کنترل اتوماتیک

تحلیل پاسخ گذرا و ماندگار سیستمهای خطی
معیار پایداری روث

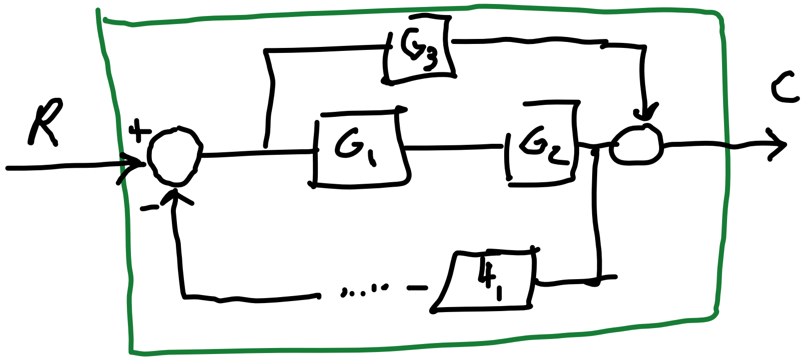
دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

Stability پایداری

یک سیستم کنترلی پایدار است، اگر و تنها اگر تمام قطبهای حلقه بسته آن در نیمه چپ صفحه اعداد مختلط باشد.



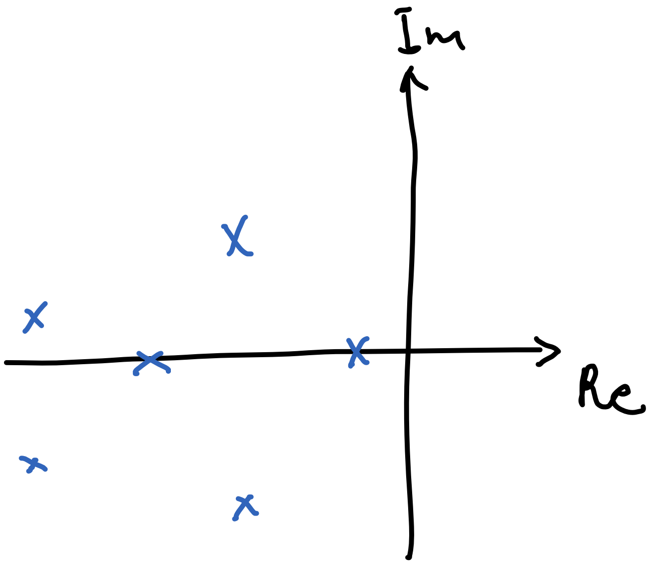
قطبهای سیستم حلقه بسته، ریشه‌های معادله مشخصه هستند

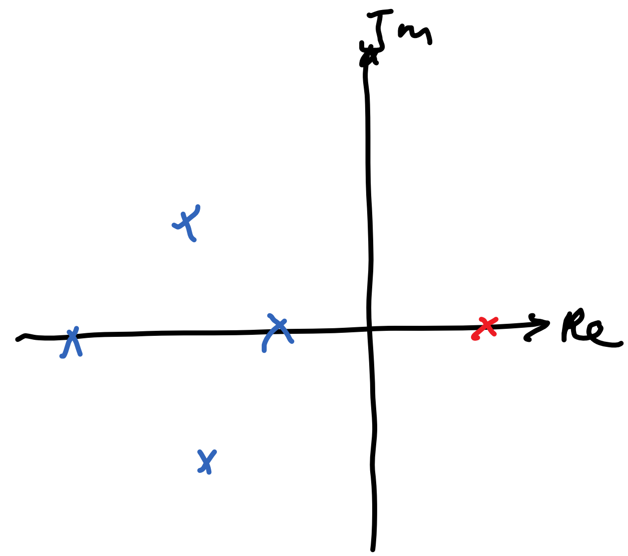
$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{\boxed{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}}$$

معادله مشخصه

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

معادله مشخصه $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \Rightarrow p_1, p_2, \dots, p_n$





