ارتعاشات غیر خطی

Perturbation Theory, Harmonic Balance, Non-Conservative System

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

The Method of Harmonic Balance روش توازن هارمونیک

در این روش فرض می‌کنند که یک پاسخ پریودیک داریم، و می‌توان آنرا به صورت یک سری پریودیک نوشت

Assume: $$u = \sum_{m=0}^{M} A_m \cos(m\omega t + m\beta_0) = A_0 + A_1 \cos\varphi + \dots$$

or $$u = \sum_{m=0}^{M} A_m \cos(m\omega t) + \sum_{m=1}^{M} B_m \sin(m\omega t)$$

در این روش مجهولات A_0، A_1، ... و β_0، ω باید به دست آید.

Ex: $\ddot{u} + \omega_0^2 u + \alpha u^3 = 0$

اگر معادله cubic nonl. (u^3) ، A_0 نداریم

و اگر u^2 ← A_0 داشتیم

$$u = A_1 \cos(\omega t + \beta_0) = A_1 \cos\varphi \quad , \quad \varphi = \omega t + \beta_0$$

$$\rightarrow \dot{u} = -A_1 \omega \sin\varphi \quad , \quad \ddot{u} = -A_1 \omega^2 \cos\varphi$$

$$\Rightarrow -A_1 \omega^2 \cos\varphi + \omega_0^2 A_1 \cos\varphi + \alpha A_1^3 \cos^3\varphi = 0$$

داریم $\cos^3\varphi = \frac{1}{4}\cos 3\varphi + \frac{3}{4}\cos\varphi$

صرف‌نظر می‌کنیم
چون تقریبش $\cos\varphi$ است

$$-(\omega^2 - \omega_0^2) A_1 \cos\varphi + \frac{3}{4}\alpha A_1^3 \cos\varphi + \frac{1}{4}\alpha A_1^3 \cos 3\varphi = 0$$

مقدار کوچک

ضریب $\cos\varphi$: $-(\omega^2 - \omega_0^2) A_1 + \frac{3}{4}\alpha A_1^3 = 0 \xRightarrow{A_1 \neq 0} \omega = \omega_0 \left(1 + \frac{3\alpha A_1^2}{4\omega_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

for small $A_1 \Rightarrow \omega = \omega_0 \left(1 + \frac{3\alpha A_1^2}{8\omega_0^2}\right)$, $(1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \cdots$

EX. simple pendulum, $\ddot{u}+\sin u=0 \longrightarrow \ddot{u}+u-\underbrace{\frac{1}{6}}_{\varepsilon}u^3=0$

$$u=A_1\cos\varphi \longrightarrow -\omega^2A_1\cos\varphi+A_1\cos\varphi-\frac{1}{6}A_1^3\cos^3\varphi=0$$

$$\cos\varphi: \quad A_1\left[(1-\omega^2)-\frac{1}{8}A_1^2\right]=0 \xRightarrow{A_1\neq 0} \omega^2=1-\frac{1}{8}A_1^2$$

for small $A_1 \longrightarrow \omega=1-\frac{1}{16}A_1^2$

تقریب

$$\Rightarrow \omega=\sqrt{1-\frac{1}{8}A_1^2}$$

سیستم‌های غیر پایستار Non-Conservative sys.

Duffing Oscillator with damping

$$\ddot{x} + x + \underline{2\mu\dot{x}} - x^3 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2\mu x_2 + x_1^3 \end{cases} \xrightarrow{\text{نقاط تعادل}} \quad x_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3^* = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

سیستم خطی شده:
ژاکوبین

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1+3x_1^2 & -2\mu \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{for } x_1^* \rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\mu \end{bmatrix}$$

$$\text{for } x_{2,3}^* \rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2\mu \end{bmatrix}$$

for x_1^* $\rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\mu \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2\mu-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + 2\mu\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2-1} \Rightarrow$

$0 < \mu < 1 \longrightarrow$ stable spiral , $\mu = 0.5 \rightarrow \lambda_{1,2} = -0.5 \pm \sqrt{0.25-1}$

$\mu > 1 \longrightarrow$ stable Node $\rightarrow \mu = 2 \rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2^2-1}$

