



دینامیک پیشرفته

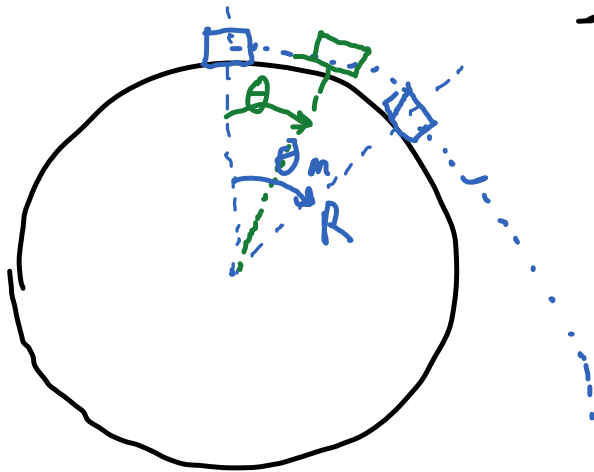
دینامیک ذرات

دکتر امین نیکوبین

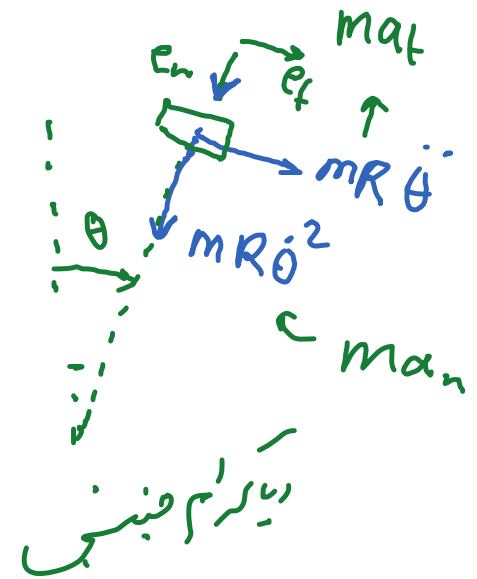
دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

مثال: ذره‌ای به جرم m روی سطح یک کُرّه به شعاع R می‌لغزد و به پایین حرکت می‌کند. حرکت از زاویه $\theta = 0$ با سرعت اولیه $\dot{\theta} = 0$ می‌باشد. با استفاده از معادلات زاویه θ_m که ذره در سطح کُرّه می‌ماند را حساب کنید.



≡





$$\begin{cases} \sum F_n = ma_n \Rightarrow -N + mg \cos \theta = mR \dot{\theta}^2 \\ \sum F_t = ma_t \Rightarrow \boxed{mg \sin \theta = mR \ddot{\theta}} \end{cases}$$

طدار حرکت در روی کره

$$\rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{R} \sin \theta$$

در اصطه حواسن، $N=0$

$$\cancel{mR \dot{\theta}_m^2} = \cancel{mg} \cos \theta_m$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta}_m^2 = \frac{g}{R} \cos \theta_m}$$



$$a ds = v dv \longrightarrow \ddot{\theta} d\theta = \dot{\theta} d\dot{\theta}$$

$$\rightarrow \int_0^{\theta_m} \ddot{\theta} d\theta = \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}_m} \dot{\theta} d\dot{\theta} \Rightarrow \frac{g}{R} \int_0^{\theta_m} \sin\theta d\theta = \left[\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right]_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}_m}$$