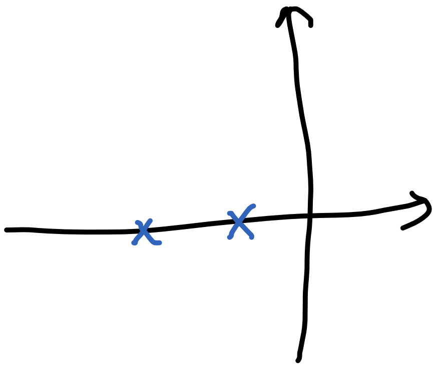
اگر همه قطبها (p_i ها) سمت چپ بوده یا به عبارت دیگر بخش Real آنها منفی بوده، سیستم پایدار است

ناپایدار

$$\frac{C}{R} = G(S) = \frac{1}{(S+1)(S+2)}$$

معادله مشخصه و : $(S+1)(S+2)=0$

$$P_1 = -1 , \quad P_2 = -2$$



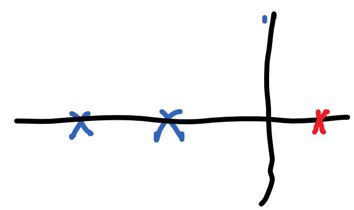
$$\Rightarrow c(t) = r(t) + a_1 e^{-t} + a_2 e^{-2t}$$

در حالت کلی $c(t) = r(t) + a_1 e^{P_1 t} + a_2 e^{P_2 t} + \dots + a_n e^{P_n t}$

شرط لازم و کافی پایداری $Re[P_i] < 0$ برای $i=1,2,\dots,n$

$$\frac{C}{R} = \frac{1}{(S-1)(S+2)(S+3)}$$

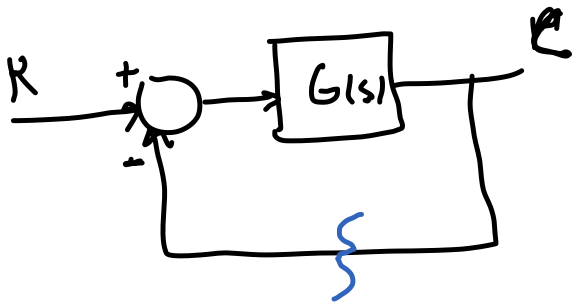
$$P_1 = 1 , \quad P_2 = -2 , \quad P_3 = -3$$



$t \to \infty \Rightarrow a_1 e^{t} \to \infty$

$$\Rightarrow c(t) = r(t) + a_1 e^{t} + a_2 e^{-2t} + a_3 e^{-3t}$$

مربوط به بحث خطای حالت ماندگار

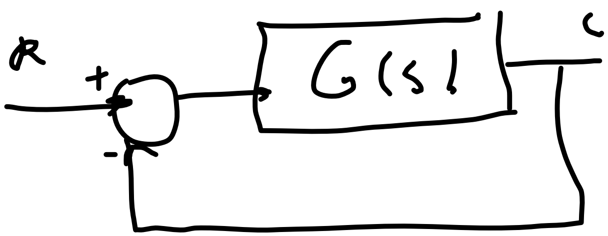


$$G(s) \to N \to e_{ss}$$

به ازای $G(s)$ تابع تبدیل حلقه باز گفته می‌شود.