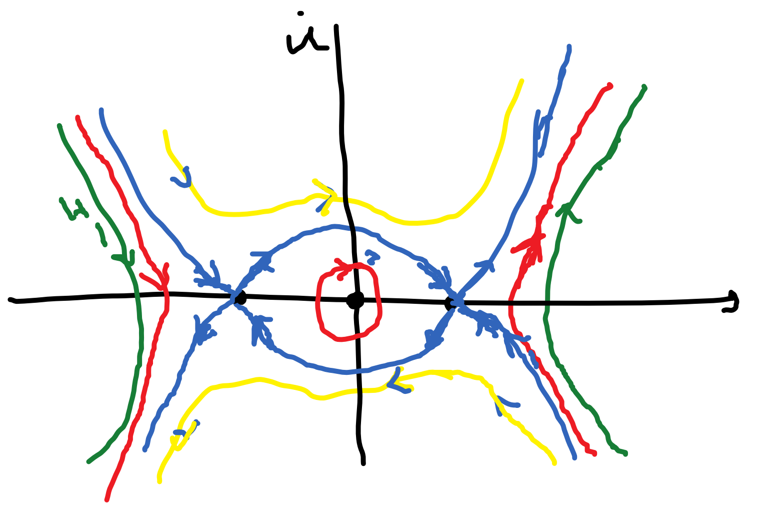
حقیقی $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

$-1 < \mu < 0 \longrightarrow$ unstable spiral $\quad Re\{\lambda_i\} > 0 \quad i = 1, 2$

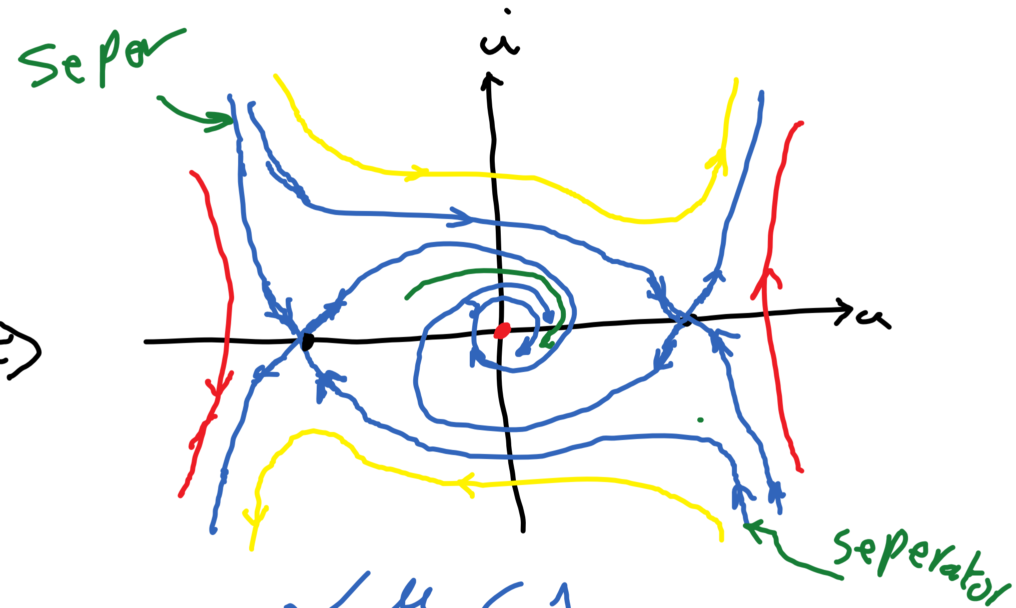
$\mu < -1 \longrightarrow$ unstable Node $\quad \lambda_1 > \lambda_2 > 0$

For $x^*_{2,3} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2\mu \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -2\mu-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\mu\lambda - 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2+2} \Rightarrow \quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \longrightarrow$ saddle



$\Rightarrow$



$\mu = 0$ ، بی‌میرا،

$0 < \mu < 1$

$$\ddot{u} + \omega_0 u^2 + \underline{2\varepsilon\mu\dot{u}} + \alpha\varepsilon u^3 = 0$$

حل معادله دافینگ با ضریب دمپینگ

با روش MS

First order expansion: $u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1)$

$$\begin{cases} \varepsilon^0: & D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_0(T_0, T_1) = A(T_1)e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega_0 T_0} \\ \varepsilon^1: & D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\mu D_0 u_0 - \alpha u_0^3 \end{cases}$$

