



رباتیک پیشرفته

سینماتیک دیفرانسیلی

تکینگی، معکوس سینماتیک دیفرانسیلی

جلسه دوازدهم

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir



تکینگی -

$$v_e = J \dot{q}, \quad v_e = \begin{bmatrix} \dot{p}_e \\ \omega_e \end{bmatrix}$$

ماندس تراکوس یک نداشت خطی
از فضای سرعت مفصل به فضای
سرعت نقطه ای جاری کند.

$$J \in \mathbb{R}^{6 \times n} \quad \text{در سطح}$$

$$J_p \in \mathbb{R}^{3 \times n}$$

موقعی که ربات در یک پیکربندی قرار گیرد که

در سطح یادوستون ماندس تراکوس
با هم رید موازی شوند. آن پیکربندی، تکینگی گفته می شود.





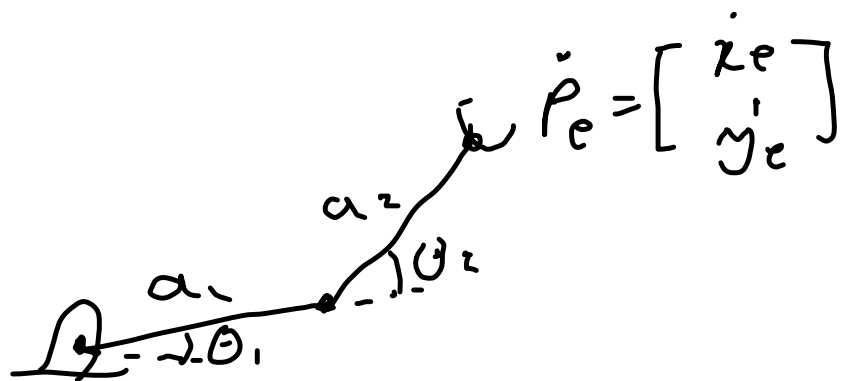
عبارت دیگر مازیس را کوسین ماهی رتبه دانسته باشد.

J(4)

- a- در یکسری کلین، افعال هر حرکت را جدا، به نفع آسان پذیرفت، عبارت از محدودیت و قوتی خاص است در بعضی جهات،
- b- در حالت کلین بفرایک حل برای مثال سینه یک مهندس وجود دارد.
- c- تغییر کوسین در سرعت است عبارت از ابعاد سر یک برای در مفاصل می شود.



تَلینلی | - تَلینلی مرزی ، در مرز حقہ کی نایابی سے رخ کمی دہد
تَلینلی | - ۲ دانلی ، در راتل حقہ کی نایابی سے رخ می دہد



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

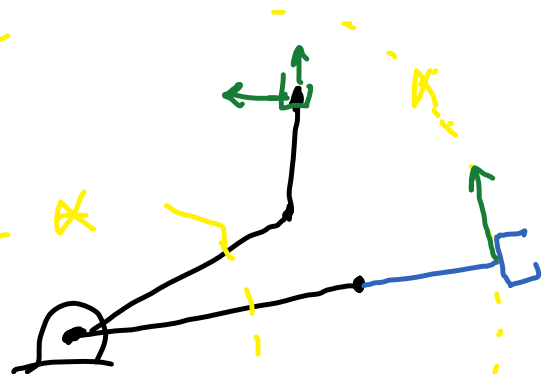
$$J(\theta_1, \theta_2)$$

$$J = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

به سوهقی مانند J ، نهتن مرتبه
ضاد در دست .

$$\det(J) = a_1 a_2 s_2 = 0 \rightarrow \sin \theta_2 = 0$$

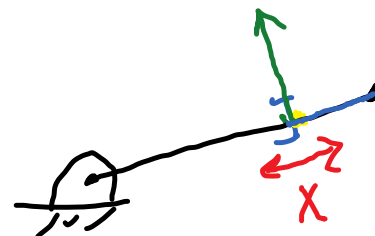
$$\begin{cases} \theta_2 = 0 \\ \theta_2 = \pi \end{cases}$$



$\theta_2 = 0$

$\theta_2 = 0$

صعودی
حرکت دارد
(a)



$\theta_2 = \pi$

تکینگی در هر نقطه ای

$$J = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_1 & -a_2 s_1 \\ a_1 c_1 + a_2 c_1 & a_2 c_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-a_1 - a_2) s_1 & -a_2 s_1 \\ (a_1 + a_2) c_1 & a_2 c_1 \end{bmatrix}$$

درست است J با یکدیگر موازی
شدند.