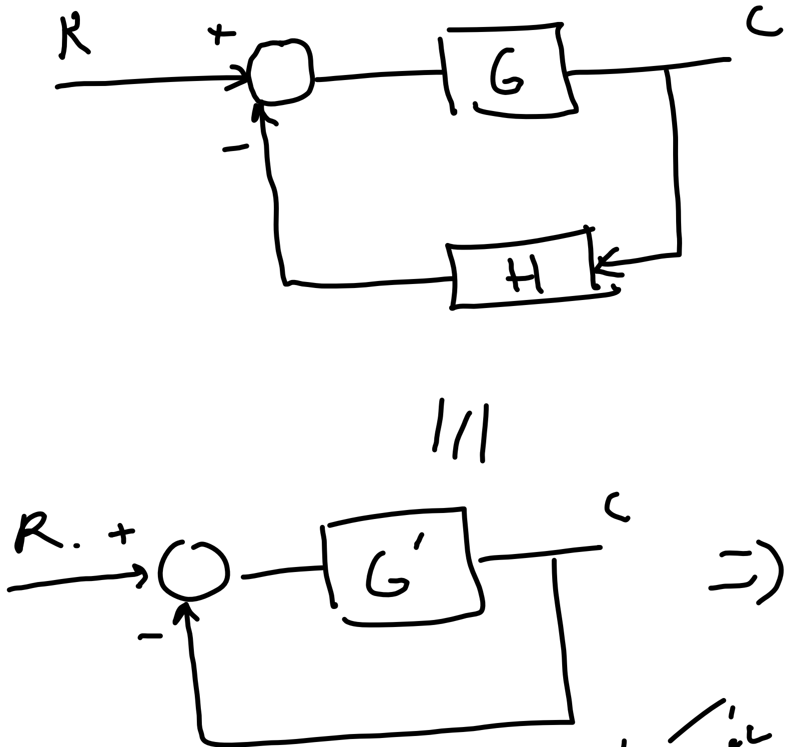
مثال: تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم با فیدبک واحد به صورت زیر است. خطای حالت ماندگار را محاسبه کنید.

$$G(s) = \frac{1}{s^2+s+2}$$



$$N = 0 \longrightarrow K_p = \frac{1}{2}$$

به ورودی پله $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$



تابع تبدیل حلقه باز : GH

(همان هندسی اینجا)

تابع تبدیل حلقه بسته : $\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH}$

$\Rightarrow \quad G' = ✓$

تابع تبدیل حلقه باز با فیدبک واحد

، $$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

محاسبه ریشه‌های معادله مشخصه در حالت کلی، $(n \geq 3)$ کار مشکلی است.

Routh، معیار پایداری روث، بدون محاسبه ریشه‌ها می‌توان تعداد ریشه‌های ناپایدار را محاسبه کرد.

$$s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 4s + 1 = 0 \longrightarrow$$

تعداد ریشه‌ها با بخش حقیقی مثبت را تعیین می‌کند.

معیار پایداری روث :

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

- $a_n \neq 0$ ، $s^3+4s^2+3s=0 \Rightarrow s(s^2+4s+3)=0$

$$\Rightarrow s^2+4s+3=0$$

- شرط لازم پایداری : $a_i > 0$

$s^3+4s^2+3s+2=0 \longrightarrow$ ✓

$s^3\underline{-4}s^2+3s+2=0 \longrightarrow$ ✗ $\rightarrow$ حتماً ناپایدار است. ریشه مثبت دارد.

$s^3+4s^2+2=0$ ، $a_2=0$ ✗ ناپایدار

$-s^3-4s^2-3s-2=0 \Rightarrow s^3+4s^2+3s+2=0$ ✓

شرط کافی پایداری: المانهای ستون اول جدول روث همگی مثبت باشند.

نکته: به تعداد تغییر علامت در ستون اول جدول روث، قطب ناپایدار داریم.

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

$$\begin{array}{l|lll}
s^n : & a_0 & a_2 & a_4 \\
s^{n-1} : & a_1 & a_3 & a_5 \\
s^{n-2} : & b_1 & b_2 & b_3 \\
s^{n-3} : & c_1 & c_2 & c_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
s^1 : & f_1 & f_2 & \\
s^0 : & g_1 & &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

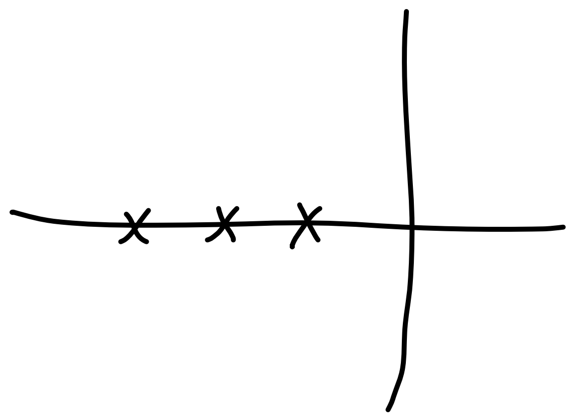
$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