جایگذاری u_0 در معادلات دوم $\Rightarrow$ $-2i\omega_0 A' e^{i\omega_0 T_0} - 2\mu i\omega_0 A e^{i\omega_0 T_0} - 3\alpha A^2 \bar{A} e^{i\omega_0 T_0} + NST + cc$

حذف سکولار ترم: $2i(\omega_0 A' + \mu A) + 3\alpha A^2 \bar{A} = 0$

با فرض: $A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a' = -\mu a \longrightarrow a = a_0 e^{-\mu T_1} \\ a\beta' = \dfrac{3\alpha a^3}{8\omega_0} \xrightarrow{a \neq 0} \beta' = \dfrac{3\alpha}{8\omega_0} a_0^2 e^{-2\mu T_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta(T_1) = \frac{3\alpha \quad a_0^2}{8\omega_0 (-2\mu)} e^{-2\mu T_1} + \beta_0$$

$$\Rightarrow u = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + cc = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)} e^{i\omega_0 T_0} + cc$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{1}{2} a_0 e^{-\mu T_1} \exp\left(i\omega_0 T_0 - \frac{3\alpha a_0^2 i}{16\omega_0 \mu} e^{-2\mu T_1} + i\beta_0 \right) + cc$$

$$\Rightarrow \quad u = a_0 e^{-\mu\varepsilon t} \cos\left(\omega_0 t - \frac{3\alpha a_0^2}{16\omega_0 \mu} e^{-2\mu\varepsilon t} + \beta_0 \right)$$

$$u = a_0 e^{-\mu\varepsilon t}\cos\left(\omega_0 t - \frac{3\alpha a_0^2}{16\omega_0\mu} e^{-2\mu\varepsilon t} + \beta_0\right)$$

$$\alpha = 0 \rightarrow u = a_0 e^{-\mu\varepsilon t}\cos(\underbrace{\omega_0 t} + \beta_0)$$

سیستم با ω_0 نوسان می‌کند ← انتظار داشتیم با ω_d

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

باید ترم u_2 را نیز در نظر بگیریم — ε^2

Free oscillation of Positively damped system

انواع دمپینگ

- Columb friction $\mu \, \mathrm{sign}(\dot{u})$
- Linear viscus damping $2\mu\dot{u}$
- non linear damping $\begin{cases} \mu |\dot{u}|^{\alpha} \dot{u} \\ f(u)\, \dot{u} \end{cases}$

اگر $\dot{u}^2$ باشد، دمپینگ محسوب نمی‌شود.

$$\dot{u}^2 \neq |\dot{u}|\, \dot{u}$$

$$\dot{u}^3 = |\dot{u}|^2 \dot{u}$$

EX. $\ddot{u} + \omega_0 u + \underline{\varepsilon \dot{u}^3} = 0 \qquad 0 < \varepsilon \leq 1$

First order expansion $u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1)$

$$\varepsilon^0: \; D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \longrightarrow u_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A} e^{-i\omega_0 T_0}$$

$$\varepsilon^1: \; D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2 D_0 D_1 u_0 - (D_0 u_0)^3$$

$$D_0 u_0 = i\omega_0 A e^{i\omega_0 T_0} - i\omega_0 \bar{A} e^{-i\omega_0 T_0} \xrightarrow{3a^2 b}$$

$$-2 D_0 D_1 u_0 - (D_0 u_0)^3 = -2 i\omega_0 A' e^{i\omega_0 T_0} - \underline{3 i \omega_0^3 A^2 \bar{A} e^{i\omega_0 T_0}} + cc + NST$$

سکولار ترم
حذف

$$\Rightarrow \quad 2iA' + 3i\omega_0^2 A^2 \bar{A} = 0$$

با فرض: $A = \frac{1}{2} a(T_1)\, e^{i\beta(T_1)} \longrightarrow 2iA' + 3i\omega_0^2 A^2 \bar{A} = 0$

$$\begin{cases} a' = -\frac{3}{8}\omega_0 a^3 \longrightarrow \frac{da}{dT_1} = -\frac{3}{8}\omega_0 a^3 \rightarrow \int \frac{da}{a^3} = \int \frac{-3\omega_0}{8}\, dT_1 \quad (1) \\ \beta' = 0 \longrightarrow \beta = \beta_0 \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{1}{a^2} = \frac{-3\omega_0}{8} T_1 + c$$, assume at $t=0$, $a = a_0$

$$-\frac{1}{2} a^{-2} \xrightarrow{\text{مشتق}} a^{-3}$$

$$\Rightarrow c = -\frac{1}{2a_0^2}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{a_0^2}{1 + \frac{3a_0\omega_0^2 T_1}{4}}$$, $u = a\cos(\omega_0 T_0 + \beta_0)$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \frac{3}{4}\varepsilon a_0 \omega_0^2 t}} \cos(\omega_0 t + \beta_0)$$

فرکانس نوسانات تغییر نکرده است و همان ω_0 در پاسخ خطی ما است.

