

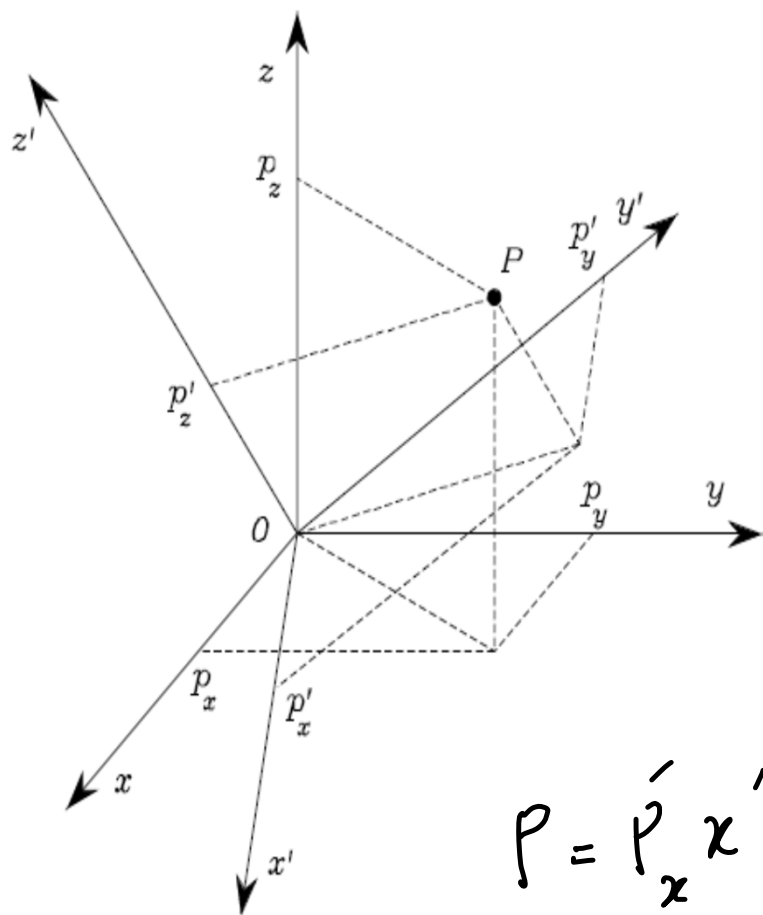


رباتیک پیشرفته سینماتیک

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir



بیان نقطه در فریم اصلی

$$P = p_x x + p_y y + p_z z$$

نقطه در فریم چرخش

$$P = p'_x x' + p'_y y' + p'_z z'$$

$$P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix}$$

$$P = p'_x x' + p'_y y' + p'_z z' = \underbrace{\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix}}_R \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{P = R P'}$$



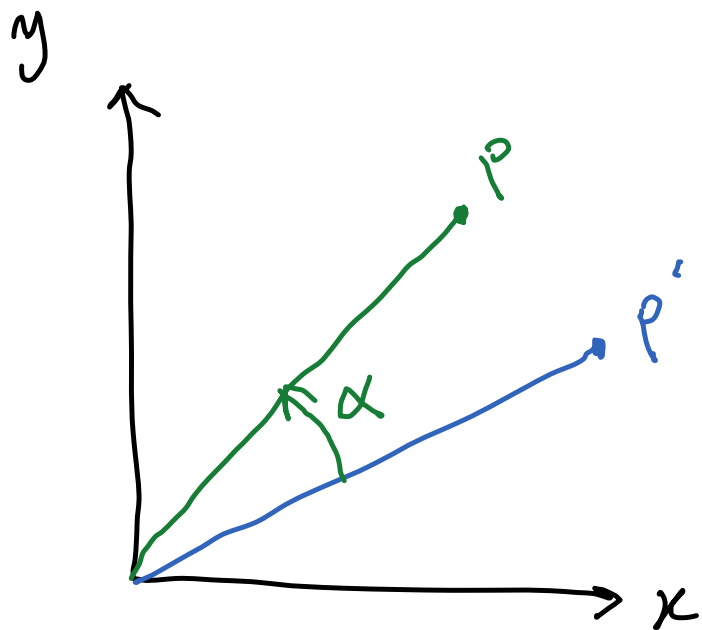
$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} \quad , \quad P = R P'$$

