



دینامیک پیشرفته

مقدمه

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir



مرجع اصلی درس

Advanced Dynamics Modeling and Analysis

A. F. D'Souza

V. K. Garg



1- مقدمه، ضروری بر سینتیک از کتاب مریام بحث امل، مری

تعریف مفهیم اولیه

4- دینامیک اجسام صلب

2- سینتیک

5- دینامیک لائراندرین

3- دینامیک ذرات

لے روش سیدین اولیه

لے روش اندتری

لے روش صده و مومنتوم

بحث دوم، تحلیل

هدف از علم دینامیک مطالعه حرکت می باشد

حرکت } میکروسکوپی ← دینامیک کوانتومی

ماکروسکوپی ← دینامیک کلاسیک

حیات
سیالات
گاز

Particle
ذره
ODE

Rigid body
جسم صلب

جسم الاستیک

Flexible body
PDE

...

ODE

nonlinear

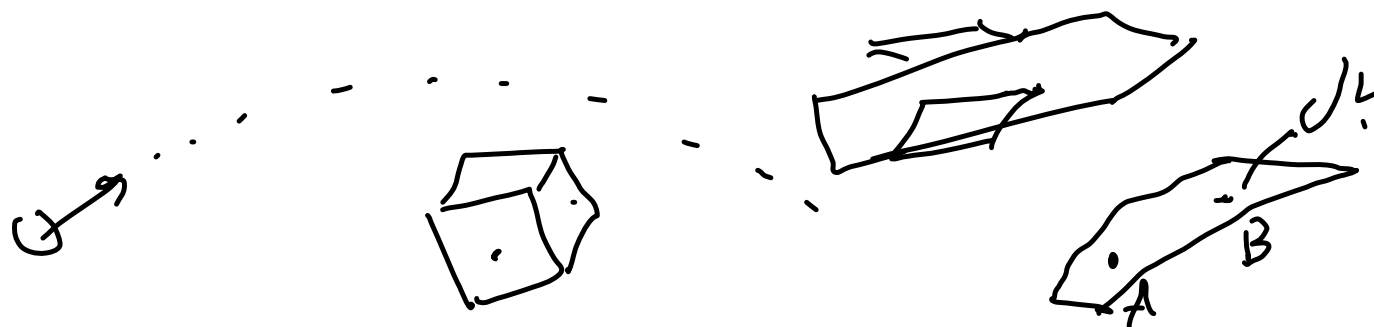
numerical method

Analysis

Modeling

ذره } - جسم نخی جضد و مقدا ورت انتقالی دارر
 - یا جمع می بر فرد اما ابعاد جمع در معایه بصفت طلی نزد خلی کوپک اورت

جمع جملب . فاصله بین هر دو نقطه از جمع نسبت با معنی می ماند، در هر زمان و پلکر بندی
 نسبت مثله ای



معزین
 یا جود ای

سرعت نور
 $v \ll c \leftarrow \text{nonrelativistic}$ ✓ دینامیک غیرنسبتی

$v \simeq c$ relativistic دینامیک نسبیتی

لحظه سرعت احاطه کند یک به سرعت نور

$$m = \frac{m_0}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{0.5}}$$



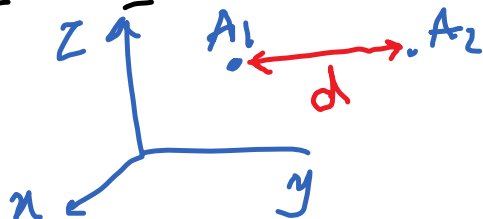
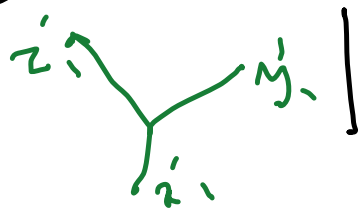
فضای اقلیدسی. یک فضای خطی، ممکن، یکدلت است

Normed, Linear, homogeneous, isentropic

نرم یا فاصله دو نقطه $d = \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$

چون فضا ممکن است این فاصله نامتغیر از مبدأ است. و فضا است

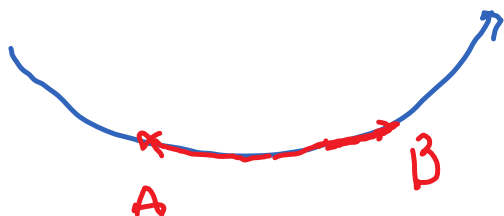
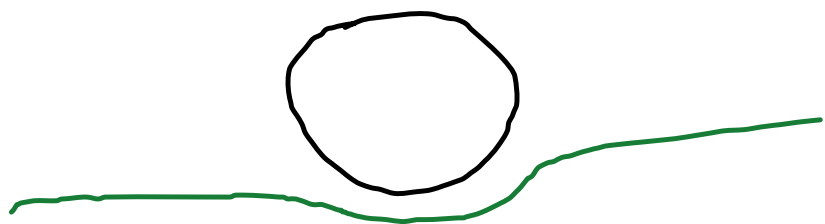
و چون isentropic است این فاصله نامتغیر از جهت محورها است. است. و فضا است



$$A_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

دینامیک پیشرفته، مقدمه

دکتر امین نیکوبین

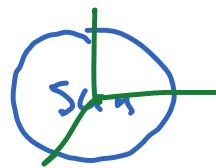
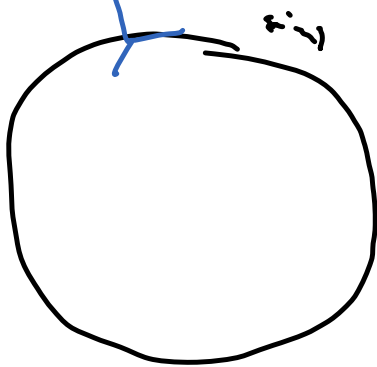


