ارتعاشات غیر خطی

Perturbation Theory
General System with Odd Nonlinearity

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

سیستم های با ترم غیرخطی فرد   Odd nonlinearity

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \varepsilon f(u, \dot{u}) \qquad \varepsilon \ll 1$$

که در آن f یک تابع فرد است.

از روش MS دانستیم که

$$u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1)$$

$$\varepsilon^0: \quad D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = 0 \longrightarrow u_0 = a(T_1)\cos(\omega_0 T_0 + \beta(T_1))$$

$$D_0 u_0 = -\omega_0 a(T_1)\sin(\omega_0 T_0 + \beta(T_1))$$

$$\varepsilon^1: \quad D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2 D_0 D_1 u_0 + f(u_0, D_0 u_0)$$

$$= 2a'\omega_0 \sin(\omega_0 T_0 + \beta) + 2a\beta'\omega_0 \cos(\omega_0 T_0 + \beta) + f\left[a\cos(\omega_0 T_0 + \beta), -a\omega_0 \sin(\omega_0 T_0 + \beta)\right]$$

تابع f را با استفاده از بسط سری فوریه می‌توان به صورت زیر نوشت

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = 2\omega_0 a' \sin(\omega_0 T_0 + \beta) + 2a\beta'\omega_0 \cos(\omega_0 T_0 + \beta)$$
$$+ f_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)\cos(n\omega_0 T_0 + n\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a)\sin(n\omega_0 T_0 + n\beta)$$

برای حذف ترم‌های سکولار ← $n=1$ فقط $n=1$ ترم‌های سکولار می‌دهد

$$\varphi = \omega_0 T_0 + \beta$$

حذف ترم‌های سکولار ←

به این معادلات Modulation Eq.

$\sin(\omega_0 T_0 + \beta)$

$$\begin{cases} 2a'\omega_0 + g_1(a) = 0 \\ 2a\beta'\omega_0 + f_1(a) = 0 \end{cases}$$

$\cos(\omega_0 T_0 + \beta)$

ضرایب

f_1 و g_1 ضرایب بسط سری فوریه هستند که به صورت زیر بدست می‌آیند

$$g_1(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi)\sin\varphi \, d\varphi$$

$$f_1(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi)\cos\varphi \, d\varphi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a' = \dfrac{-1}{2\pi\omega_0}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\;''\;)\sin\varphi\, d\varphi \\ a\beta' = \dfrac{-1}{2\pi\omega_0}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\;''\;)\cos\varphi\, d\varphi \end{cases}$$

EX: $\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0 \Rightarrow \ddot{u} + u = -\varepsilon u^3, \quad f(u,\dot{u}) = -u^3$

$u = a\cos\varphi$

$$a' = \frac{+1}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} a^3 \underbrace{\cos^3\varphi \sin\varphi}_{\text{فرد}} = 0 \rightarrow a' = 0$$

به همان معادلات قبلی رسیدیم

$$a\beta' = \frac{1}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} a^3 \underbrace{\cos^4\varphi}_{\text{زوج}}\, d\varphi = \frac{3a^3}{8\omega_0}$$

$$\int_0^{2\pi} a^3\cos^3\varphi\sin\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} a^3\cos^3\varphi\sin\varphi = 0$$

$a^3\cos^3\varphi\sin\varphi$ یک تابع فرد است،

$f(u) = -f(-u) \rightarrow$ تابع فرد

$f(u) = f(-u)$ تابع زوج

$$\cos^3(-\varphi)\sin(-\varphi) = -\cos^3\varphi\sin\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} a^3\cos^4\varphi\, d\varphi, \quad \cos^4\varphi = \left(\frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}\right)^4$$

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$\int_0^{2\pi} a^3 \cos^4\varphi \, d\varphi \,, \quad \cos^4\varphi = \left(\frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}\right)^4$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\cos^4\varphi = \frac{1}{16}\left[e^{4j\varphi} + 4e^{2j\varphi} + 6 + 4e^{-2j\varphi} + e^{-4j\varphi}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{e^{4\varphi j}+e^{-4\varphi j}}{2} + \frac{4\left(e^{2j\varphi}+e^{-2j\varphi}\right)}{2} + \frac{6}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\cos 4\varphi + 2\cos 2\varphi + 3\right]$$

$$\int a^3 \cos^4\varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{8}\left[\cos 4\varphi + 2\cos 2\varphi + 3\right] d\varphi$$

$$= \frac{a^3}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4\varphi + \sin 2\varphi + 3\varphi\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{a^3}{4}\left[6\pi\right] = \frac{3a^3\pi}{2}$$

EX. $\ddot{u} + u + \varepsilon \dot{u}|\dot{u}| = 0$ Quadratic damping

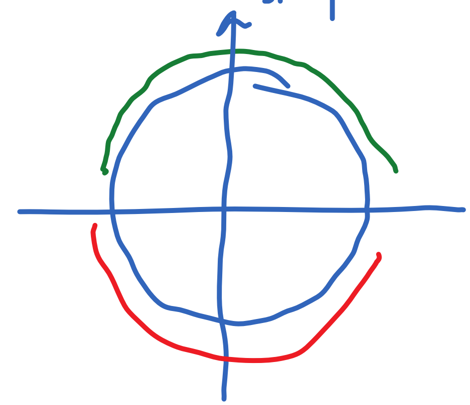
$\omega_0 = 1$

$u = a\cos\varphi \;,\; \dot{u} = -a\omega_0 \sin\varphi = -a\sin\varphi$

$$\begin{cases} a' = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (-a\sin\varphi)\,|a\sin\varphi|\,\sin\varphi\, d\varphi \\ a\beta' = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \underbrace{(-a\sin\varphi)\,|a\sin\varphi|\,\cos\varphi}_{\text{تابع فرد}}\, d\varphi = 0 \end{cases}$$

