



رباتیک پیشرفته

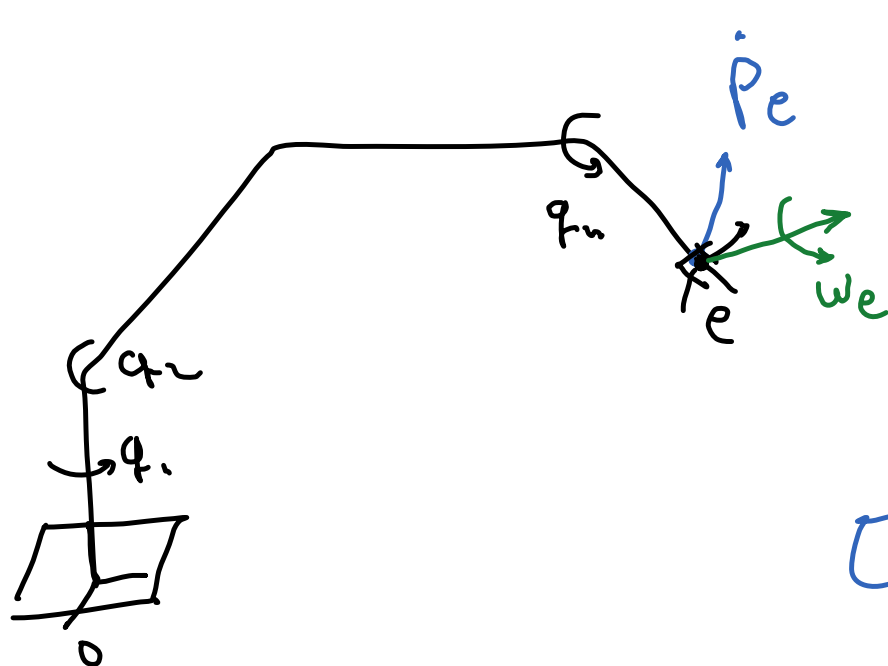
سینماتیک دیفرانسیلی

ژاکوبین هندسی

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir



$$T_e^0 = \begin{bmatrix} R_e^0 & p_e \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

p_e بردار پوزیشن
 R_e ماتریس چرخش

$$p_e = K(q) \rightarrow$$

در سینماتیک دینامیکی می‌فهمیم رابطه بین سرعت مطلق و زاویه ابزار انتهایی ($\dot{p}_e$)
 رابطه سرعت به متغیرهای مفصل ($\dot{q}$) محاسبه می‌شود



$$\begin{cases} \dot{p}_e = J_p \dot{q} \\ \omega_e = J_o \dot{q} \end{cases}, \quad v_e = \begin{bmatrix} \dot{p}_e \\ \omega_e \end{bmatrix}, \quad v_e \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$$

$$\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \quad p_e = K(q) \rightarrow \dot{p}_e = \left(\frac{\partial K}{\partial q} \right) \dot{q}$$

$$K \in \mathbb{R}^{3 \times 1}, \quad q \in \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow J_p \in \mathbb{R}^{3 \times n}$$

$$\omega_e = h(q) \rightarrow J_o \in \mathbb{R}^{3 \times n}$$

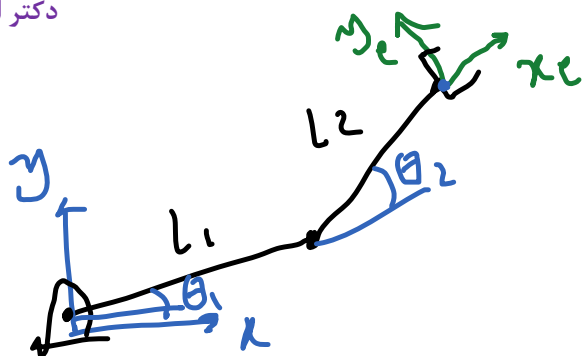
$$v_e = J \dot{q}, \quad J \in \mathbb{R}^{6 \times n}$$