Algebric decay

سرعت decay کمتر شده است.

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon \dot{u}^3 = 0$$

- نقاط ثابت را محاسبه کنید

- حول نقطه ثابت $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ خطی سازی انجام دهید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}$$

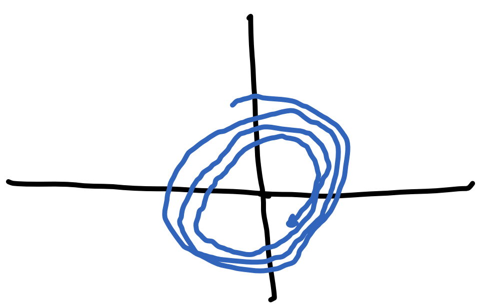
که می گوید نقطه تعادل ← center ✗

stable spiral ← ms اول ←

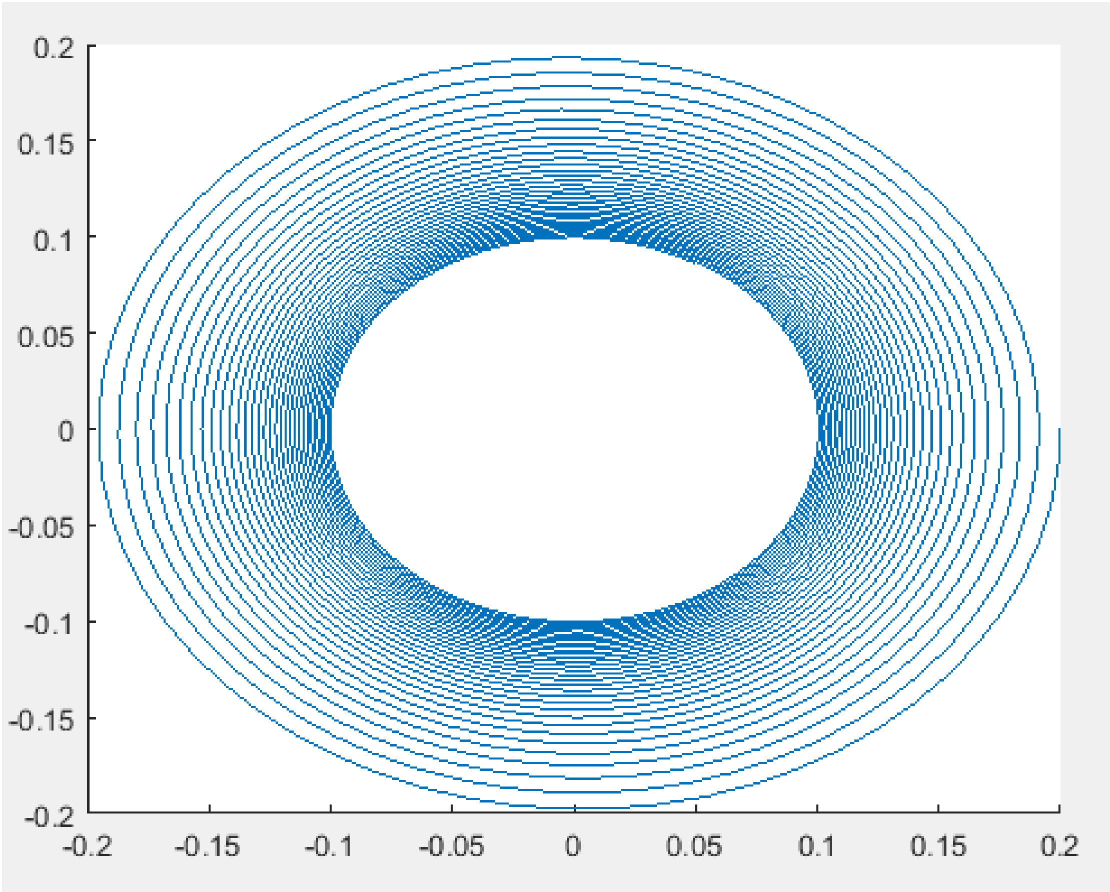
- این مثال یکی از مواردی است که تحلیل خطی درست جواب نمی دهد.