$-a\sin(-\varphi)\,|a\sin(-\varphi)|\,\cos(-\varphi) = a\sin\varphi\,|a\sin(\varphi)|\cos\varphi$

$$a' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (-a\sin\varphi)\,|a\sin\varphi|\,\sin\varphi\, d\varphi$$



$$|\sin\varphi| = \sin\varphi \quad , \quad 0<\varphi<\pi$$

$$|\sin\varphi| = -\sin\varphi \quad , \quad \pi<\varphi<2\pi$$

$$\Rightarrow a' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (-a^2\sin^3\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} a^2\sin^3\varphi\, d\varphi = \frac{-4a^2}{3\pi}$$

$$a' = \frac{-4a^2}{3\pi} \longrightarrow \frac{da}{a^2} = \frac{-4}{3\pi}\, dT_1 \longrightarrow \frac{-1}{a} = \frac{-4}{3\pi} T_1 + C$$

$$@\, t=0,\ a=a_0 \longrightarrow \quad -\frac{1}{a_0} = C \Longrightarrow \frac{-1}{a} = \frac{-4\varepsilon t}{3\pi} - \frac{1}{a_0}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\frac{1}{a_0} + \frac{4\varepsilon t}{3\pi}} = \frac{a_0}{1 + \frac{4a_0\varepsilon t}{3\pi}}$$

algebric decay

$\omega_0 = 1$

$$\beta' = 0 \longrightarrow \beta = \beta_0 \longrightarrow u = \frac{a_0}{1 + \frac{4a_0\varepsilon t}{3\pi}} \cos(\omega_0 t + \beta_0)$$

نوسان با دمپینگ تحت تاثیر نیروی غیرخطی [illegible]

EX. $\ddot{u} + u + \varepsilon\mu\,\mathrm{sgn}(\dot{u}) = 0$

Columb Damping
Friction

$$\varepsilon\mu\,\mathrm{sgn}(\dot{u}) = \varepsilon\mu \quad \text{if } \dot{u} > 0$$

$$= -\varepsilon\mu \quad \text{if } \dot{u} < 0$$

$$a' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu\,\mathrm{sgn}(-a\sin\varphi)\sin\varphi\, d\varphi = \frac{-2\mu}{\pi}$$

$$a\beta' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\mu\,\mathrm{sgn}(-a\sin\varphi)\cos\varphi}_{\text{تابع فرد}}\, d\varphi = 0$$

$$a' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu \, \mathrm{sgn}(-a\sin\varphi)\sin\varphi \, d\varphi =$$

$$0<\varphi<\pi \,, \quad \mathrm{sgn}(-a\sin\varphi) = -1$$

$$\pi<\varphi<2\pi \,, \quad \mathrm{sgn}(-a\sin\varphi) = +1$$

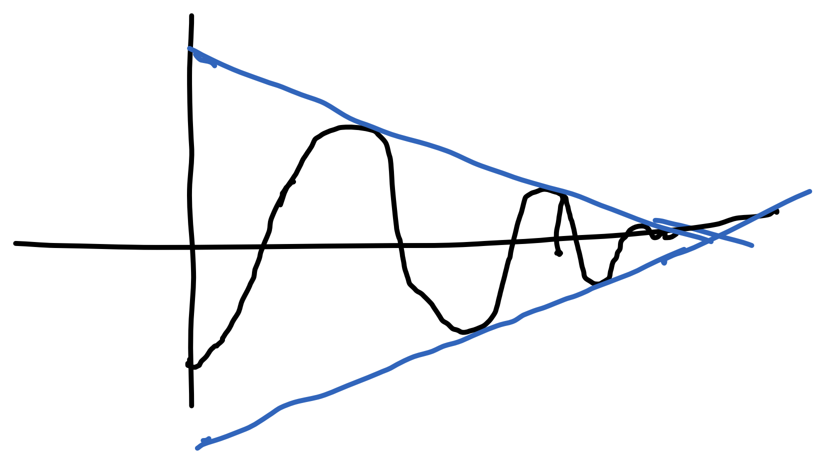
$$a' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} -\mu \sin\varphi \, d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} \mu \sin\varphi \, d\varphi = \frac{-2\mu}{\pi}$$

$$a' = -\frac{2\mu}{\pi} \Rightarrow a = a_0 - \frac{2\mu\varepsilon t}{\pi}$$

$$a\beta' = 0 \longrightarrow \beta = \beta_0$$

$$\Rightarrow u = \underbrace{\left(a_0 - \frac{2\mu\varepsilon t}{\pi}\right)} \cos(t + \beta_0)$$

دامنه بصورت خطی کاهش می یابد.



اگر $f(u,\dot{u})$ بصورت $f(\dot{u})$ باشد یعنی فقط تابعی از $\dot{u}$ باشد

می توان گفت که فرکانس تغییر نمی کند $\longleftarrow$ $a\beta' = 0$