$$\Rightarrow P' = R^{-1} P \Rightarrow P' = R^T P$$

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad P = R_z(\alpha) P'$$

تفسیر دیگر از ماتریس دوران

$$P = R_z P'$$



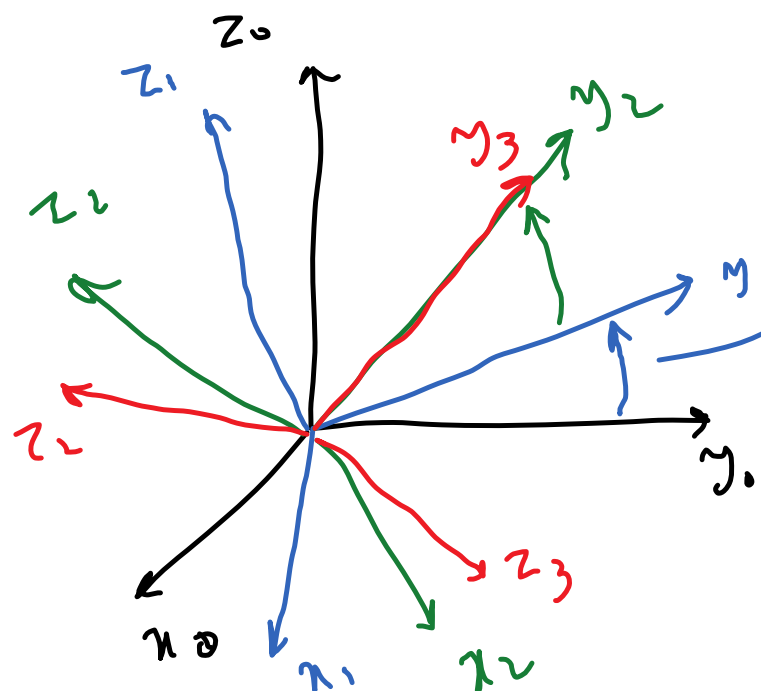
$$R = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix}$$



$$\begin{array}{l} \begin{array}{l} R_1^0 \curvearrowright O_0 - x_0, y_0, z_0 \rightarrow P^0 \\ R_2^1 \curvearrowright O_1 - x_1, y_1, z_1 \rightarrow P^1 \\ \rightarrow P^2 \end{array} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} R_1^0 \curvearrowright O_0 - x_0, y_0, z_0 \rightarrow P^0 \\ R_2^1 \curvearrowright O_1 - x_1, y_1, z_1 \rightarrow P^1 \\ \rightarrow P^2 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow P^0 = R_1^0 P^1 \\ \rightarrow P^1 = R_2^1 P^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow P^0 = R_1^0 P^1 = R_1^0 R_2^1 P^2 \\ \Rightarrow P^0 = R_2^0 P^2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \Rightarrow P^0 = R_1^0 P^1 = R_1^0 R_2^1 P^2 \\ \Rightarrow P^0 = R_2^0 P^2 \end{array}} \right) \Rightarrow R_2^0 = R_1^0 R_2^1$$

