



دینامیک پیشرفته

دینامیک ذرات
اصل بقای انرژی

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

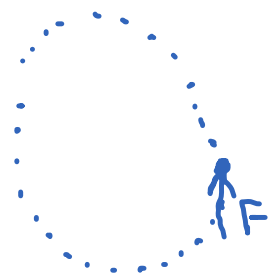


Conservative Force

نیروهای پایستار و اصل بقای انرژی

یک نیرو پایستار گفته می شود اگر کار انجام ندهد توسط آن در یک مسیر بسته صفر باشد

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$



با استفاده از قضیه
استوک

line integ $\Rightarrow$

surf. int $\Rightarrow$

$$\iint \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{n} = 0 \quad (1)$$

∇ : nabl a, del

$\mathbf{n}$: بردار یک محور بر سطح



$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} e_3$$

حالت صفر شدن راجعاً (۱) به

این مقدار به

$$\nabla \times F = 0$$

به گزاردن یک تابع اسکالر به $F = -\nabla U$ ، F به گزاردن یک تابع اسکالر به

$$\nabla \times \nabla U = 0 \quad \checkmark$$

این تابع اسکالر مربوط به پتانسیل F را با U - نشان می دهند و به U انرژی پتانسیل گفته می شود



از قبل را می بینیم که برای U انتگرال می گیریم. متوسط می گیری یا سبب را می بینیم

$$dW = F \cdot dr = -\nabla U \cdot dr$$

$$= - \left(\frac{\partial U}{\partial x} e_x + \frac{\partial U}{\partial y} e_y + \frac{\partial U}{\partial z} e_z \right) \cdot (dx e_x + dy e_y + dz e_z)$$

$$= - \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = -dU$$

اصل کار و انرژی $\rightarrow dW = dT$

$$\Rightarrow dW = -dU$$

کار را می گیریم که متوسط می گیری یا سبب را می بینیم. از موقعیت 1 به 2 می رویم

$$\int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr = - \int_1^2 dU \Rightarrow \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr = U_1 - U_2$$



از قبل دانسته‌ایم که، اصل انرژی $\leftarrow \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr = T_2 - T_1$
حال اگر همه نیروهای وار (F) ، conservative باشند،
 $\int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr = U_1 - U_2$
پس اگر همه نیروهای conservative باشند داریم

$$U_1 - U_2 = T_2 - T_1 \Rightarrow U_1 + T_1 = U_2 + T_2$$

با فرض $U + T = E$ انرژی مکانیکی داریم $E_1 = E_2$
که همین رابطه، اصل بقای انرژی گفته می‌شود، یعنی اگر همه نیروهای conservative باشند
انرژی سیستم همیشه ثابت است.



انرژی می‌تواند از حالت انرژی جنبشی T ، انرژی پتانسیل U تبدیل شود یا بالعکس
اما مجموع U ، T همواره ثابت است،

نیزدهی پرتو γ ، نیزدهی جازبه (mg)، نیزدهی فتر $K \lambda$

نیزدهی غیر پرتو γ ، اصطلاح (وسکوز، خشک، ...) در λ نیزدهی
جاذبی ۹

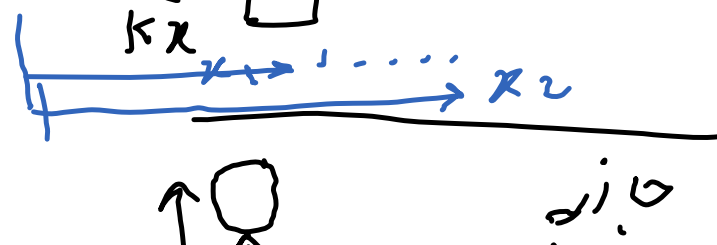
اگر یک سیستم دینامیکی نیزدهی غیر پرتو داشته باشد، دیدار اصل بقای انرژی
یعنی مکان استعاره کرد.