گالیلیت ان دار که یک دست، مختصه عیور دار که نسبت به آن

به در تدین شکل ممکن بیان می شود. این دست، مختصه

inertial coordinat system

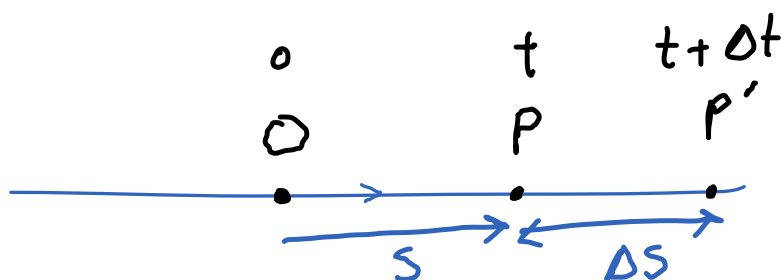
گفته می شود به نسبت اندازه ایوس تدینیت این است، نسبت مطلق گفته می شود.



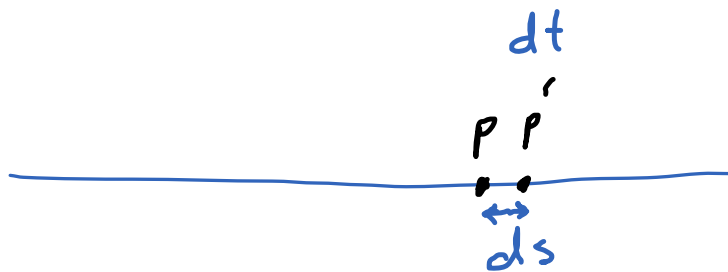


حرکت مستقیم الحاقی

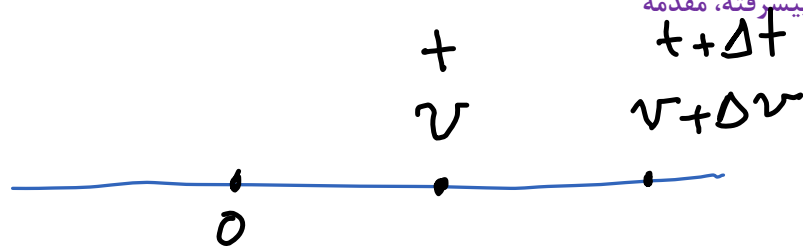
در زمان Δt ذره به اندازه Δs جابجا شد



$$v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \text{سرعت لحظه‌ای} \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$



$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$



$$a_{ar} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \longrightarrow a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

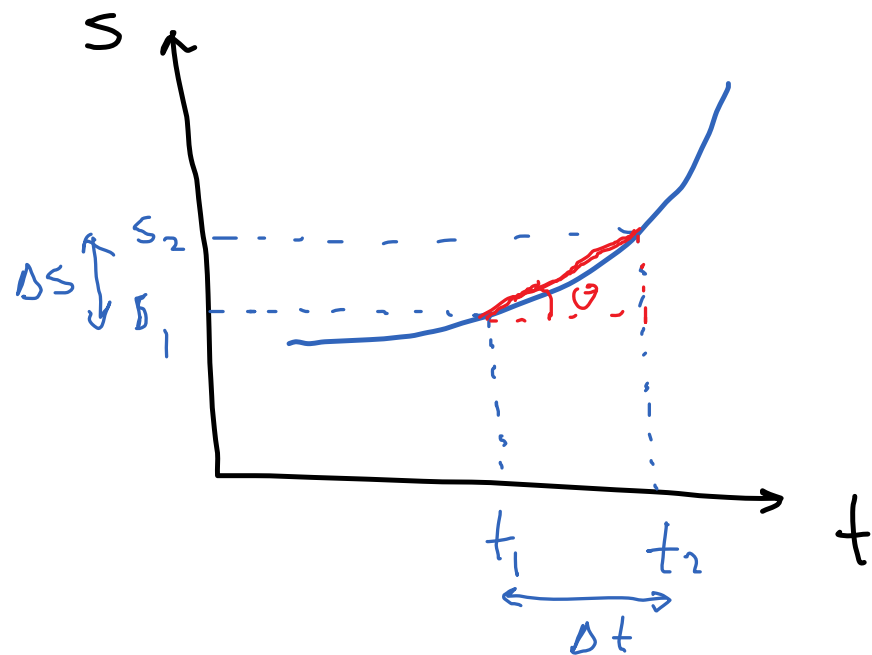
$$v = \dot{s} \longrightarrow a = \ddot{s} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

مثال: فرض کنید ذراتی را که در امتداد یک خط مستقیم با شتاب ثابت حرکت می کنند. سرعت و تنبیه آنها را بر حسب آن بدست آورید.

$$s(t) = 2t^3 + 3t^2 + 4t + 5$$

$$v = 6t^2 + 6t + 4$$

$$a = 12t + 6$$



$$v_{av} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$\tan \theta = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