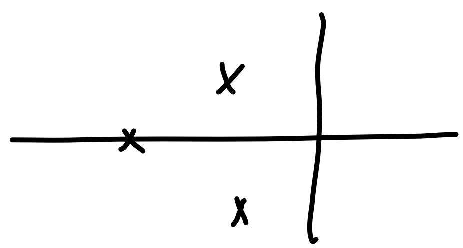
معادله مشخصه یک سیستم به صورت زیر داده شده، پایداری آن را بررسی کنید.

$$s^3+4s^2+3s+2=0$$

$$\begin{array}{lllll}
+ & s^3: & 1 & 3 & 0 \\
+ & s^2: & 4 & 2 & 0 \\
+ & s^1: & \frac{3\times 4-1\times 2}{4} = 2.5 & 0 & \\
+ & s^0: & \frac{2\times 2.5-4\times 0}{2.5} = 2 & 0 &
\end{array}$$

پایدار است





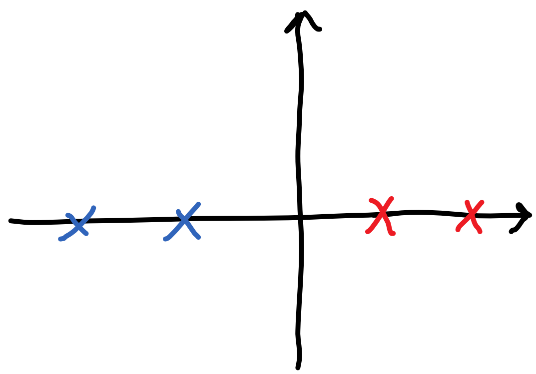
مثال:

$$s^4 + 3s^3 + s^2 + 4s + 12 = 0$$

$$\begin{array}{lllll}
+\; s^4: & 1 & 1 & 12 & 0 \\
+\; s^3: & 3 & 9 & 0 & 0 \\
-\; s^2: & -2 & 12 & 0 & \\
+\; s^1: & 27 & 0 & & \\
+\; s^0: & 12 & & &
\end{array}$$

$$\frac{-2\times 9-3\times 12}{-2} = 27$$

ناپایدار است. دو ریشه ناپایدار داریم



مثال : حالت خاص، صفر شدن المان اول یک سطر

$$s^5+2s^4+2s^3+4s^2+11s+10=0 \qquad \varepsilon>0$$

+	s^5:	1	2	11	0
+	s^4:	2	4	10	0
+	s^3:	$0 \rightarrow \varepsilon$	6	0	
−	s^2:	$\frac{4\varepsilon-12}{\varepsilon} \rightarrow \delta$	$\frac{10\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow 10$	0	
+	s^1:	$\frac{6\delta-10\varepsilon}{\delta} \rightarrow 6$	0		
+	s^0:	10			

$$\frac{4\varepsilon-12}{\varepsilon}=\delta<0 \qquad \delta \rightarrow -\infty$$

$$\frac{6\delta-10\varepsilon}{\delta}=6$$

$\varepsilon \rightarrow 0$

$\delta \rightarrow -\infty$

دو ریشه ناپایدار دارد.

مثال: حالت خاص: صفر شدن همه المانهای یک سطر

$$s^5+2s^4+24s^3+48s^2-25s-50=0 \longrightarrow$$

ناپایدار است چون شرط لازم را ندارد.