- برای سیستم های پایدار تقریبی که از تحلیل خطی بدست می آید درست است.

- اما برای سیستم های غیرپایدار این طور نیست.



یک spiral تولید داریم و سرعت کاهش دامنه خیلی کم است.


0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.2
-0.15
-0.1
-0.05
0
0.05
0.1
0.15
0.2

ارتعاشات غیر خطی

Perturbation Theory
Non-Conservative System

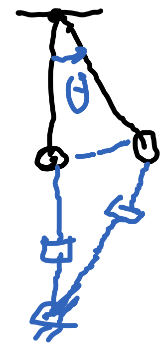
دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

EX. $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta + \dfrac{4\sin^2\theta}{1+4(1-\cos\theta)}\dot{\theta} = 0$, θ is small

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \cdots\right) + \frac{4\left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \cdots\right)^2}{1+4\left(1-1+\frac{\theta^2}{2}+\cdots\right)}\dot{\theta} = 0$$



$$\frac{4\theta^2}{1+4\left(\frac{\theta^2}{2}\right)}\dot{\theta} \to 4\theta^2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta - \frac{1}{6}\omega_0^2\theta^3 + \underline{4\theta^2\dot{\theta}} = 0$$

در حالت کلی‌تر $\theta = \varepsilon^\lambda u \Rightarrow \varepsilon^\lambda \ddot{u} + \omega_0^2 \varepsilon^\lambda u - \frac{1}{6}\omega_0^2 \varepsilon^{3\lambda} u^3 + 4\varepsilon^{3\lambda} u^2 \dot{u} = 0$

$$\Rightarrow \ddot{u} + \omega_0^2 u - \frac{1}{6}\omega_0^2 \varepsilon^{2\lambda} u^3 + 4\varepsilon^{2\lambda} u^2\dot{u} = 0$$

$$2\lambda = 1 \longrightarrow \ddot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon\left(4u^2\dot{u} - \frac{1}{6}\omega_0^2 u^3\right) = 0$$

General case: $\ddot{u}+\omega_0^2 u+\underbrace{2\varepsilon\mu u^2\dot{u}}_{\text{nonlinear damping}}+\varepsilon\alpha u^3=0$ M.S.

$f(u,\dot{u})$

$u=u_0(T_0,T_1)+\varepsilon u_1(T_0,T_1)$

$\varepsilon^0: \; D_0^2u_0+\omega_0^2u_0=0 \longrightarrow u_0=A(T_1)e^{i\omega_0T_0}+cc$

$\varepsilon^1: \; D_0^2u_1+\omega_0^2u_1=-2D_0D_1u_0-2\mu u_0^2D_0u_0-\alpha u_0^3$

$\Rightarrow -2i\omega_0A'e^{i\omega_0T_0}-2i\mu\omega_0A^2\bar{A}e^{i\omega_0T_0}-3\alpha A^2\bar{A}e^{i\omega_0T_0}+cc+NST$

$-2\mu u_0^2D_0u=-2\mu\left(Ae^{i\omega_0T_0}+\bar{A}e^{-i\omega_0T_0}\right)^2\left(i\omega_0Ae^{i\omega_0T_0}-i\omega_0\bar{A}e^{-i\omega_0T_0}\right)$

$=-2\mu\left[-A^2\bar{A}i\omega_0e^{i\omega_0T_0}+2A^2\bar{A}i\omega_0e^{i\omega_0T_0}+NST\right]$