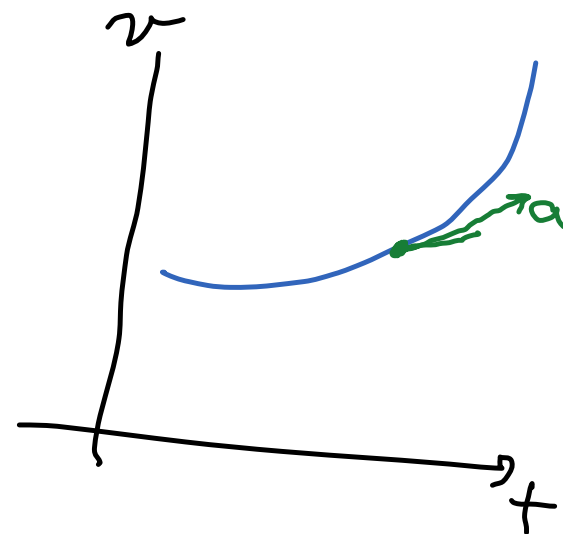
$$v = \frac{ds}{dt}$$

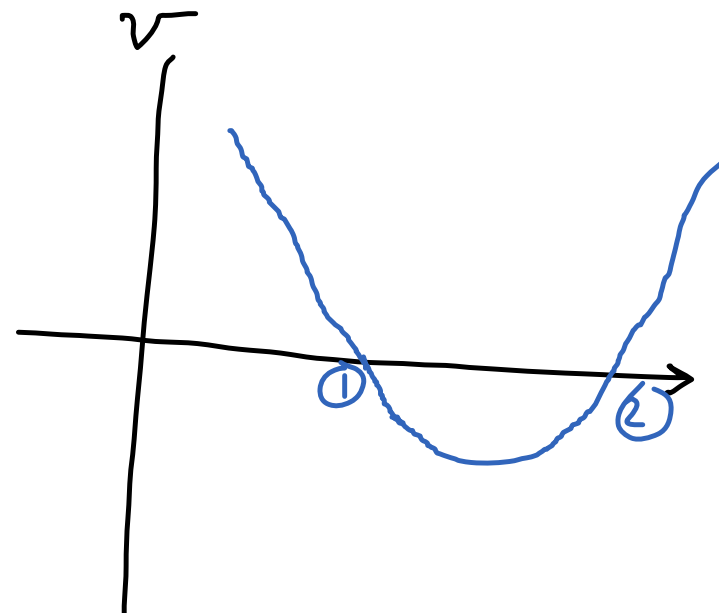
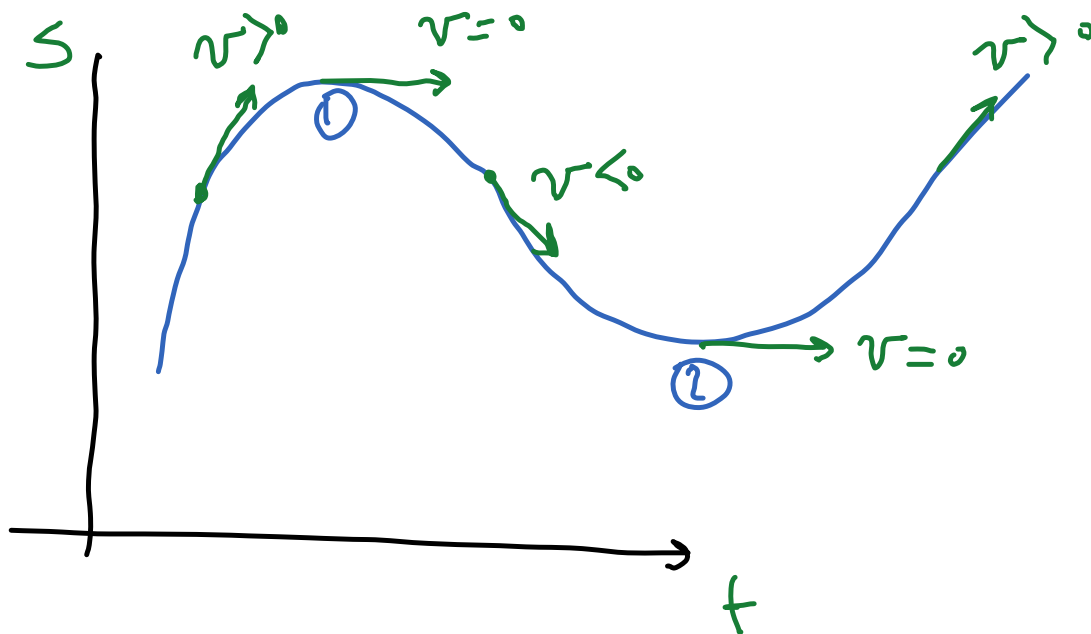
رادی سرعت هاس بد منفی

شیب خط هاس بد منفی
S-t منفرجه سرعت

↑ $v = \infty$

→ $v = 0$



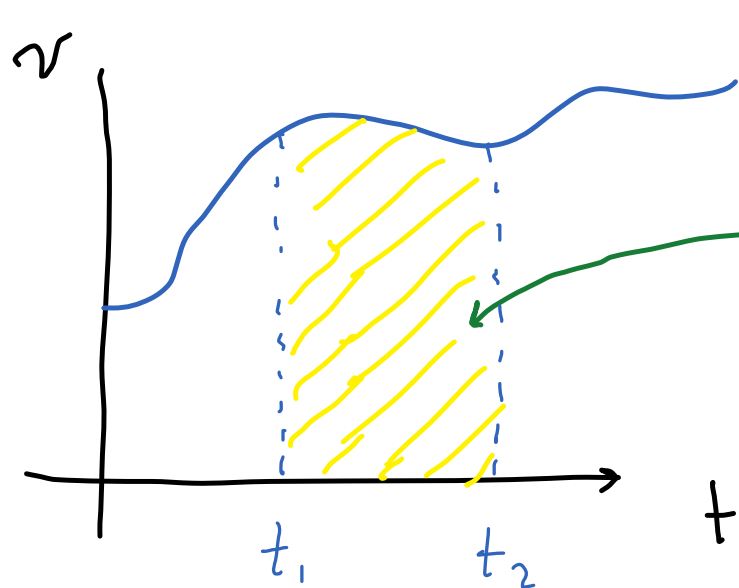


$$\textcircled{1} \quad v = \frac{ds}{dt} \rightarrow ds = v dt \rightarrow \int_{s_0}^s ds = \int_{t_0}^t v dt$$