مورد اول - $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ مستقل هستند

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مورد دوم - $\begin{bmatrix} 2 \\ c \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ مستقل نیستند

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$b_1 \quad b_2$

$$b_2 = 2b_1$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$c_1 \quad c_2 \quad c_3$

$$c_3 = c_1 + c_2$$
$$\rightarrow \det(C) = 0$$

درجه آزادی مستقل مانده J $\text{Rank}(J)$

$$\text{Rank}(J)=2, \quad \text{for } \theta_2=0, \theta_2=\pi \rightarrow \text{Rank}(J)=1$$

$$\dot{p}_e = J \dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \underbrace{J^{-1}(q)}_{\infty} \dot{p}_e$$

$$\dot{p}_e = [J_{p_1} \ J_{p_2}] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = J_{p_1} \dot{\theta}_1 + J_{p_2} \dot{\theta}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \end{bmatrix}$$

$\det(J) \rightarrow 0$

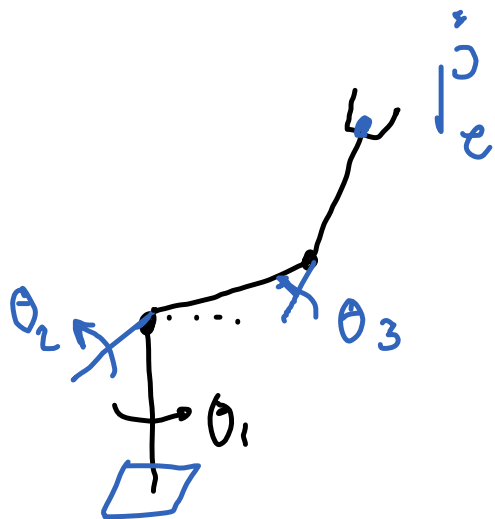


$J \in \mathbb{R}^{3 \times n} \rightarrow$ معینات J مربعی نیستند
نیز $\det J = 0$ همیشه برقرار است

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & a \end{bmatrix}$$

کمتر مربعی داریم $a = 3 \rightarrow$
 $\text{Rank}(J) = 2 \xrightarrow{a=3} \text{Rank}(J) = 1$

ربات سه انان



$$J \equiv \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \\ -0 & -s_1 & -s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

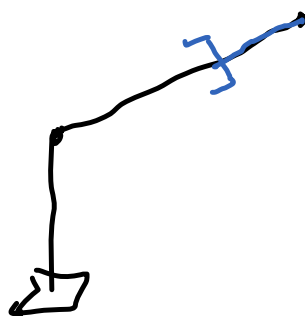
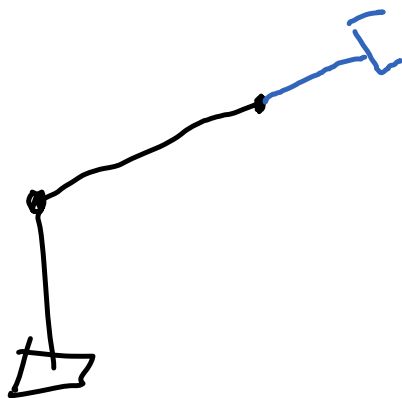
$$\dot{P}_e = J_P \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$$J_P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$J_P = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{J}_P) = -a_2 a_3 s_3 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) = 0$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} \quad s_3 = 0 \Rightarrow \theta_3 = 0, \quad \theta_3 = \pi$$



نیمه ربات، وابستگی به
نوع ممانع دارند

نسبت سوم در امتداد لنب درم
خوابی گیرد.

$$a_2 c_2 + a_3 c_{23} = 0$$

$$p_e = p_3 = \begin{bmatrix} c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ a_2 s_2 + a_3 s_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_e \end{bmatrix}$$

موقعیت E

تکینگی دایره‌ای

مات له سینماتیک معکوس به هم می‌زنند و لاا...