برای پیدا کردن تبدیل



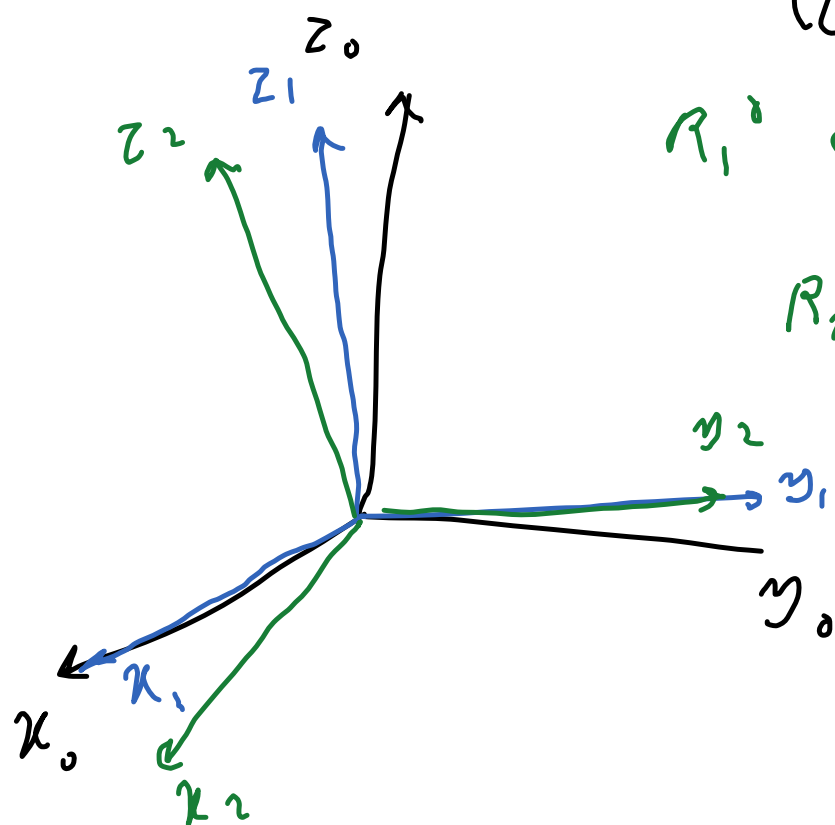
محورهای
فریم 1 نسبت به کاه می چرخد

فریم 2 نسبت به محورهای 1 می چرخد

فریم 3 نسبت به y_1 می چرخد

$$R_1^0 \quad R_2^1 \quad R_3^2$$

دران نسبت، معرطای مشترک (جاری)



دران حول محور z_0 $\leftarrow R_1^0, x_1, y_1, z_1$

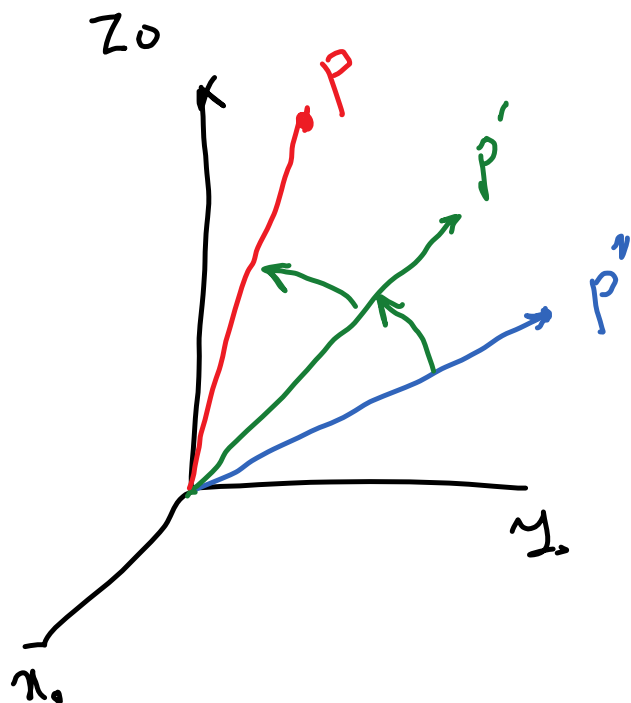
دران حول محور y_1 $\leftarrow R_2^1, x_2, y_2, z_2$

دران حول محور z_2 $\leftarrow R_3^2, x_3, y_3, z_3$

R_1^0, R_2^1, R_3^2



دوران نسبت به محورها ثابت (Fixed Frame)



دوران حول یک محور ثابت
(مثلاً z_0)

$$P' = R_1 P''$$

کم از حول یک محور ثابت دیگر دوران می دهیم

$$P = R_2 P'$$

$$\Rightarrow P = R_2 P' = R_2 R_1 P''$$

مانند سری دوران متوالی حول محورها ثابت پیش و عقب می شوند

a) $R_z(90) R_y(90)$

b) $R_y(90) R_z(90)$

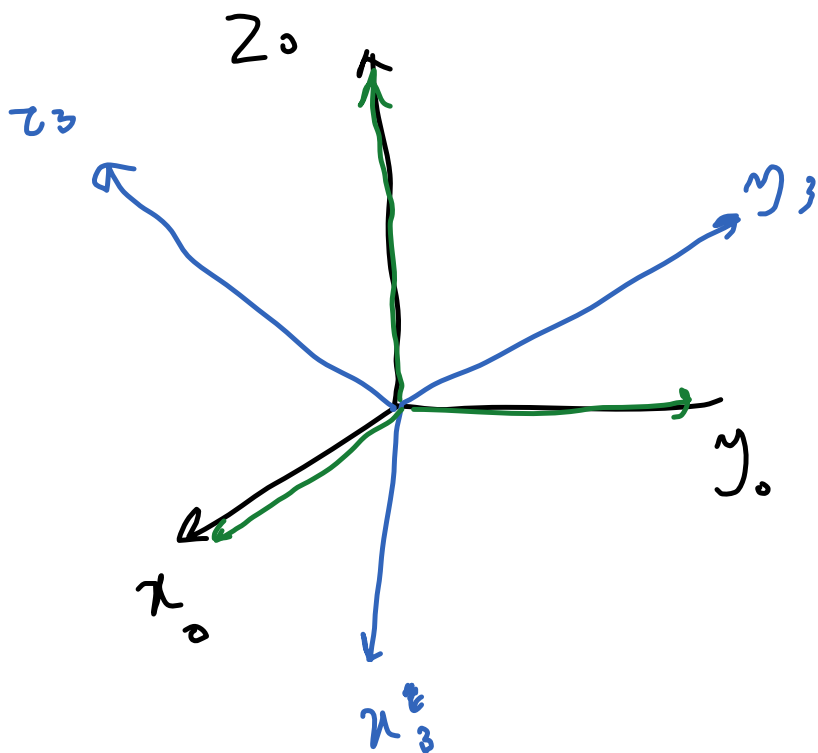


$$R(\Phi) = R_z(\varphi) R_y(\theta) R_z(\gamma) = R_3^0$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \gamma \end{bmatrix},$$