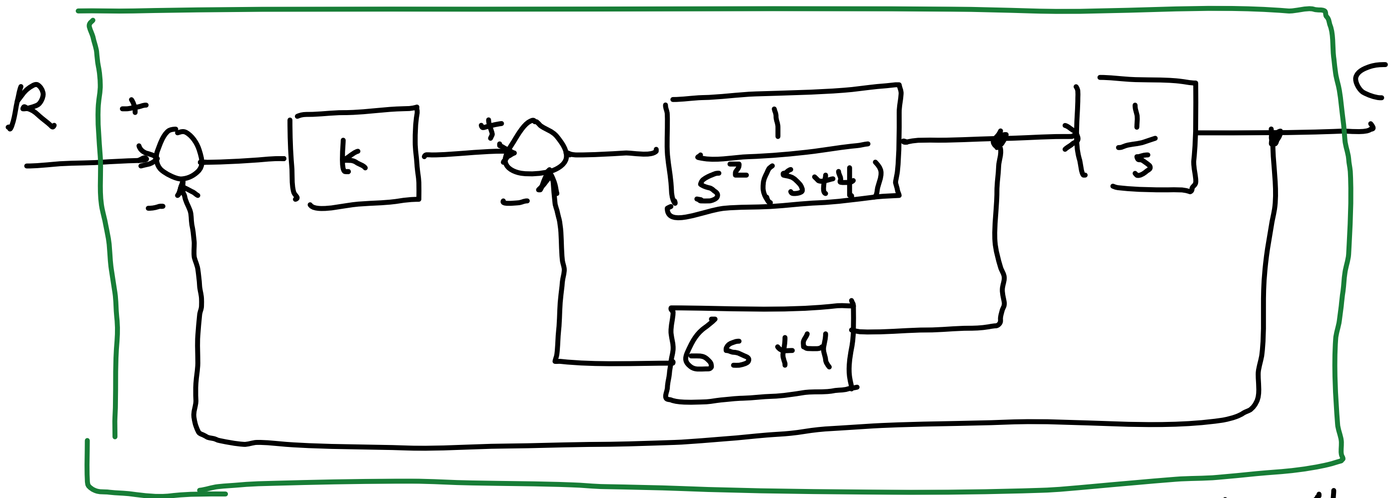
$+\ s^5:$	1	24	−25
$+\ s^4:$	2	48	−50
$+\ s^3:$	$\cancel{0}\ 8$	$\cancel{0}\ 96$	0
$+\ s^2:$	24	−50	
$+\ s^1:$	112.5		
$-\ s^0:$	−50		

$$\Rightarrow P(s)=2s^4+48s^2-50$$

$$\Rightarrow \frac{dP(s)}{ds}=8s^3+96s$$

یک قطب ناپایدار داریم و سیستم ناپایدار است.

مثال : به ازای چه محدوده ای از K سیستم زیر پایدار است.



تابع تبدیل حلقه بسته

$$\frac{C}{R}=\frac{K}{s^4+4s^3+6s^2+4s+K}$$

s^4 :	1	6	K
s^3 :	4	4	0
s^2 :	5	K	
s^1 :	$\frac{20-4K}{5}$	0	
s^0 :	K		

$20-4K>0 \Rightarrow K<5$

$K>0$

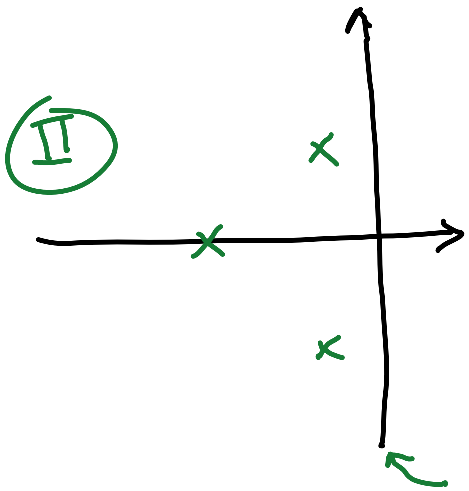
$\Leftarrow$ $0<K<5$

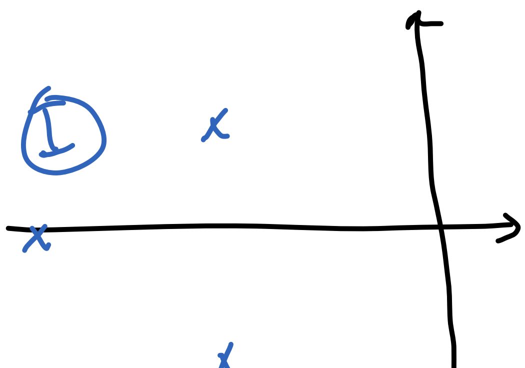
تحلیل پایداری نسبی:

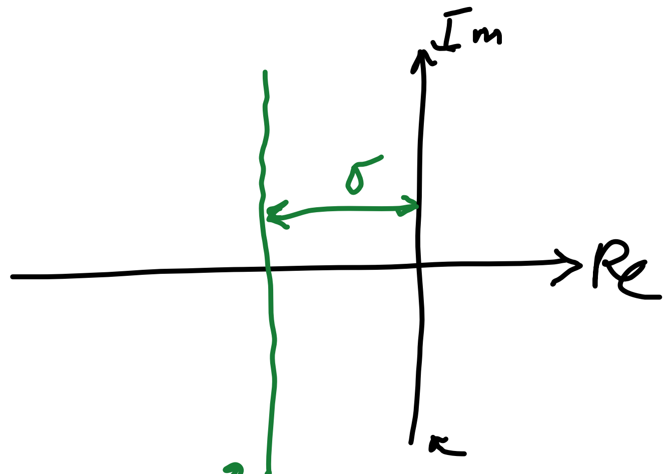
هرچه قطبهای غالب از محور موهومی دورتر باشند

سیستم پایدارتر است

سیستم I از سیستم II پایدارتر است.



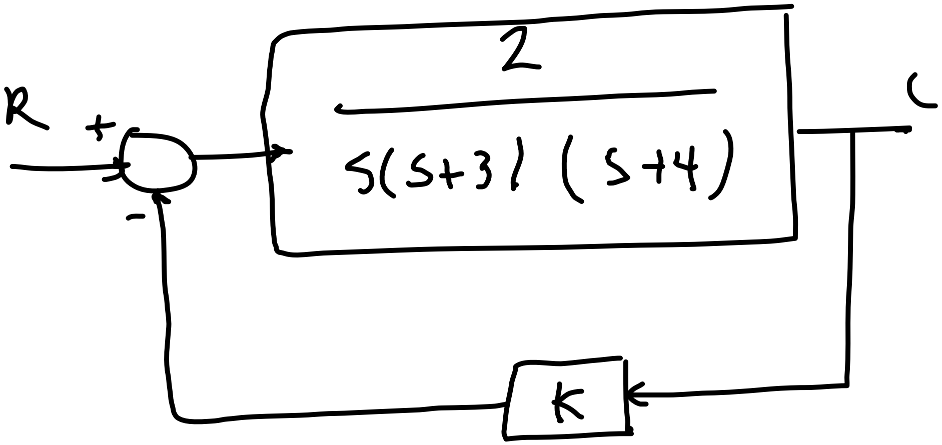




$S \rightarrow (\hat{S} - \sigma)$

مثال :

محدوده K جهت پایداری سیستم.



$$\frac{C}{R} = \frac{''}{s^3 + 7s^2 + 12s + 2K}$$

$$s^3 + 7s^2 + 12s + 2K = 0$$

$s^3 : \quad 1 \qquad 12$

$s^2 : \quad 7 \qquad 2K$

$s^1 : \quad \frac{7\times 12 - 2K}{7} \qquad 0 \longrightarrow 7\times 12 - 2K > 0 \Rightarrow 42 > K$

$s^0 : \quad 2K \longrightarrow K > 0$

$$0 < K < 42$$

برای مثال قبل محدوده K را به نحوی تعیین کنید که قطبهای غالب حداقل یک واحد از محور موهومی دور باشند.

