# ارتعاشات غیر خطی

# Perturbation Theory, First Order Expansion

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0 \qquad O(\varepsilon^2 t)$$

$$u(t;\varepsilon) = u_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, \dots) + O(T_2)$$

$$\Rightarrow u = a_0 \cos\left(t + \frac{3a_0\varepsilon t}{8} + \beta_0\right) + \frac{\varepsilon a_0^3}{32}\cos\left(3t + \frac{9a_1\varepsilon t}{8} + 3\beta_0\right) + O(\varepsilon^2 t)$$

اگر $t = O(\varepsilon^{-1})$ باشد، جمله دوم ما از مرتبه خطا خواهد شد پس فقط جمله اول را در نظر می گیریم

uniform first order expansion

$$u = a_0 \cos\left(t + \frac{3a_0\varepsilon t}{8} + \beta_0\right)$$

$$u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1)$$

$$\varepsilon^0 : \quad \text{———}$$

$$\varepsilon^1 : D_0^2 u_1 + u_1 = \text{[wavy]} + \text{[circle]}$$

EST NST

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \alpha \varepsilon u^3 = 0 \qquad 0 < \varepsilon << 1$$

Duffing Eq

$(a+b)^n =$

MS:

$$\varepsilon^0 : D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \rightarrow u_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0}$$

$$A' = \frac{\partial A}{\partial T_1}$$

$$\varepsilon^1 : D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2 D_0 D_1 u_0 - \alpha u_0^3$$

$$-2 D_1 D_0 u_0 = -2 D_1 \left( i\omega_0 A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + cc \right) = -2\omega_0 i A' e^{i\omega_0 T_0} + cc$$

$$-\alpha u_0^3 = -\alpha \left[ A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + 3A^2 \bar{A} e^{i\omega_0 T_0} + 3A\bar{A}^2 e^{-i\omega_0 T_0} + \bar{A}^3 e^{-3i\omega_0 T_0} \right]$$

$$= -\alpha \left[ A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + 3A^2 \bar{A} e^{i\omega_0 T_0} + cc \right]$$

$$\Rightarrow D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = \left( -2\omega_0 i A' - 3\alpha A^2 \bar{A} \right) e^{i\omega_0 T_0} - \alpha A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + cc$$

$$\Rightarrow D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = \left( -2\omega_0 i A' - 3\alpha A^2 \bar{A} \right) e^{i\omega_0 T_0} + NST + cc$$

$$EST: \quad 2i\omega_0 A' + 3\alpha A^2 \bar{A} = 0 \quad , \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)} \\ \bar{A} = \frac{1}{2} a(T_1) e^{-i\beta(T_1)} \end{cases}$$

$$2i\omega_0 \left( \frac{1}{2} a' e^{i\beta} + \frac{1}{2} i\beta' a e^{i\beta} \right) + 3\alpha \left( \frac{1}{4} a^2 e^{2i\beta} \right)\left( \frac{1}{2} a e^{-i\beta} \right) = 0$$

$$\Rightarrow i\omega_0 a' e^{i\beta} - \omega_0 \beta' a e^{i\beta} + \frac{3\alpha a^3}{8} e^{i\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a'\omega_0 = 0 \Rightarrow a' = 0 \Rightarrow a = a_0 \\ -\omega_0 \beta' a + \frac{3\alpha a^3}{8} = 0 \end{cases} \xrightarrow{a_0 \neq 0} \beta' = \frac{3\alpha a_0^2}{8\omega_0} \Rightarrow \beta = \frac{3\alpha a_0^2}{8\omega_0} T_1 + \beta_0$$

$$\Rightarrow u_0 = A e^{iT_0\omega_0} + cc = \frac{1}{2} a_0 e^{i\beta} e^{i\omega_0 T_0} + cc = \frac{1}{2} a_0 e^{i(\beta + \omega_0 T_0)} + cc$$

$$= a_0 \cos(\omega_0 T_0 + \beta)$$

$$u_0 = a_0 \cos(\omega_0 T_0 + \beta) = a_0 \cos\left(\omega_0 T_0 + \frac{3\alpha a_0^2}{8\omega_0} T_1 + \beta_0\right)$$

$$= a_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{3\alpha a_0^2 \varepsilon t}{8\omega_0} + \beta_0\right)$$

$$= a_0 \cos\left[\omega_0\left(1 + \frac{3\alpha a_0^2 \varepsilon}{8\omega_0^2}\right)t + \beta_0\right] = a_0 \cos(\omega t + \beta_0)$$

$$\Rightarrow \omega = \omega_0\left(1 + \frac{3\alpha a_0^2 \varepsilon}{8\omega_0^2}\right)$$

← nonlinear shift

1- فرض یک تابع غیرخطی از دامنه است

2- یک تغییر غیرخطی در فرض داریم

3- $\begin{cases} \alpha > 0 & \text{hardening} \\ \alpha < 0 & \text{softening} \end{cases}$

فرض زیاد می‌شود

فرض کم می‌شود