrace{Ce^{At}x_0}_{y_{zi}}+\underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau+Du(t)}_{y_{zs}} \Rightarrow y_{zi}=Ce^{At}x_0$$

با داشتن y_{zi} بتوان x_0 را بطور یکتا محاسبه کرد.

$$y_{zi}=y-y_{zs}$$

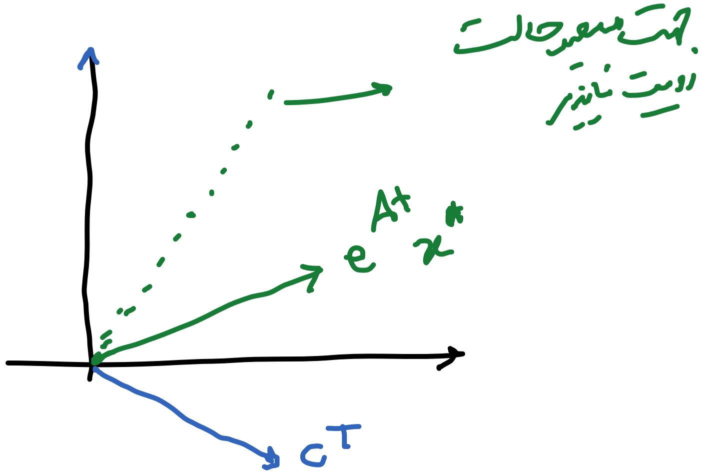
تعریف متغیر حالت رویت ناپذیر

متغیر $x^* \neq 0$ رویت ناپذیر گفته می شود، اگر $y_{zi}(t)$ با شرایط اولیه $x_0 = x^*$ برای کلیه زمانها کاملاً صفر باقی بماند: ($\forall t$)

$$\text{if } \exists\, x^* \neq 0 \ni y_{zi} = C e^{At} x^* = 0 , \text{ for } \forall t$$

$$x^* \neq 0 \longrightarrow x(t) \neq 0 , \qquad y_{zi} = C^T \cdot (e^{At} x^*) = 0$$

بردار C^T بر $e^{At}x^*$ عمود است



قضیه رویت پذیری: یک سیستم LTI (زوج A و C) رویت پذیر است اگر و تنها اگر هیچ متغیر حالت رویت ناپذیر نداشته باشد.

شرط لازم: در صورت وجود متغیر رویت ناپذیر، سیستم رویت ناپذیر است.

فرض کنید x^* متغیر رویت ناپذیر باشد $\quad x^* \neq 0 \Rightarrow Ce^{At}x^* = 0$

حال $\quad \text{for } x_1(0) = x_1 \Rightarrow y_1 = Ce^{At}x_1$

و $\quad \text{for } x_2(0) = x_1 + \alpha x^* \Rightarrow y_2 = Ce^{At}x_1 + \underbrace{\alpha Ce^{At}x^*}_{0} = Ce^{At}x_1 = y_1$

به ازای دو مقدار اولیه متفاوت (x_1, x_2) به پاسخ یکسان رسیدیم که این یعنی سیستم رویت پذیر نیست.

شرط کافی: درصورت نبود متغیر رویت ناپذیر، سیستم باید رویت پذیر باشد.

$$\text{for } x(0)=x_0 \Rightarrow y(t)=Ce^{At}x_0$$

$$(Ce^{At})^T \Longrightarrow (Ce^{At})^T y(t) = (Ce^{At})^T Ce^{At} x_0$$

$$\int_0^T \Longrightarrow \int_0^T (Ce^{At})^T y(t)\,dt = \int_0^T (Ce^{At})^T Ce^{At} x_0\,dt$$

با تعریف $M(T)=\int_0^T (Ce^{At})^T (Ce^{At})\,dt$ داریم

$$\Rightarrow M(T)\,x_0 = \int_0^T (Ce^{At})^T y(t)\,dt$$

اگر $M(T)$ همواره وارون پذیر باشد

$$x_0 = M^{-1}(T)\int_0^T (Ce^{At})^T y(t)\,dt$$

ثابت می شود که $M(T)$ یک ماتریس متقارن و مثبت معین است

$M^T=M$

$x_0^T M x_0>0$

قضیه: شرط رویت پذیری، بردار x^* یک متغیر حالت رویت ناپذیر است اگر و تنها اگر

$$Ox^* = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x^* = 0$$

که در آن O ماتریس رویت پذیری گفته می شود

$Rank(O) < n$ درصورتی که باشد، جواب $x^* \neq 0$ دارد

شرط لازم: اگر x^* یک متغیر حالت رویت ناپذیر باشد $\longleftarrow$ $\forall t>0:\ \underbrace{Ce^{At}x^*}_{f(t)} = 0$