حذف سکولار ترم : $2i\omega_0 A' + 2i\mu\omega_0 A^2 A' + 3\alpha A^2 A' = 0$

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)} \Longrightarrow \begin{cases} a' = -\frac{1}{4}\mu a^3 \xrightarrow{t=0,\ a=a_0} a = \dfrac{a_0}{\left(1+\frac{1}{2}\mu a_0^2 T_1\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \beta' = \dfrac{3\alpha}{8\omega_0} a^2 \end{cases}$$

$$\frac{\beta'}{a'} = \frac{-3\alpha}{2\omega_0 \mu a} \longrightarrow \frac{d\beta}{da} = \frac{-3\alpha}{2\omega_0\mu a} \Rightarrow d\beta = \frac{-3\alpha}{2\omega_0\mu}\frac{da}{a}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{-3\alpha}{2\omega_0\mu}\ln a + \hat{\beta}_0 \Rightarrow \beta = \frac{-3\alpha}{2\omega_0\mu}\ln \frac{a_0}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\mu a_0^2 T_1}} + \hat{\beta}_0$$

$$\beta = \frac{-3\alpha}{2\omega_0 \mu} \ln \frac{a_0}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\mu a_0^2 T_1}} + \beta_0 \Rightarrow \beta = \frac{-3\alpha}{2\omega_0 \mu} \ln a_0 \left(1+\frac{1}{2}\mu a_0^2 T_1\right)^{-\frac{1}{2}} + \hat{\beta}_0$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{-3\alpha}{2\omega_0 \mu} \ln a_0 + \frac{3\alpha}{4\omega_0 \mu} \ln\left(1+\frac{1}{2}\mu a_0^2 T_1\right) + \hat{\beta}_0$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{3\alpha}{4\omega_0 \mu} \ln\left(1+\frac{1}{2}\mu a_0^2 T_1\right) + \beta_0 \quad , \quad \beta_0 = \hat{\beta}_0 - \frac{3\alpha}{2\omega_0 \mu} \ln a_0$$

$$\Rightarrow u = \frac{a_0}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\varepsilon \mu a_0^2 t}} \cos\left[\omega_0 t + \frac{3\alpha}{4\omega_0 \mu} \ln\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon \mu a_0^2 t\right) + \beta_0\right]$$

$$u = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\varepsilon \cancel{k} a_0^2 t}} \cos\left[\omega_0 t + \frac{3\alpha}{4\omega_0 \cancel{k}} \ln\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon \cancel{k} a_0^2 t\right) + \beta_0\right]$$

داریم $\ln(1+\varepsilon) = \varepsilon$ ، $\varepsilon \ll 1$

$$u = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\varepsilon \cancel{k} a_0^2 t}} \cos\left[\omega_0 t + \frac{3\alpha\varepsilon\, a_0^2 t}{8\omega_0} + \beta_0\right]$$

Algebric decay

برای معادله اصلی ← خطی سازی حول $(0,0)$ انجام دهیم ← احتمالاً مبدا را center
به دست خواهیم آورد. در صورتی که spiral است.

EX.

نشان دهید نقطه تعادل سیستم زیر spiral است

$$\ddot{u} + \mu|\dot{u}|^{n-1}\dot{u} + u = 0 \qquad n>1 \ , \ \mu>0$$

$$\begin{array}{l} u = x \\ \dot{u} = y \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \mu|y|^{n-1}y \end{cases} \xrightarrow{\text{خطی سازی}} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\mu|y|^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{at } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$ نقطه تعادل center است

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

X

$$\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = -x - \mu |y|^{n-1} y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad r>0$$

معادله در فرم قطبی نوشته می‌شوند.

$$\begin{array}{l} \cos\theta \\ \sin\theta \end{array} \begin{cases} \dot r\cos\theta - r\dot\theta\sin\theta = r\sin\theta \\ \dot r\sin\theta + r\dot\theta\cos\theta = -r\cos\theta - \mu|r\sin\theta|^{n-1} r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} \dot r\cos^2\theta = r\dot\theta\sin\theta\cos\theta + \cancel{r\sin\theta\cos\theta} \\ \dot r\sin^2\theta = -r\dot\theta\sin\theta\cos\theta - \cancel{r\sin\theta\cos\theta} - \mu r^{n-1}\sin\theta|\sin\theta|^{n-1} r\sin\theta \end{cases}$$

$$(1)+(2) \Rightarrow \begin{cases} \dot r = -\mu r^{n}\sin^2\theta|\sin\theta|^{n-1} \longrightarrow \dot r < 0 \longrightarrow \text{spiral} \\ \Rightarrow \ \dots \quad \dot\theta = -1 - \mu r^{n-1}|\sin\theta|^{n-1}\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

r در حال کوچک شدن است.