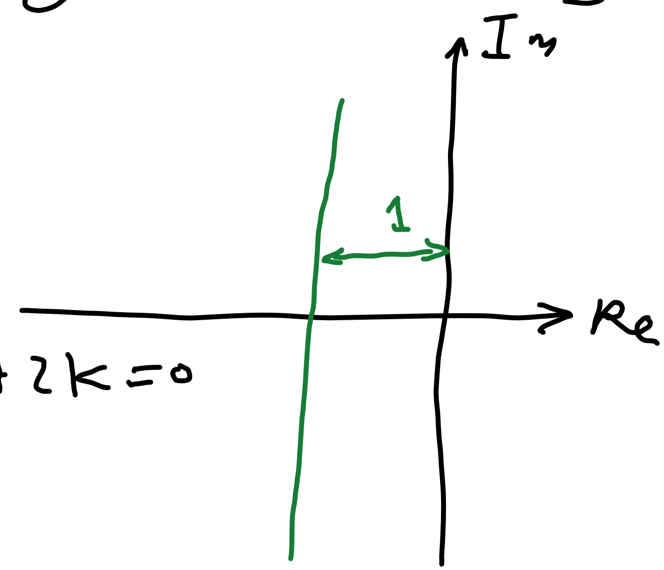
$$s^3 + 7s^2 + 12s + 2K = 0$$

$$s \longrightarrow \hat{s} - 1$$

$$(\hat{s}-1)^3 + 7(\hat{s}-1)^2 + 12(\hat{s}-1) + 2K = 0$$

$$\Rightarrow \hat{s}^3 - 3\hat{s}^2 + 3\hat{s} - 1 + 7\hat{s}^2 - 14\hat{s} + 7 + 12\hat{s} - 12 + 2K = 0$$

$$\Rightarrow \hat{s}^3 + 4\hat{s}^2 + \hat{s} - 6 + 2K = 0$$



$$\hat{s}^3 + 4\hat{s}^2 + \hat{s} - 6 + 2k = 0$$

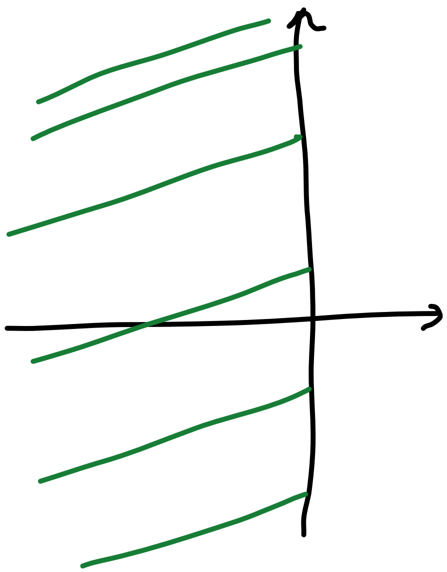
$\hat{s}^3 : \quad 1 \qquad 1 \qquad 0$

$\hat{s}^2 : \quad 4 \qquad 2k-6$

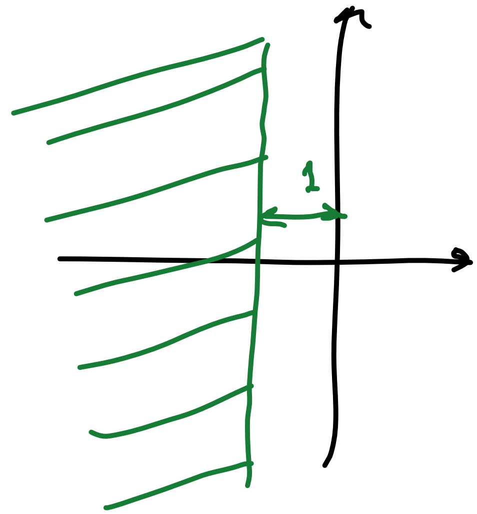
$\hat{s}^1 : \quad \dfrac{4-2k+6}{4} \qquad 0 \longrightarrow 10-2k>0 \Rightarrow k<5$

$\hat{s}^0 : \quad 2k-6 \longrightarrow 2k-6>0 \Rightarrow k>3$

$$3<k<5$$



$0 < K < 42$



$\underbrace{3 < K < 5}$