آنر نیروهای خارجی را - دو بخش نیروهای پایدار F_c ، نیروهای غیرپایدار F_{nc} تفکیک کنیم، از اول یک رد اندازی داریم

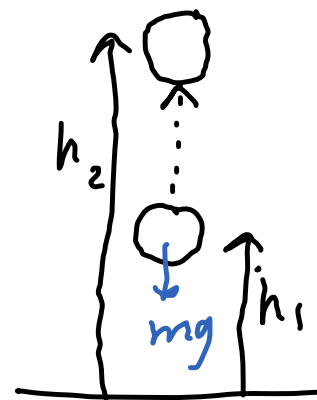
$$\int F \cdot dr = T_2 - T_1$$

فرد  dx



$$\int F \cdot dr = \int F_{nc} \cdot dr + \int F_c \cdot dr$$
$$= \int F_{nc} \cdot dr + \int_{h_1}^{h_2} -mg dh + \int_{x_1}^{x_2} -kx dx$$

$$= \int F_{nc} \cdot dr - mg(h_2 - h_1) - \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$





$$\Delta W_g = mg(h_2 - h_1)$$

یا تغییر که ارتفاع از نقطه‌ی اولیه

$$\Delta W_e = \frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2)$$

نقطه‌ی اولیه

$$\Rightarrow \int F_{nc} \cdot dr - \Delta W_g - \Delta W_e = \underbrace{\Delta T}_{T_2 - T_1}$$

$$\Delta U = \Delta W_g + \Delta W_e \quad \text{معمولی}$$

$$\Rightarrow \int F_{nc} \cdot dr - \Delta U = \Delta T$$

$$\Rightarrow \int F_{nc} \cdot dr = \Delta U + \Delta T = U_2 - U_1 + T_2 - T_1$$



$$\int F_{nc} \cdot dr = \Delta T + \Delta U = \Delta T + \Delta W_g + \Delta W_e$$

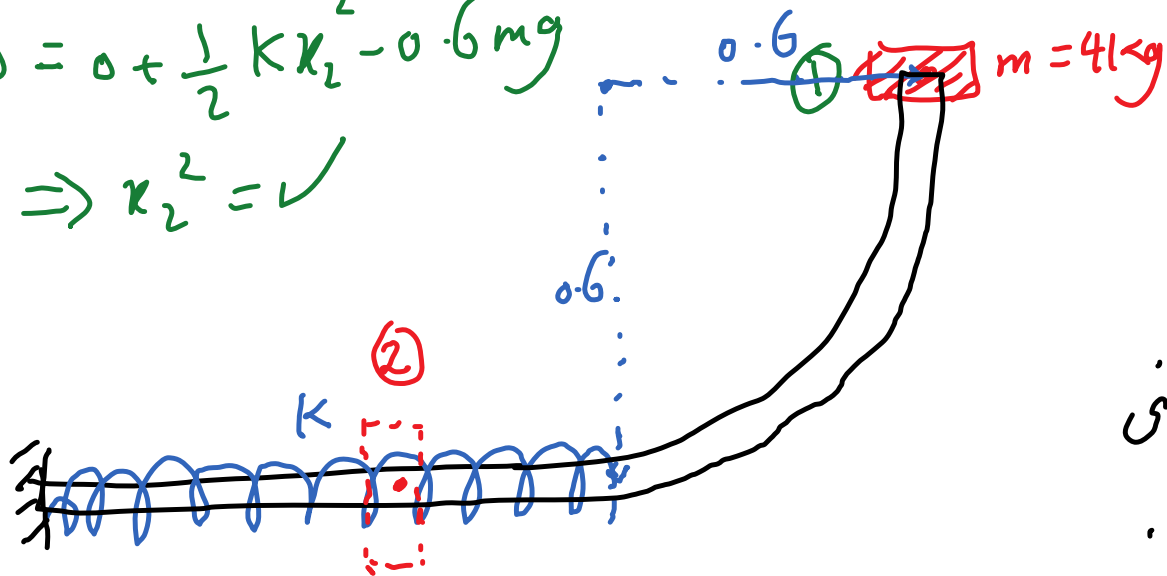
اگرچه نیروها با یکدیگر برابرند، $F_{nc} = 0$ پس