6×1 $n \times 1$

J : Geometric Jacobian

$$J = \begin{bmatrix} J_p \\ J_v \end{bmatrix}$$

J ماتریس ژاکوبین سرعت e را، سرعت
مفصل مرتبه می‌گیرد.



$$P_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 C_1 + L_2 C_{12} \\ L_1 S_1 + L_2 S_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_e = K(\theta_1, \theta_2)$$

$$\dot{P}_e = \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{z}_e \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= -L_1 \dot{\theta}_1 S_1 - L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) S_{12} \\ \dot{y}_e &= L_1 \dot{\theta}_1 C_1 + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) C_{12} \\ \dot{z}_e &= 0 \end{aligned}$$

$$\omega_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_e = -L_1 \dot{\theta}_1 S_1 - L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) S_{12} \\ \dot{y}_e = L_1 \dot{\theta}_1 C_1 + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) C_{12} \\ \dot{z}_e = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{z}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 S_1 - L_2 S_{12} & -L_2 S_{12} \\ L_1 C_1 + L_2 C_{12} & L_2 C_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{p}_e = J_p \dot{q}, \quad J_p \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$



$$\omega_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \omega_e = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{J_0} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\omega_e = J_0 \dot{q}$$

$$J = \begin{bmatrix} J_p \\ J_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 S_1 - L_2 S_{12} & -L_2 S_{12} \\ L_1 C_1 + L_2 C_{12} & L_2 C_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J \in \mathbb{R}^{6 \times 2}$$



مشتق ماندیس دوران $R(t) \rightarrow \dot{R}(t) = ?$

$$R R^T = I \rightarrow \dot{R} R^T + R \dot{R}^T = 0$$

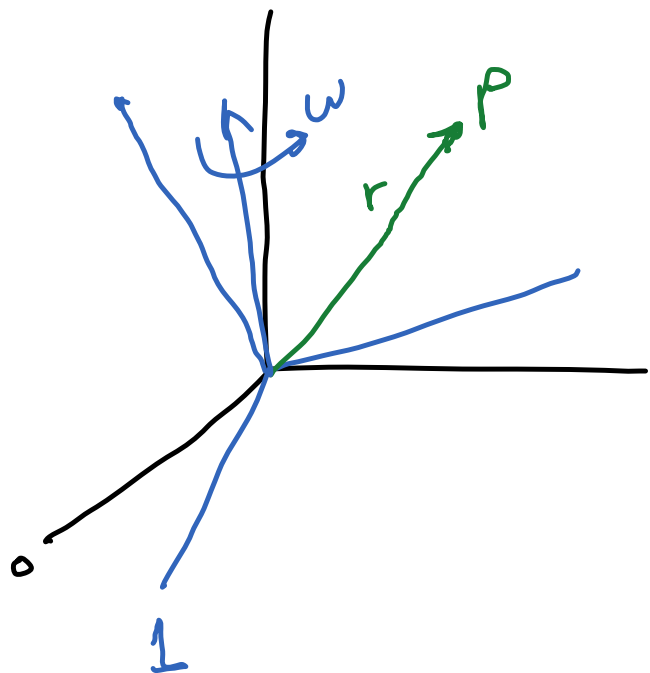
حفر میز لاور $\dot{R} R^T = S(t) \rightarrow S^T = R \dot{R}^T$

کدام ماندیس بلونمکان $S + S^T = 0 \rightarrow S = -S^T$

$\dot{R} = S R \rightarrow \dot{R}(t) = S(t) R(t)$

$$S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$P = R P'$$



$\Rightarrow$

موقعیت P در فریم 1

P^0 $\sim \sim \sim$

$$P^0 = R P', \quad r^0 = R_1 r'$$

$$\rightarrow \dot{r}^0 = \dot{R} r' + R \dot{r}'$$

$$\dot{r} = \omega \times r = \dot{R} r$$

$$\dot{R} = \omega \times$$



بدانچه است P' را در نظر بگیریم

$$P(t) = R(t) P'$$
$$\rightarrow \dot{P} = \dot{R} P' + R \dot{P}' \Rightarrow \dot{P}(t) = R(t) \dot{P}'$$

