



دانشگاه سمنان

ارتعاشات غیر خطی

Perturbation Theory Averaging theory for weakly nonlinear System

دکتر امین نیکوبین

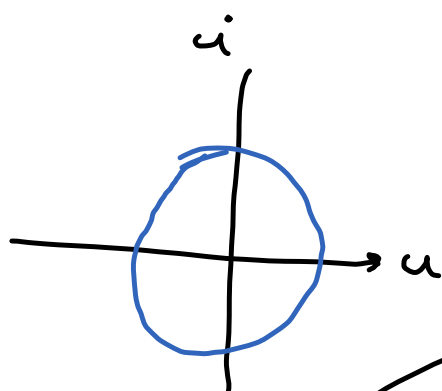
دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

$$\ddot{u} + u + \varepsilon f(u, \dot{u}) = 0 \quad \textcircled{I}, \quad \varepsilon \ll 1$$

odd nonlinearity

if $\varepsilon = 0 \rightarrow \ddot{u} + u = 0 \rightarrow$ simple harmonic oscillator

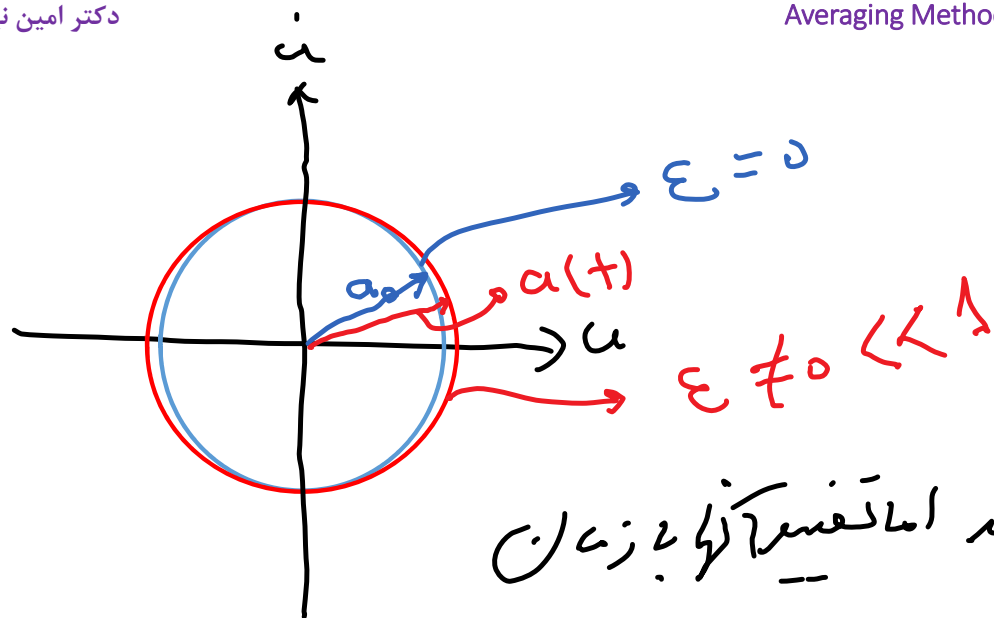


$$u = a \cos(t + \beta)$$

$$\dot{u} = -a \sin(t + \beta)$$

$$\text{Period time, } T = 2\pi$$

اگر ε Small Perturb. اعمال کنیم، انتظار داریم که زمان پریود نزدیک 2π باقی بماند و شکل پاسخ در صغیر فاز هم نزدیک دایره باقی خواهد ماند



$$T \approx 2\pi$$

$$u = a \cos(t + \beta)$$

$\epsilon \neq 0$ را انتظار داریم که a و β با زمان تغییر کنند اما تغییر آنرا با زمان خیلی آهسته خواهد بود

$$\dot{a} = O(\epsilon)$$

$$\dot{\beta} = O(\epsilon)$$

$\rightarrow a, \beta$ are slowly varying variables



با انتخاب متغیرهای

$$\begin{cases} x = u \\ y = \dot{u} \end{cases}$$

①

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon f(x, y) \end{cases} \quad \text{②}$$