اگر، تفکیک شوند θ_2 در حالتی که تمام جابجایی شود



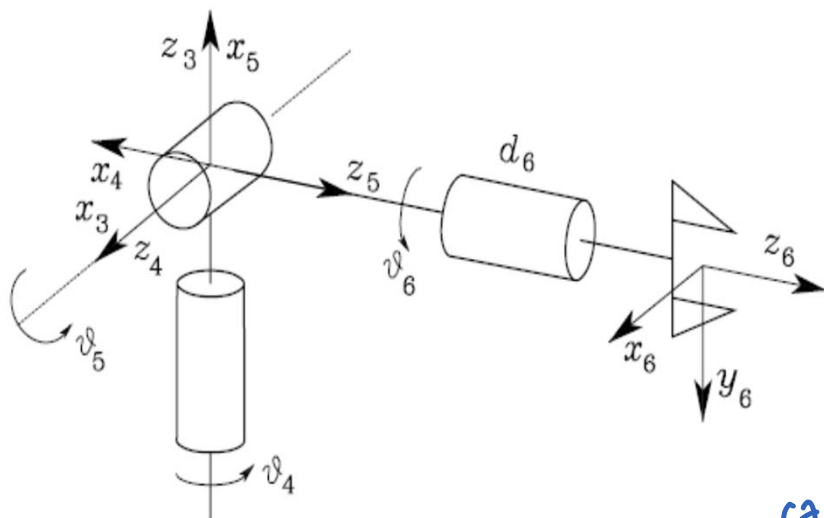


Fig. 2.24. Spherical wrist

$$\theta_4 = \alpha$$

$$\theta_6 = -\alpha$$

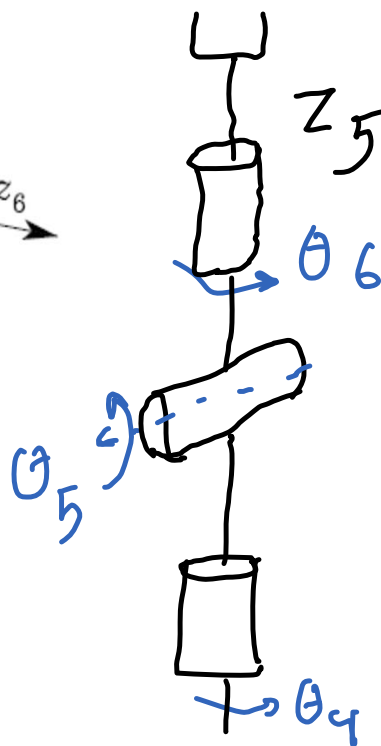
مجموع کردی

موازی شدن محور z_5 , z_3

$$\theta_5 = 0, \pi$$

$$\det(J) = \sin \theta_5$$

بسیار ساده می شود
سری می شود





Analysis of Redundancy

تحلیل درج آزادی اضافی

Joint space, n
operational space, m



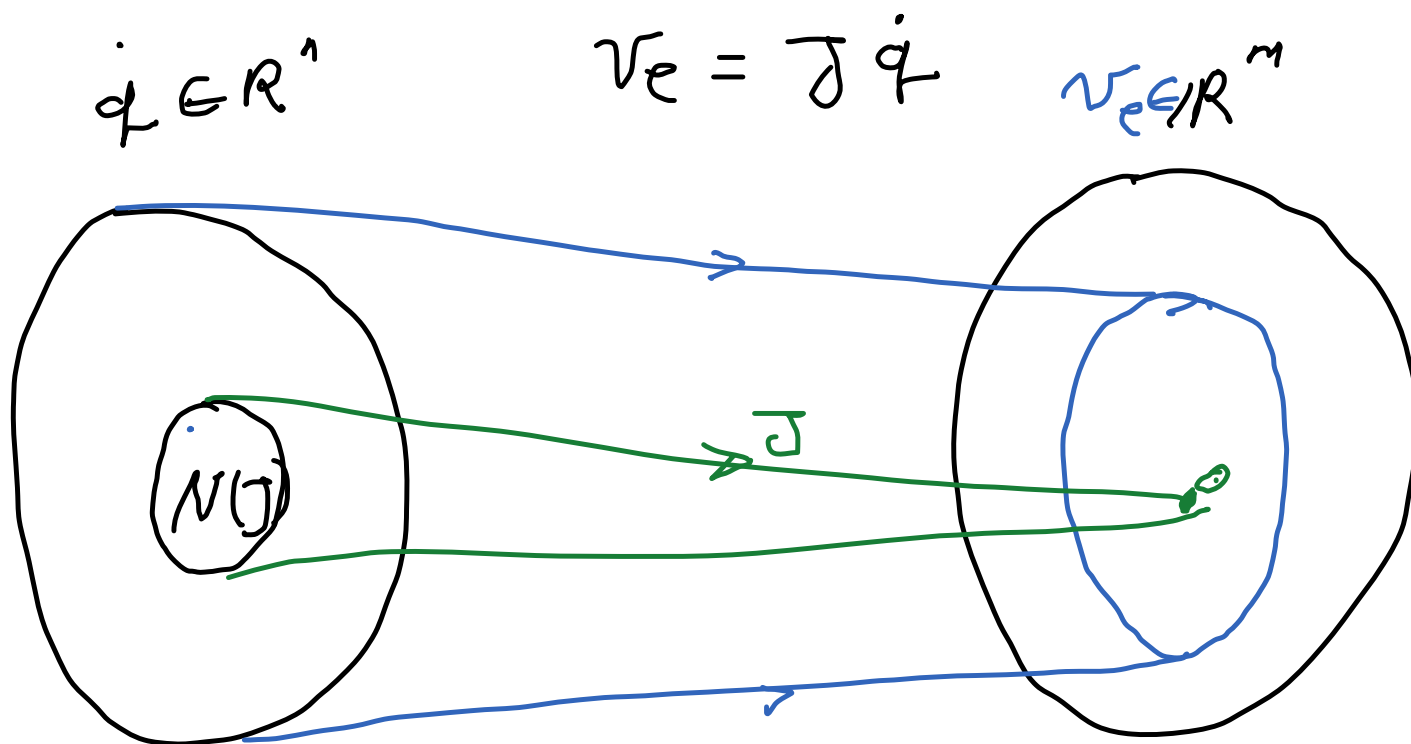
$$r = n - m$$

r درجات آزادی اضافی

$$v_e = J \dot{q}, \quad v_e \in \mathbb{R}^m, \quad \dot{q} \in \mathbb{R}^n$$

$$J \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

ماتریس J یک تبدیل خطی از فضای سرعتی مفصل را به فضای سرعتی عملیاتی تبدیل می‌کند.



$$J \dot{q} = 0$$