$$\Rightarrow \dot{P}(t) = S(t) R(t) P' \quad (1)$$

فرض کنید $\omega(t)$ سرعت زاویه‌ای جسم $R(t)$ نسبت به فریم مرجع باشد

$$\dot{P} = \omega \times P = \omega \times R P' \quad (2)$$

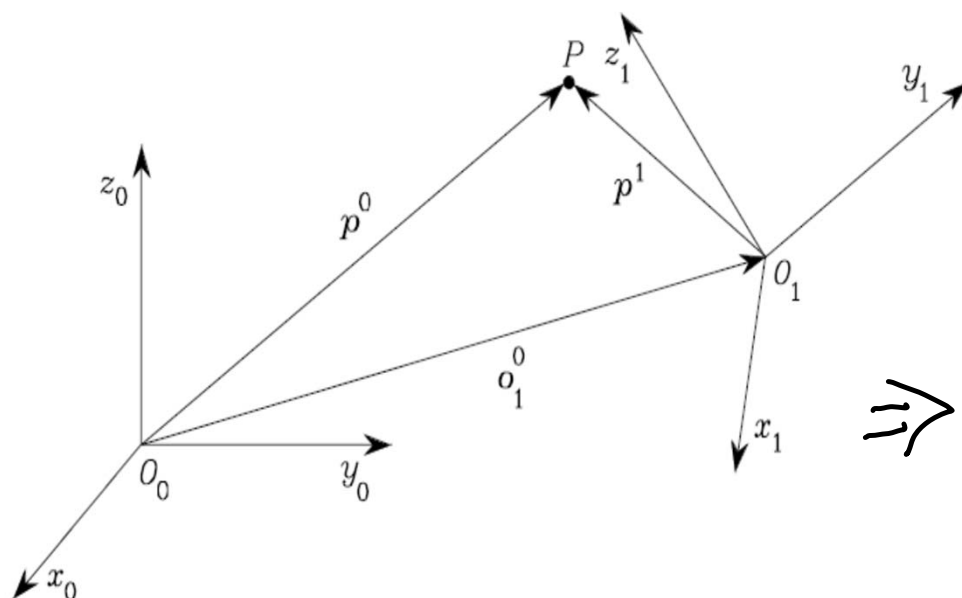
با مقایسه (1) و (2)

$$S R = \omega \times R \Rightarrow S = \omega \times$$

$$\Rightarrow S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{R} = S R = \omega \times R$$