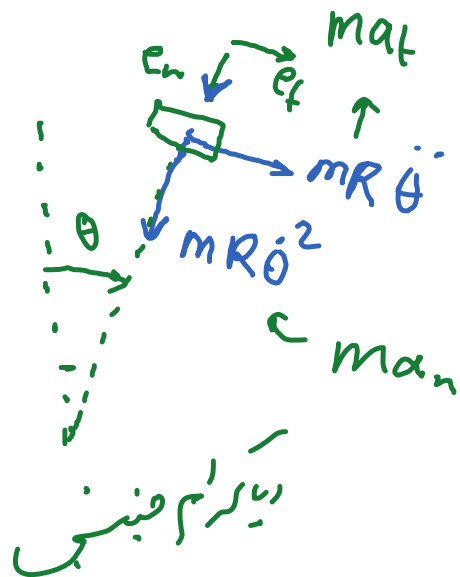
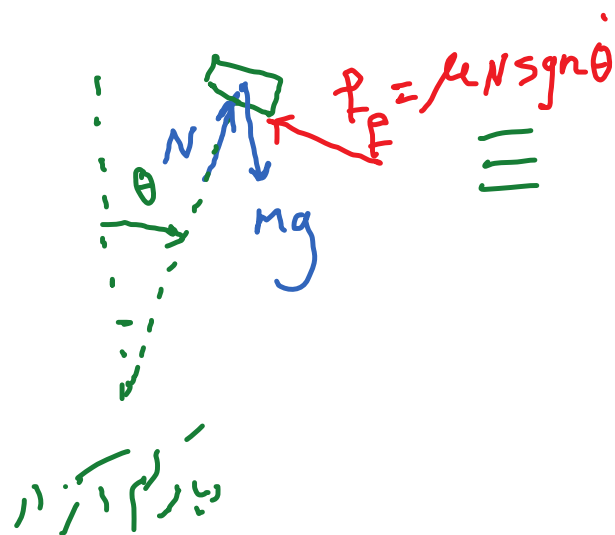
$$\Rightarrow \frac{g}{R} [-\cos\theta]_0^{\theta_m} = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_m^2 - \dot{\theta}_0^2)$$

$$\Rightarrow \frac{g}{R} (-\cos\theta_m + 1) = \frac{1}{2} \frac{g}{R} \cos\theta_m - \frac{1}{2} \dot{\theta}_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \frac{g}{R} \cos\theta_m = \frac{1}{2} \dot{\theta}_0^2 + \frac{g}{R} \Rightarrow \boxed{\cos\theta_m = \frac{2}{3} + \frac{R \dot{\theta}_0^2}{3g}}$$

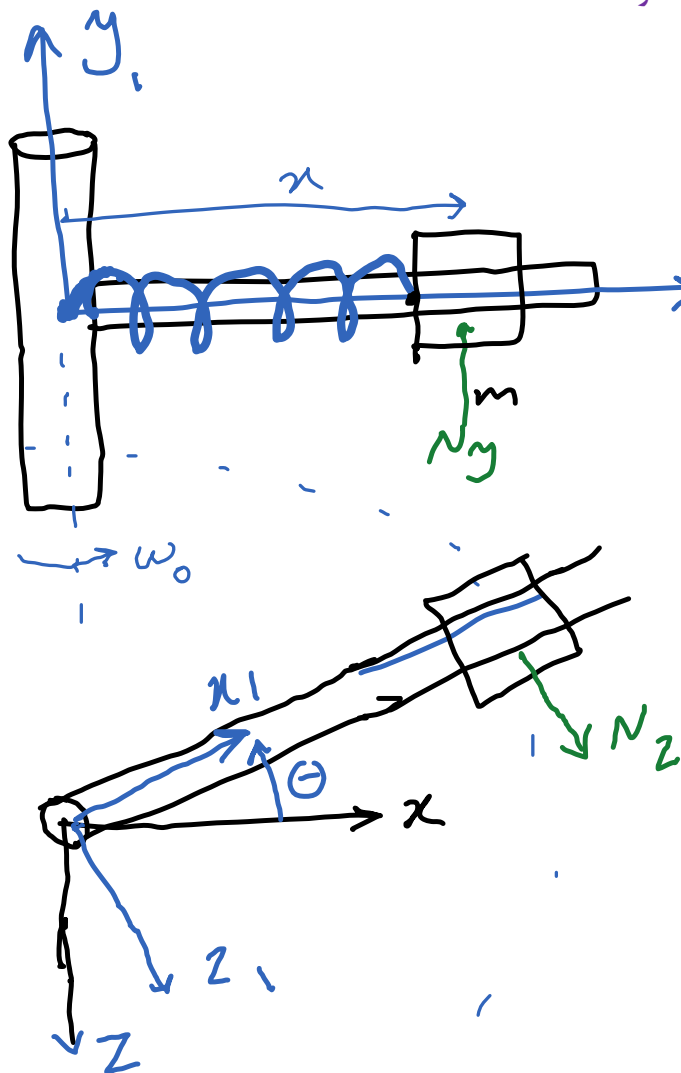


بار در نقطه رتسن (اصطلاح)