$$R(\Phi) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & - & . \\ - & - & . \end{bmatrix}$$



$$R_3^0 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

معلوم

زویه‌های اولیه z, y, z ؟

ϕ, θ, ψ ؟

مجهول



$$R(\phi) = R_z(\varphi)R_{y'}(\vartheta)R_{z''}(\psi)$$

$$= \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta \\ s_\varphi c_\vartheta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta \\ -s_\vartheta c_\psi & s_\vartheta s_\psi & c_\vartheta \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\frac{r_{23}}{r_{13}} = \frac{s_\varphi s_\vartheta}{c_\varphi s_\vartheta} = \tan \varphi \Rightarrow \varphi = \tan^{-1} \frac{r_{23}}{r_{13}}$$

$$\frac{r_{32}}{-r_{31}} = \tan \vartheta \Rightarrow \vartheta = \tan^{-1} \frac{r_{32}}{-r_{31}}$$

$$\vartheta = \text{atan2}(r_{32}, -r_{31})$$

$$r_{31} = -s_\vartheta c_\vartheta$$

$$r_{32} = s_\vartheta s_\vartheta$$

$$-r_{31} = s_\vartheta c_\vartheta$$

$$r_{32} = s_\vartheta s_\vartheta$$



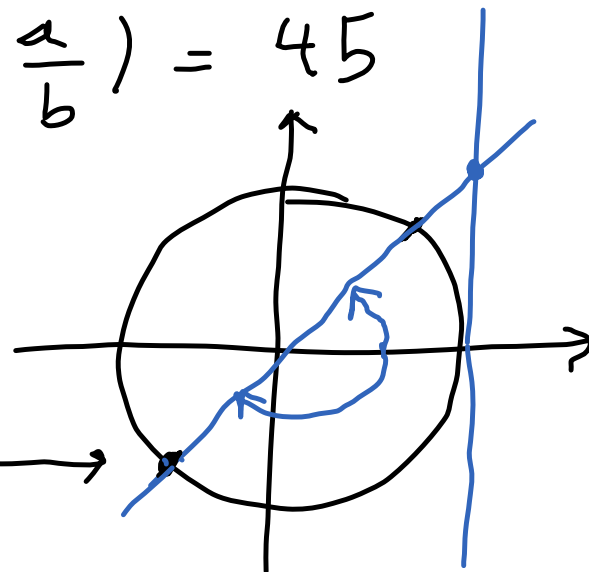
$$a = 1$$
$$b = 1$$

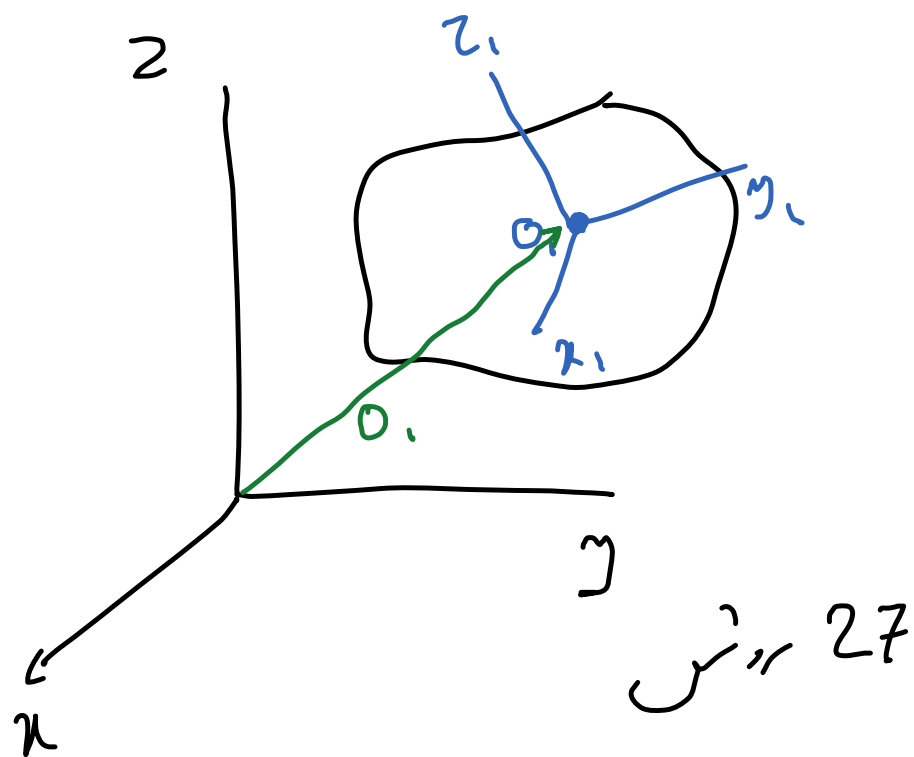
$$\theta = \tan^{-1} \frac{a}{b} = \tan^{-1} 1 = 45$$