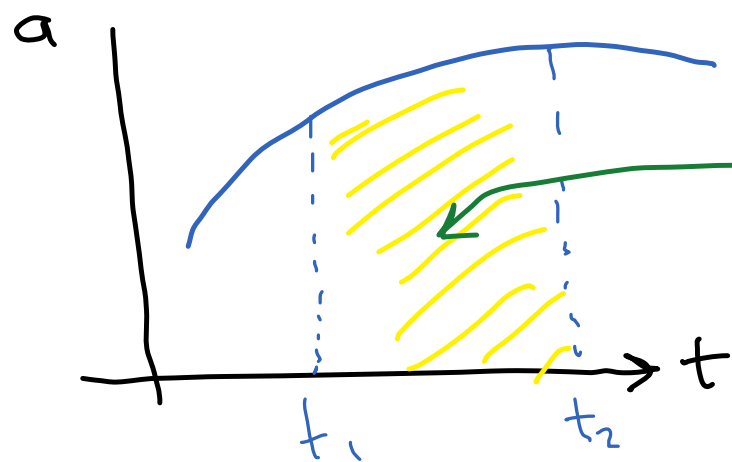
$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a dt \rightarrow \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a dt$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} \rightarrow s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v dt \rightarrow s_2 = s_1 + \int_{t_1}^{t_2} v dt$$

$$\textcircled{2} \rightarrow v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a dt \rightarrow v_2 = v_1 + \int_{t_1}^{t_2} a dt$$



$$s_2 = s_1 + \int_{t_1}^{t_2} v dt$$



$$v_2 = v_1 + \int_{t_1}^{t_2} a dt$$

مسافت در یک زمان

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow dt = \frac{ds}{v}$$
$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dt = \frac{dv}{a}$$
$$\frac{ds}{v} = \frac{dv}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{a ds = v dv} \rightarrow \ddot{s} ds = \dot{s} d\dot{s}$$

استفاد از رابطه‌ی حرکت نسبت به ثابت

$$a = a_0$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a dt \rightarrow v - v_0 = a(t - t_0) \Rightarrow v = v_0 + a(t - t_0)$$

$$t_0 = 0 \rightarrow \boxed{v = v_0 + at}$$

$$v_0 = 0 \rightarrow v = at$$

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow \int_{s_0}^s ds = \int_0^t v dt$$

$$\Rightarrow s - s_0 = \int_0^t (v_0 + at) dt = \left[v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \right]_0^t$$

$$\Rightarrow s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

نسبت کای

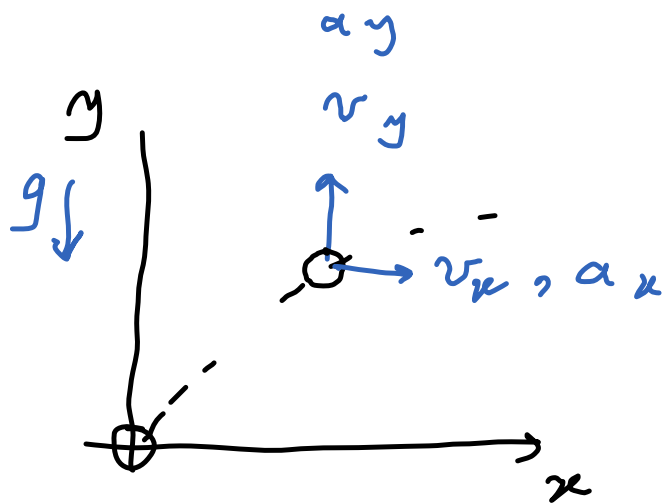
$$a ds = v dv \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^v v dv = a \int_{s_0}^s ds$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_{v_0}^v = a(s - s_0) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = a(s - s_0)}$$

برای شتاب ثابت

برای وقت بدیاریها

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_y = -g \Rightarrow v_y = v_{0y} - gt \\ y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \rightarrow v_x = v_{0x} \\ x = x_0 + v_{0x} t \end{cases}$$



دینامیک پیشرفته، مقدمه

(سیفیه الحفا)

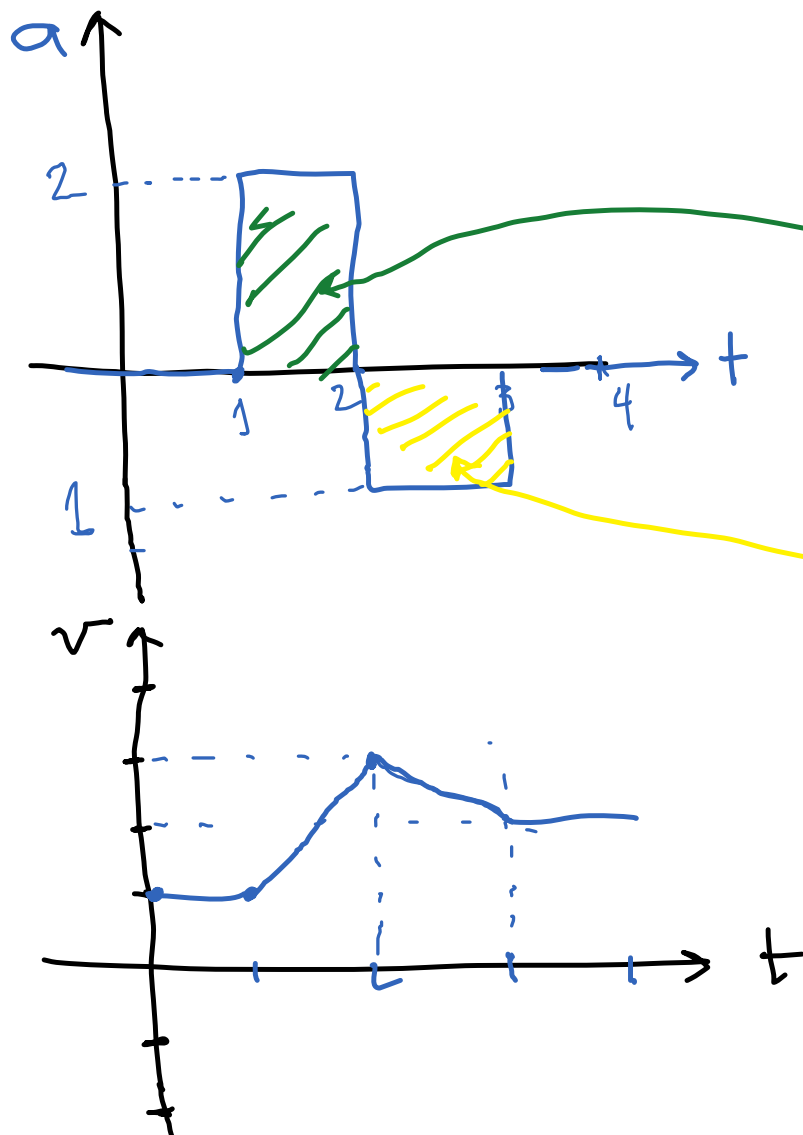
مختطه حرکت به یک ذره بدو در زمان به صورت زیر داده شد، است.
سرعت اولیه آن 1 m/s و موقعیت اولیه آن 0 می باشد.
مختطه سرعت و جابجایی را برای این ذره رسم کنید.