$$\begin{cases} -N + mg \cos \theta = mR \dot{\theta}^2 \rightarrow N = mg \cos \theta - mR \dot{\theta}^2 \\ \mu N \operatorname{sgn} \dot{\theta} + mg \sin \theta = mR \ddot{\theta} \Rightarrow -\mu (mg \cos \theta - mR \dot{\theta}^2) \operatorname{sgn} \dot{\theta} + mg \sin \theta = mR \ddot{\theta} \end{cases}$$

ode45



مثیل؟
سخت آ شکل؛ سرعت زاویه‌ای ω

حول محور عمودی دوران می‌کند. جرم m
با اصطکاک خشک روی میله حرکت می‌کند.
جرم با فنری: سختی K متصل شده است.
مدار حرکت جرم m را برابر است آورد.
طول اولیه فنر L

$$r_1 = 0$$

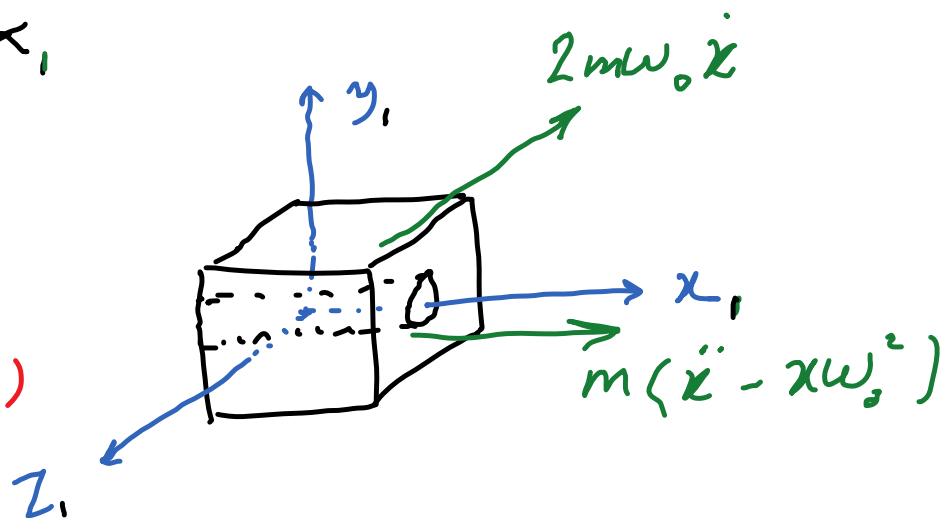
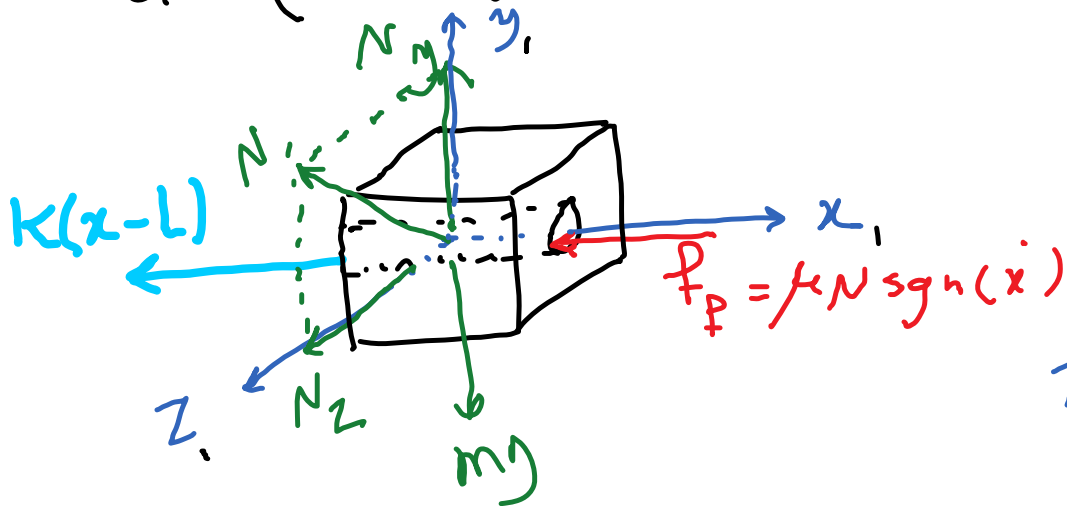
$$\dot{r} = x \dot{e}_1, \quad \ddot{r} = x \ddot{e}_1, \quad \dot{v} = \dot{x} \dot{e}_1$$