$$f(t)=0 \longrightarrow f(0)=0,\quad f'(0)=0,\quad f''(0)=0 \dots$$

$$\Rightarrow Ce^{At}x^*_0\Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow Cx^* = 0$$

$$\frac{d}{dt}Ce^{At}x^*\Big|_{t=0} = CAe^{At}x^*\Big|_{t=0} = CAx^* = 0 \dots \Rightarrow CA^2x^* = 0 \dots, CA^kx^* = 0$$

$$k = n-1$$

$$(1)\quad Cx^* = CAx^* = \cdots = CA^{n-1}x^* = 0 \Rightarrow Ce^{At}x^* = 0$$: شرط کافی

معادله مشخصه ماتریس A: $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$

$$C.H. \Rightarrow A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$$

$$\Rightarrow A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-1} - \cdots - a_1 A - a_0 I$$

$$\Rightarrow CA^n x^* = -a_{n-1}\cancel{CA^{n-1}x^*}^{\,0} - \cdots - a_1 \cancel{CAx^*}^{\,0} - a_0 \cancel{Cx^*}^{\,0} = 0$$

(1)

$$\overset{A}{\Rightarrow} A^{n+1} = -a_{n-1}A^n - \cdots - a_1 A^2 - a_0 A \Rightarrow CA^{n+1}x^* = 0$$

$$\cdots \Rightarrow Ce^{At}x^* = 0$$

مثال: آیا سیستم زیر رویت پذیر است؟

$$A = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$n = 2$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rank}(O) = 1 < 2$$

پس سیستم رویت پذیر نیست

$$Ox^* = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1^* - x_2^* = 0$$

متغیر حالت رویت ناپذیر صفر فضای ماتریس O هستند

$$x^* = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow y_{zi} = C e^{At} x^* = 0 \checkmark$$

$$\longrightarrow \operatorname{Null}(O) \longrightarrow Ox = 0 \rightarrow x = v$$

$\theta \quad C$ مدنظر

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \times & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

a) θ $\leftarrow$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ $\text{Rank}(O) = 3$

b) ω $\leftarrow$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ $\text{Rank}(O) = 2$

c) θ, ω

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(O) = 3$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

آزمون بردار ویژه: زوج (A, C) رویت ناپذیر است، اگر و تنها اگر بردار ویژه v_i در A وجود داشته باشد که $Cv_i = 0$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1 \longrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Cv_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow$$ v به صورت رویت ناپذیر است.

$$\lambda_2 = -2 \longrightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Cv_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \rightarrow$$ رویت پذیر

این سیستم رویت ناپذیر است.

آزمون بردار ویژه. برای حالتی که مقدار ویژه تکراری داشته باشیم. (فرم جردن)

آزمون بردار ویژه فقط برای بردار ویژه های اصلی انجام می گیرد. (۲ح :

اگر برای یک مقدار ویژه تکراری، دو بردار ویژه مستقل بتوان یافت سیستم رویت ناپذیر است.
دو یا چند بلوک جردن داشته

در این صورت وقتی سیستم به فرم جردن نوشته می شود، در صورتی که شرایط زیر برقرار باشد سیستم رویت پذیر است.

۱- دو بلوک جردن با یک مقدار ویژه برابر وجود نداشته باشد

۲- هیچ یک از ستونهای اول ماتریس C مربوط به بلوکهای جردن همگی صفر نباشد.

۳- هیچ یک از ستونهای ماتریس C مربوط به مقادیر ویژه متمایز همگی صفر نباشد

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}$$

رویت پذیر

و

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

یا

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

رویت ناپذیر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

رویت پذیر

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

رویت ناپذیر

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & & \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \hline & & & -3 & 1 \\ & & & 0 & -3 \end{array}\right]$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

رویت پذیر

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

رویت ناپذیر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}$$

(1) رویت ناپذیر

J , Λ رویت ناپذیر

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{x = Tz} \begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y = CTz + Du \end{cases}$$

C