$$v_0 = 1 \text{ m/s} , \quad s_0 = 0$$



دینامیک پیشرفته، مقدمه

دکتر امین نیکوبین

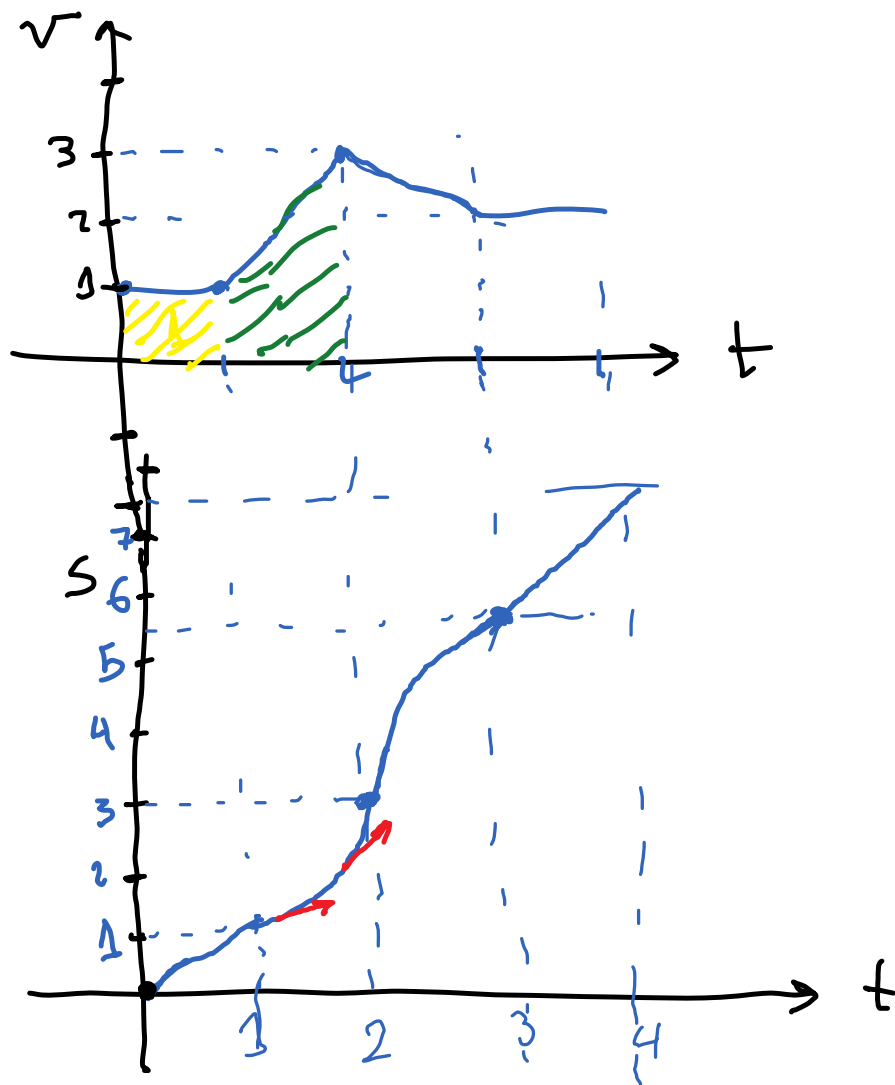


$$v_0 = 1 \xrightarrow{a=0} v_1 = 1$$

$$v_2 = v_1 + \int_1^2 a dt = 1 + 2 = 3$$

$$v_3 = v_2 + \int_2^3 a dt = 3 + (-1) = 2$$

$$v_4 = v_3$$



$$s_0 = 0$$

$$s_1 = s_0 + \int_0^1 v dt = 0 + 1 = 1$$

$$s_2 = s_1 + \int_1^2 v dt = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} 1 \times 2\right) = 3$$

$$s_3 = s_2 + \int_2^4 v dt = 3 + (2 + \frac{1}{2}) = 5.5$$

$$s_4 = s_3 + \int_3^4 v dt = 5.5 + 2$$



دینامیک پیشرفته، مقدمه

$$0 < t < 1, \quad a = 0, \quad v_0 = 1, \quad s_0 = 0$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a \, dt = 1$$