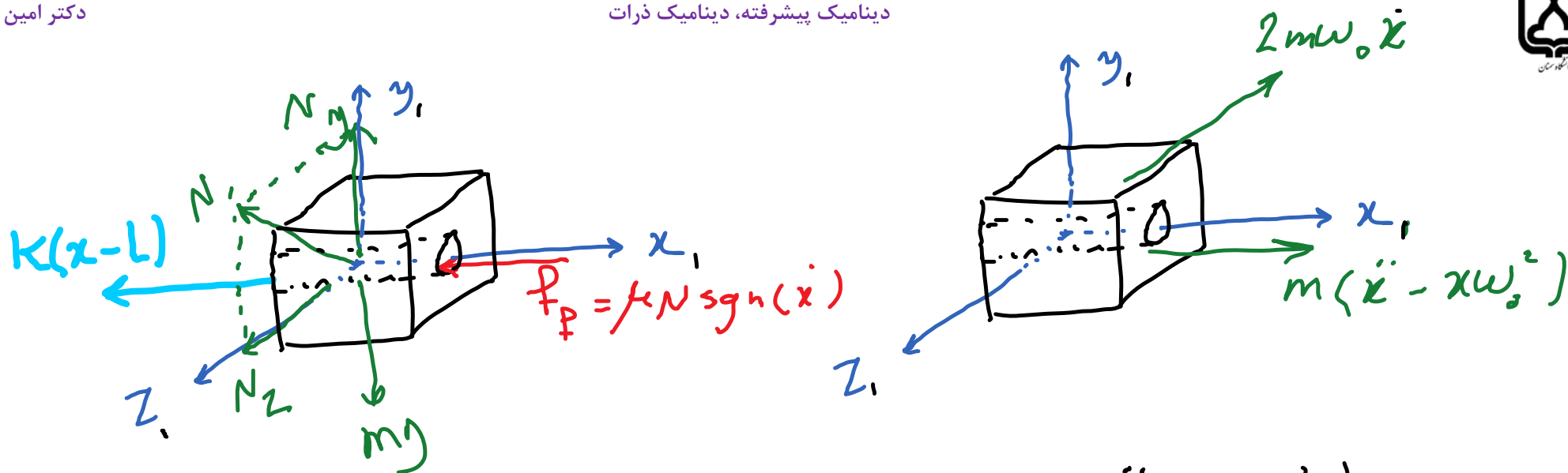
$$\omega = \omega_0 \hat{z}, \quad \dot{\omega} = 0$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

$$2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = -2\omega_0 \dot{x} \mathbf{k}_1, \quad \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega_0^2 x \mathbf{z}_1$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{x} - \omega_0^2 x) \mathbf{z}_1 - 2\omega_0 \dot{x} \mathbf{k}_1$$





$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow -K(x-L) - \mu N \text{sgn}(\dot{x}) = m(\ddot{x} - x\omega_0^2)$$

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow N_y - mg = 0 \Rightarrow N_y = mg$$

$$\sum F_z = ma_z \Rightarrow N_z = -2m\omega_0\dot{x} \Rightarrow N_z = -2m\omega_0\dot{x}$$

$$N = \sqrt{N_y^2 + N_z^2} = \sqrt{(mg)^2 + (2m\omega_0\dot{x})^2}$$



$$-k(x-L) - \mu N \operatorname{sgn}(\dot{x}) = m(\ddot{x} - x\omega_0^2)$$

$$\Rightarrow -k(x-L) - \mu \sqrt{(mg)^2 + (2m\omega_0 \dot{x})^2} \operatorname{sgn}(\dot{x}) = m(\ddot{x} - x\omega_0^2)$$