$$a = -1 \rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{a}{b} = \tan^{-1} \left(\frac{-1}{-1} \right) = 45$$
$$b = -1$$

$$\hookrightarrow \text{atan2}(-1, -1) = -135$$

$$\text{atan2}(a, b)$$



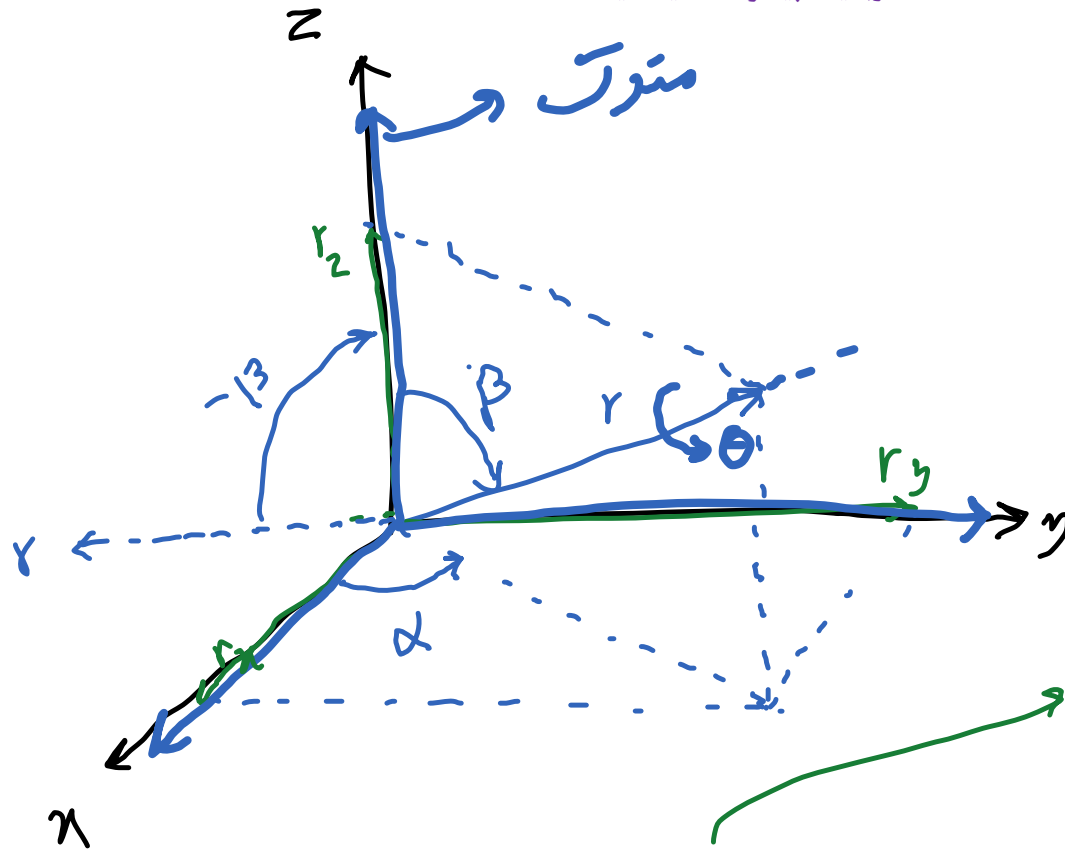


$$O_1 = \begin{bmatrix} o_{1x} \\ o_{1y} \\ o_{1z} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}$$

زادگی اصولی



برای r روی صفحه xy می افتد

$$R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\theta) R_y(-\beta) R_z(-\alpha)$$



رباتیک پیشرفته، سینماتیک

دکتر امین نیکوبین