$$s(t) = s_0 + \int_0^t v \, dt = 0 + \int_0^t 1 \, dt = t$$

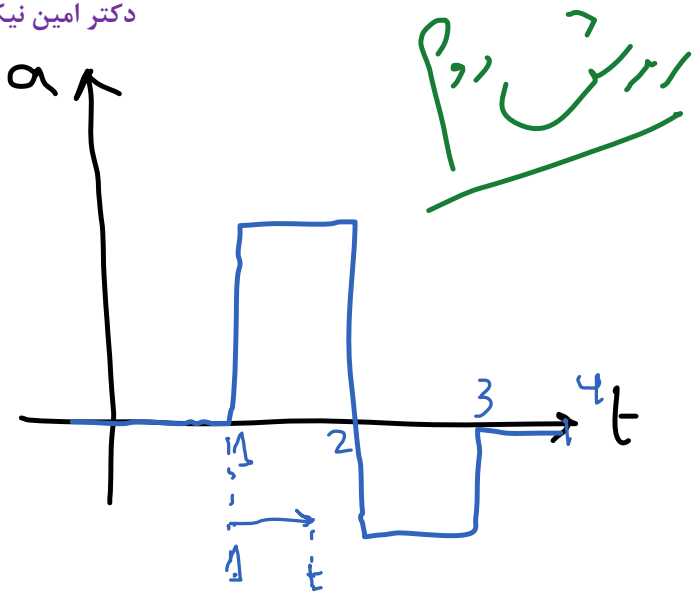
$$v(1) = 1, \quad s(1) = 1$$

$$1 < t < 2 \rightarrow a = 2,$$

$$v = v_1 + \int_1^t a \, dt = 1 + \int_1^t 2 \, dt = 1 + (2t - 2) = 2t - 1$$

$$v(1) = 1, \quad v(2) = 3$$

دکتر امین نیکوبین





$$1 < t < 2, \quad s = s_1 + \int_1^t v dt = 1 + \int_1^t (2t-1) dt$$
$$= 1 + \left[t^2 - t \right]_1^t = 1 + t^2 - t - (1-1) = t^2 - t + 1$$
$$s(1) = 1, \quad s(2) = 4 - 2 + 1 = 3$$

$$2 < t < 3, \quad a = -1, \quad v = v_2 + \int_2^t a dt = 3 + \int_2^t -1 dt$$
$$= 3 + \left[-t \right]_2^t = 3 + -t - (-2) = 5 - t$$
$$v(2) = 3, \quad v(3) = 2$$



دینامیک پیشرفته، مقدمه

دکتر امین نیکوبین

$$s = s_2 + \int_2^t v dt = 3 + \int_2^t (5-t) dt$$

$$= 3 + \left[5t - \frac{t^2}{2} \right]_2^t = 3 + 5t - \frac{t^2}{2} - \left(10 - \frac{4}{2} \right)$$

$$= -\frac{t^2}{2} + 5t - 5$$

$$s(2) = -2 + 10 - 5 = 3$$

$$s(3) = -\frac{9}{2} + 15 - 5 = 10 - 4.5 = 5.5$$

$3 < t < 4 \longrightarrow \dots$ مسیر



دینامیک پیشرفته، مقدمه

با سرعت 50 km/h

مثال: یک هواپیمای در ارتفاع 5000 m در حال حرکت است هدفی را روی زمین
مت هدف می‌کند. به زمانی θ (زاویه دید هواپیما) حرکت را چاکند تا هدف
اصابت کند

$$\theta = ? \quad 138.8$$

$$v_{0x} = 500 \text{ km/h}$$

$$v_{0y} = 0$$

$$a_x = 0$$

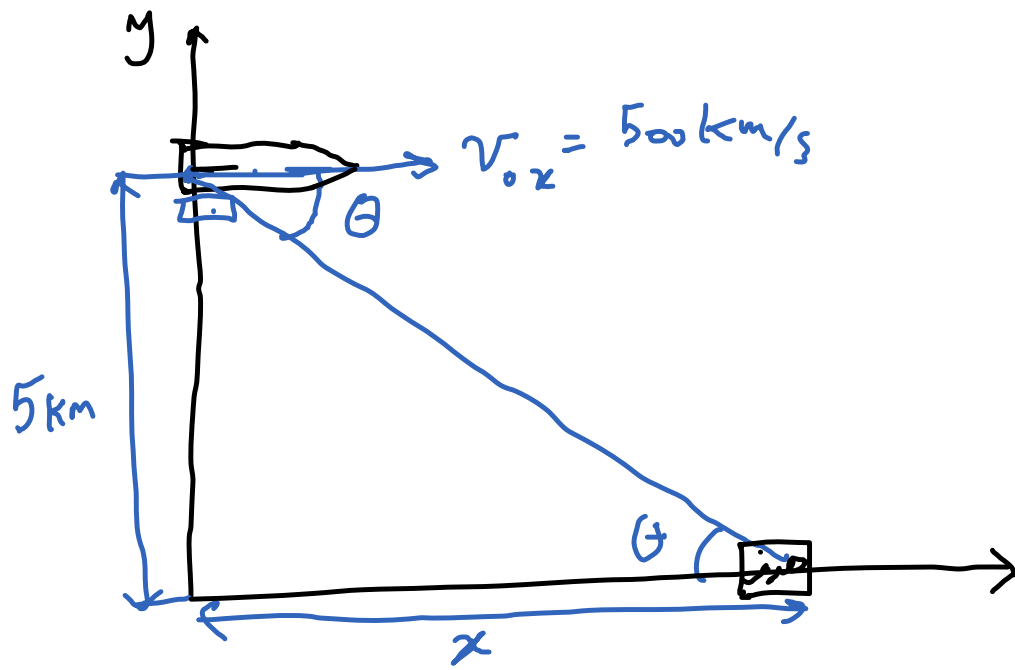
$$a_y = -9.81 = -g$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \quad v_y = v_{0y} - g t$$

$$x = v_{0x} t, \quad y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x = 138.8 t$$

$$0 = 5000 - \frac{1}{2} g t^2$$





$$\begin{aligned} x &= 138.8t \\ 0 &= 5000 - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \frac{1}{2}gt^2 = 5000 \Rightarrow gt^2 = 10000 \\ &\Rightarrow t^2 = \frac{10000}{9.81} \rightarrow t = 31.4 \end{aligned}$$

$$x = 138.8 \times 31.4 = 4431 \text{ m}$$

$$\tan \theta = \frac{5000}{4431} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \dots = 48.45^\circ$$

$$r = xi' + yj'$$



تمرین: فرض کنید هدف با سرعت 100 km/h حرکت می‌کند. در این صورت زاویه دید هواپیمای پیاده‌دهنده را نسبت به خط افق هدف مشخص کنید.