$$\begin{cases} x = x_1 \\ \dot{x} = \dot{x}_1 \end{cases} \Rightarrow$$

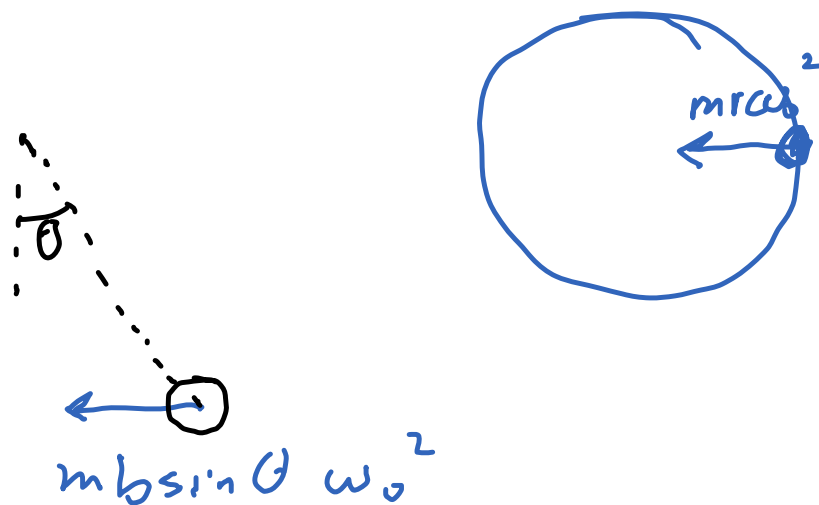
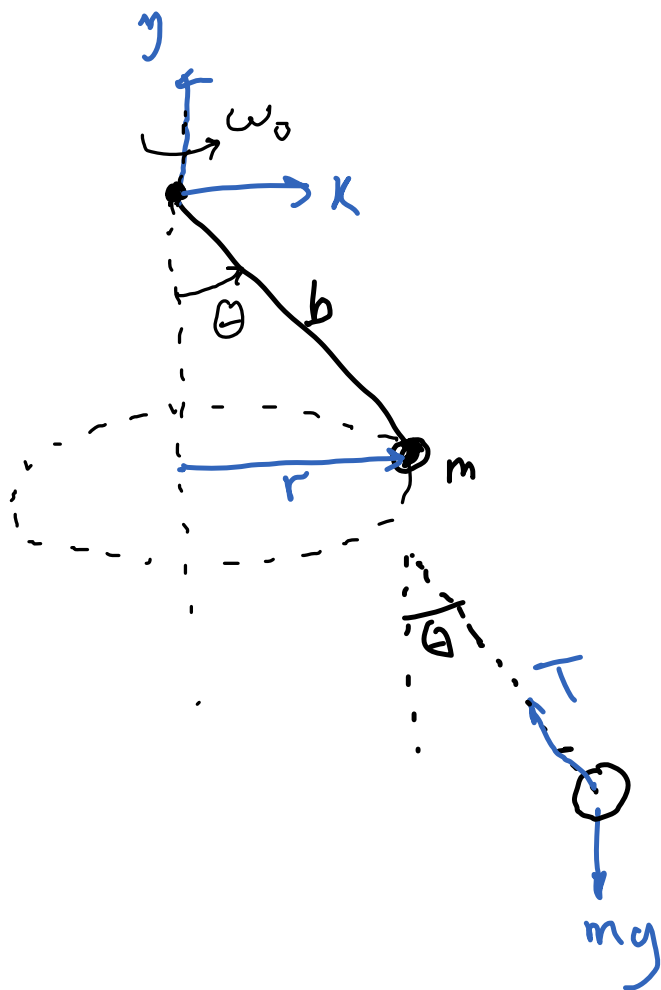
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 = \frac{1}{m} \left[-k(x_1-L) - \mu \sqrt{(mg)^2 + (2m\omega_0 \dot{x}_2)^2} \operatorname{sgn}(\dot{x}_2) + m x_1 \omega_0^2 \right] \end{cases}$$

T_{max}

ماکزیمم کشش قبل تحلیل

Ex. 3.3

$\rightarrow \omega_{0max}, \theta_{max} ?$



$$\sum F_x = ma_x \rightarrow -T \sin \theta = -m \omega_0^2 b \sin \theta \rightarrow$$

$$\sum F_y = ma_y \rightarrow T \cos \theta - mg = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\omega_{0 \max}^2 = \frac{T_{\max}}{mb}}$$

$$\hookrightarrow \theta_{\max} = \cos^{-1} \left(\frac{mg}{T_{\max}} \right)$$



دینامیک پیشرفته، دینامیک ذرات

دکتر امین نیکوبین