2 Kinematics

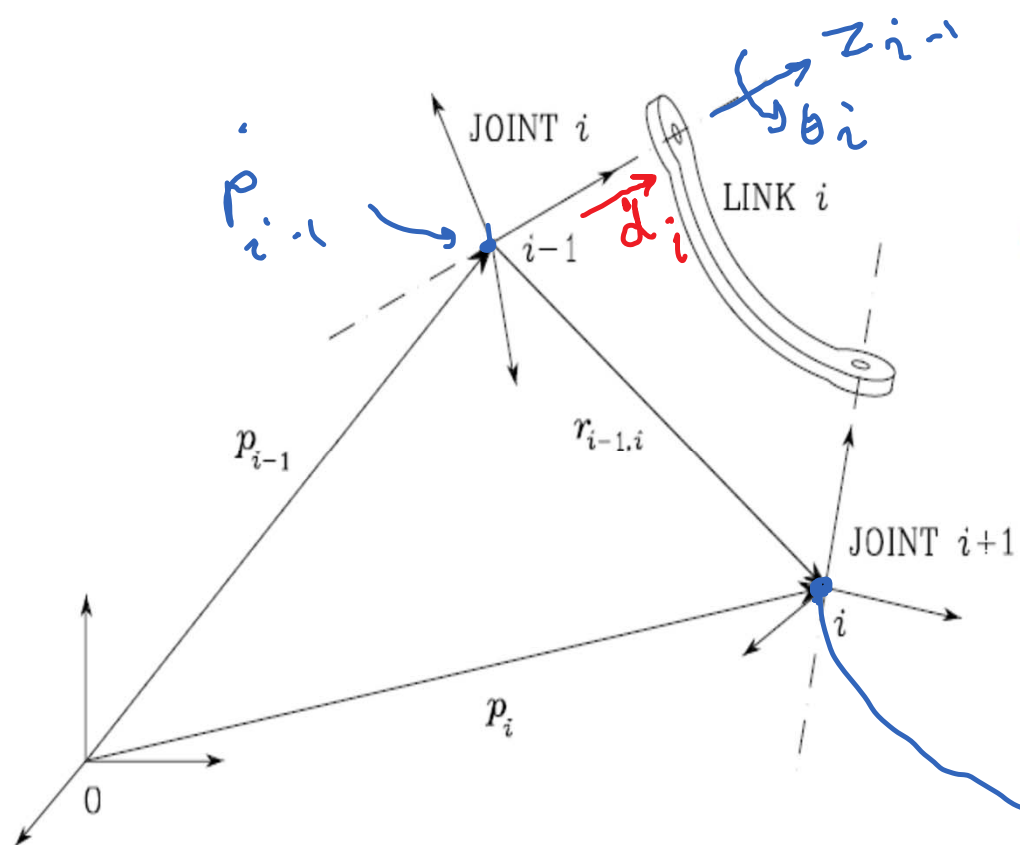


$$p^0 = o_1^0 + R_1^0 p^1$$

$$\dot{p}^0 = \dot{o}_1^0 + R_1^0 \dot{p}^1 + \omega \times R_1^0 p^1$$

$$\Rightarrow \dot{p}^0 = \dot{o}_1^0 + R_1^0 \dot{p}^1 + \omega \times r_1^0$$

سریست لنگرها
مفصل گسسته



$$\omega_i = \omega_{i-1}$$

$$\dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + \underline{\dot{d}_i} z_{i-1} + \omega_i \times r_{i-1,i},$$

مفصل دورانی

$$\omega_i^0 = \omega_{i-1}^0 + \dot{\theta}_i z_{i-1}^0$$

$$\dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + \omega_i \times r_{i-1,i},$$

$$\gamma_{i-1,i}$$

In summary, the Jacobian in (3.5) can be partitioned into the (3×1) column vectors J_{Pi} and J_{Oi} as

$$J = \begin{bmatrix} J_{P1} & \dots & J_{Pn} \\ J_{O1} & & J_{On} \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

where

$$\begin{bmatrix} J_{Pi} \\ J_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{for a } \textit{prismatic} \text{ joint} \\ \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p_e - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} & \text{for a } \textit{revolute} \text{ joint.} \end{cases} \quad (3.30)$$

z_{i-1} is given by the third column of the rotation matrix R_{i-1}^0 , i.e.,

$$z_{i-1} = \underbrace{R_1^0(q_1) \dots R_{i-1}^{i-2}(q_{i-1})}_{R_{i-1}^0} z_0 \quad (3) \quad z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{p}_e = \underbrace{A_1^0(q_1) \dots A_n^{n-1}(q_n)}_{T_n^0} \tilde{p}_0 \quad (3.32)$$

where $\tilde{p}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ allows the selection of the fourth column.

$$\tilde{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

T_n^0 بردار چهارم می‌باشد

$$\tilde{p}_{i-1} = \underbrace{A_1^0(q_1) \dots A_{i-1}^{i-2}(q_{i-1})}_{A_{i-1}^0} \tilde{p}_0.$$



رباتیک پیشرفته، سینماتیک دیفرانسیلی

دکتر امین نیکوبین



رباتیک پیشرفته، سینماتیک دیفرانسیلی

دکتر امین نیکوبین



رباتیک پیشرفته، سینماتیک دیفرانسیلی

دکتر امین نیکوبین



رباتیک پیشرفته، سینماتیک دیفرانسیلی

دکتر امین نیکوبین