اگر α و β ثابت باشند، $(\varepsilon = 0)$
 $x = \alpha \cos(t + \beta)$
 $y = -\alpha \sin(t + \beta)$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x(t) = \alpha(t) \cos(t + \beta(t)) \\ y(t) = -\alpha(t) \sin(t + \beta(t)) + O(\varepsilon) \end{cases}$$

$$y = \dot{x} = \dot{\alpha} \cos(t + \beta) - \alpha \dot{\beta} \sin(t + \beta) \quad *$$

$$\textcircled{2} \rightarrow \alpha(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \quad , \quad t\beta(t + \beta) = \frac{-y(t)}{x(t)}$$

می‌فصلیم این معادله را: معادله ای بر حسب β تبدیل کنیم

$$a^2 = x^2 + y^2 \rightarrow a \dot{a} = x \dot{x} + y \dot{y} = x \dot{y} + y (-x - \varepsilon f) \Rightarrow$$

$$a \dot{a} = -\varepsilon f y \Rightarrow \boxed{\dot{a} = \frac{-\varepsilon f y}{a}}$$

$$t + \beta = t y^{-1} \left(-\frac{y}{x} \right) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} 1 + \dot{\beta} = \frac{-1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \frac{\dot{y} x - x \dot{y}}{x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\beta} = \frac{\varepsilon f x}{a^2}}$$



$$\dot{a} = \frac{-\varepsilon f y}{a} = \frac{-\varepsilon f (-a \sin(t+\beta))}{a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{a} = +\varepsilon f \sin(t+\beta) \\ \dot{\beta} = \frac{\varepsilon f \cos(t+\beta)}{a} \end{cases}$$

با استفاده از لایبونی در بازه $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\int_0^{2\pi} \dot{a} dt = \int_0^{2\pi} \varepsilon f \sin(t+\beta) dt$$

به سبب یکدسته نوسانات a متغی نمی باشد، a در طول زمان $0 \leq t \leq 2\pi$ تقریباً ثابت است.

$$2\pi \dot{a} = \varepsilon \int_0^{2\pi} f \sin(t+\beta) dt$$



$$\Rightarrow \dot{a} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \sin(t+\beta) dt \rightarrow d\varphi$$

دوره تناوب $\sin(t+\beta)$ ، 2π است در حالی که برپایه a چلی آهسته است.
 - خود این متغیرات که کفو تغییر می کنند، در یک اسکال زمانی سریع (است)
 نسبت است اما در یک اسکال زمانی آهسته (یک سال) متغیر است

$$\varphi = t + \beta \rightarrow d\varphi = dt + \beta' dt = dt \quad \text{و چون } \beta' = 0 \quad (4)$$

پس نهایتاً داریم

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi) \sin\varphi \, d\varphi \\ a\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi) \cos\varphi \, d\varphi \end{cases}$$

در صفحه بردش مثل (یعنی سوی فوریه) یک ε افراز بر مازد، دلیل آن
اینست که در بردش مثل صنف نیست و اگر بود در اینجا نیست +

$$\text{EX. } \ddot{u} + \omega_0 u + \varepsilon \alpha u^3 = 0, \quad f(u) = \varepsilon \alpha u^3$$

$$\begin{cases} u = a \cos \varphi \\ \dot{u} = -a \omega_0 \sin \varphi \end{cases}$$

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon \alpha}{2\pi \omega_0} \int_0^{2\pi} a^3 \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi = 0$$

$$a \beta = \frac{\varepsilon \alpha}{2\pi \omega_0} \int_0^{2\pi} a^3 \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{3\varepsilon \alpha a^3}{8\omega_0}$$



اوش رید

$$\begin{cases} \ddot{a} = + \frac{\varepsilon f \sin \varphi}{\omega_0} \\ a \dot{\beta} = \frac{\varepsilon f \cos \varphi}{\omega_0} \end{cases}$$

ترم‌های تندی

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon \alpha a^3 \cos^3 \varphi \sin \varphi}{\omega_0} = \frac{\varepsilon \alpha a^3}{8\omega_0} (2 \sin 2\varphi + \sin 4\varphi) = 0$$

$$a \dot{\beta} = \frac{\varepsilon \alpha a^3 \cos^3 \varphi \cos \varphi}{\omega_0} = \frac{\varepsilon \alpha a^3}{8\omega_0} (4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi + 3)$$

ترم‌های تندی

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{a} = 0 \\ a \dot{\beta} = \frac{3 \alpha \varepsilon a^3}{8\omega_0} \end{cases}$$

اگر درجه ۲ و ۴ - ۵ اندام یکسره صاف شوند

ارتعاشات غیر خطی، Averaging Method

دکتر امین نیکوبین