مثال عددی

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\dim(R(A)) = 2, \\ \dim(N(A)) = 1$$

$$R(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$N(A) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a + 2b + 3c = 0 \rightarrow a - 4c + 3c = 0 \rightarrow a = c$$

$$b + 2c = 0 \rightarrow b = -2c$$

$$v_e = J \dot{q},$$

فرض کنید $\dot{q}^*$ جواب مورد نیاز باشد

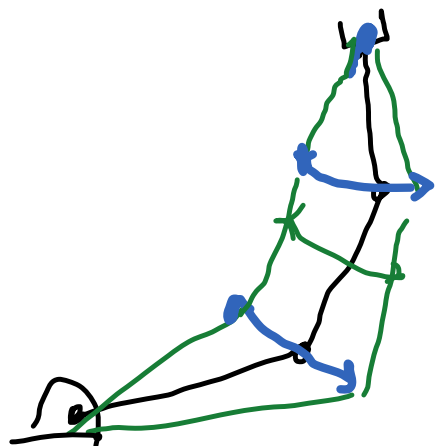
مانند $P \in R^{n \times n}$ بگوئیم که $R(P) \equiv N(J)$ در سطح است

$$\dot{q} = \dot{q}^* + P \dot{q}_0$$

$$\Rightarrow v_e = J(\dot{q}^* + P \dot{q}_0) = J\dot{q}^* + \cancel{JP\dot{q}_0} = J\dot{q}^*$$

رباتیک پیشرفته، سینماتیک دیفرانسیلی

دکتر امین نیکوبین





رباتیک پیشرفته، سینماتیک دیفرانسیلی

دکتر امین نیکوبین