$$\theta = 54.6$$



فضل دوم، سینتیک
مطالعه حرکت اجسام،
لازم است موقعیت آنرا نسبت به یک دشت مشخص به بیان نمود.
دشت، مشخصاتی
- کایزن
- عطایی
- فانی ماس
- کروی
- استازای

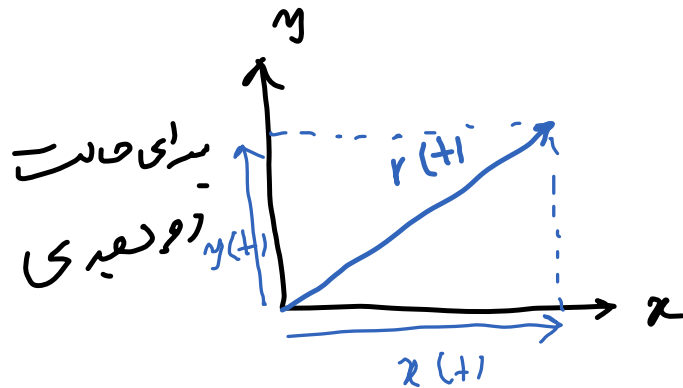
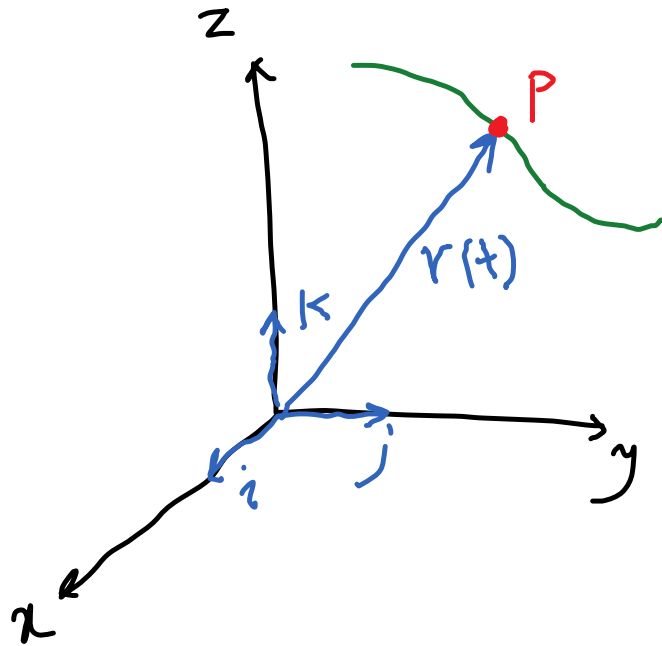


درست، مختصات کُرند
متعامد، راست گرد

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$$
$$i, j, k$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$





بجای محاسبه سرعت نقیصه ۱۰

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t) \mathbf{i} + \dot{y}(t) \mathbf{j} + \dot{z}(t) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{x}(t) \mathbf{i} + \ddot{y}(t) \mathbf{j} + \ddot{z}(t) \mathbf{k}$$

بلکه: $\dot{\mathbf{i}} = \dot{\mathbf{j}} = \dot{\mathbf{k}} = 0$ ، چون هر مقدارشان و هم همسان ثابت است
چون دستگاه مختصات xyz ثابت است.



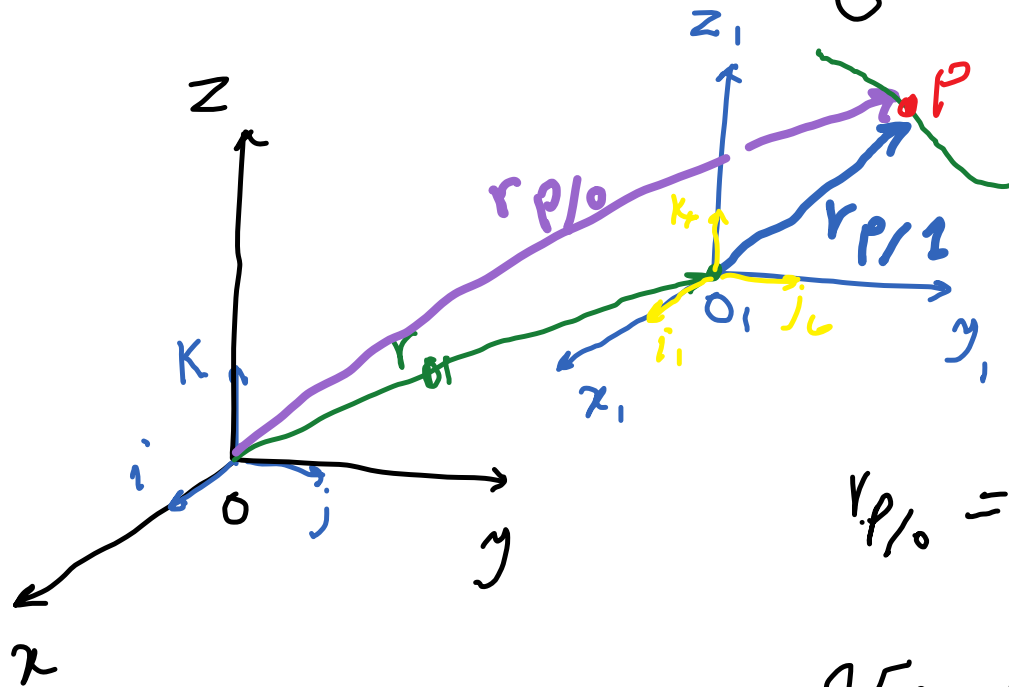
حرکت نسبت به دستگاه مختصات انتقالی،

Frame

چهارچوب

محورهای دستگاه، x, y, z دارای دورشک

دستگاه، x_1, y_1, z_1 می باشد.



$$r_{P/0} = r_{O1} + r_{P/1}$$

$$v_P = v_{O1} + v_{P/1}$$

$$a_P = a_{O1} + a_{P/1}$$

$$\begin{cases} i = i_1 \\ j = j_1 \\ k = k_1 \end{cases}$$



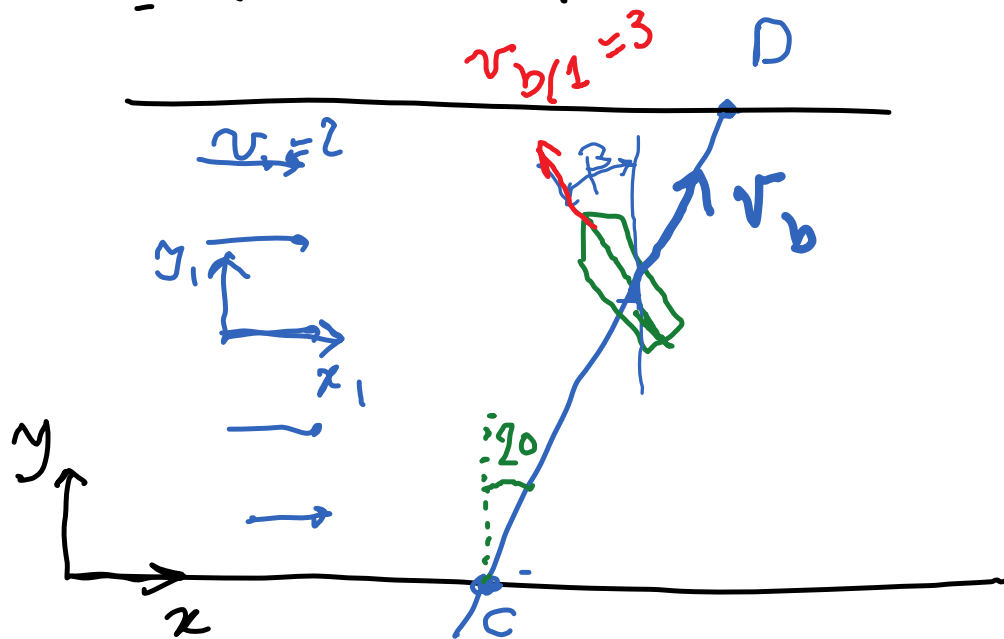
$$\mathbf{r}_{o_1} = o_{x_1} \mathbf{i}' + o_{y_1} \mathbf{j}' + o_{z_1} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{p/1} = r_x \mathbf{i}'_1 + r_y \mathbf{j}'_1 + r_z \mathbf{k}_1$$

$$\mathbf{r}_{p/o} = \mathbf{r}_{o_1} + \mathbf{r}_{p/1} = (o_{x_1} + r_x) \mathbf{i}' + (o_{y_1} + r_y) \mathbf{j}' + (o_{z_1} + r_z) \mathbf{k}$$



مثال: مورفوبک خالق سرعت 3 m/s راست به رودخانه ایجاد می کند.
سرعت آب رودخانه 2 m/s است. می خواهیم خالق از نقطه C به D .
نور مستقیم برسد. سرعت مطلق خالق جهت نسبی آنرا محاسبه کنید



$$\vec{v}_b = \vec{v}_1 + \vec{v}_{b/1}$$

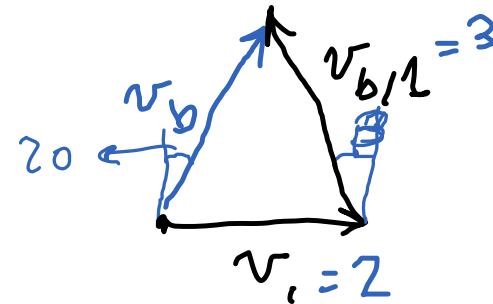
$$\vec{v}_1 = 2 \hat{i}$$

$$\vec{v}_{b/1} = 3 (-\sin \beta \hat{i} + \cos \beta \hat{j})$$

$$\vec{v}_b = v_b (\sin 20 \hat{i} + \cos 20 \hat{j})$$



$$\begin{aligned}
 & \vec{v}_b = \vec{v}_i + \vec{v}_{b/1} \\
 & \begin{cases} \vec{v}_i = 2\vec{i} \\ \vec{v}_{b/1} = 3(-\sin\beta\vec{i} + \cos\beta\vec{j}) \\ \vec{v}_b = v_b(\sin 20^\circ\vec{i} + \cos 20^\circ\vec{j}) \end{cases}
 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} i \rightarrow v_b \sin 20^\circ = 2 - 3 \sin \beta \quad \textcircled{1} \\ j \rightarrow v_b \cos 20^\circ = 0 + 3 \cos \beta \quad \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \textcircled{1}^2 + \textcircled{2}^2 \Rightarrow 9 = 4 - 4v_b \sin 20^\circ + v_b^2 \sin^2 20^\circ + v_b^2 \cos^2 20^\circ$$

$$\longrightarrow v_b = 3 \text{ m/s}, \quad \beta = 18.8^\circ$$