$$\Delta T + \Delta U = 0 \Rightarrow T_2 - T_1 + U_2 - U_1 = 0$$

$$\Rightarrow T_2 + U_2 = T_1 + U_1 \rightarrow \text{همان اصل بقای انرژی}$$

$$0 = 0 + \frac{1}{2} k x_2^2 - 0.6 mg$$

$$\Rightarrow x_2^2 = \dots$$



جرم m از موقعیت h رها می‌شود.
 پس از حرکت سکون رهای شود
 آزادانه در میدان اصطکاک از می‌شود
 حرکت کرده و به نقطه می‌رسد
 فنر در حالت آزاد است
 حداکثر تغییر در انرژی پتانسیل را بیابید.

$$\int F_{\text{net}} \cdot dr = \Delta T + \Delta W_e + \Delta W_g$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 0$$

$$\Delta W_g = mg(h_2 - h_1) = mg(0 - 0.6) = -0.6 mg$$

$$\Delta W_e = \frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2} k x_2^2$$

مثال. لغزید، A جسم 10 kg با اصطکاک ناپذیری به سمت بالای

کتوسی را هناس شیب دار حرکت می کند. فنر در موقعیت A

دارای کسب و کاری ۶.۵٪ می باشد. نقد در موجودی ۱۴۰۰ هزار تومان

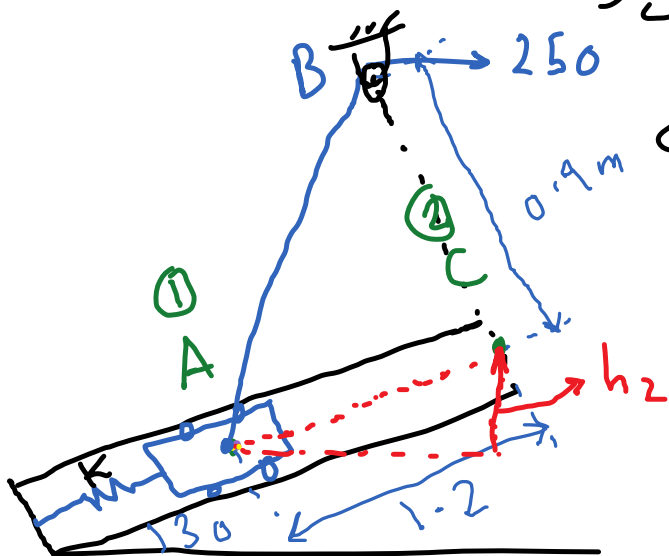
ونیدری سی ۲۵۰ م ۲۵۰ م : آن وارد می شود سرری

لغزنت هت که عید از فطیر (عید دل

$$K = 60 \frac{N}{m}$$

$$\int F_{nc} \cdot dr = \Delta T + \Delta W_e + \Delta W_g$$

I





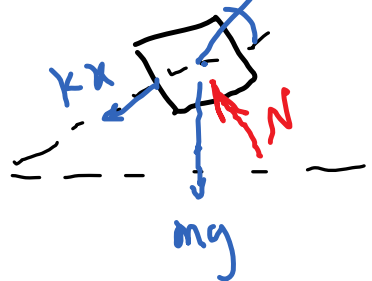
$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$\Delta W_g = mg(h_2 - h_1) = mg(1.2 \sin 30) = 0.6 mg$$

$$\Delta W_e = \frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2} k [(0.6 + 1.2)^2 - (0.6)^2]$$

سرانجام به نقطه متوسط N می‌رسد - چون N همواره برابری می‌کند 250

$$\int F_{nc} \cdot dr = 250 (r_2 - r_1) = 250 \times [\sqrt{1.2^2 + 0.4^2} - 0.4]$$



$$(AB)_1 = \sqrt{1.2^2 + 0.4^2}, (AB)_2 = 0.4$$

$$\textcircled{I} \Rightarrow v = 0.474 \text{ m/s}$$



دینامیک پیشرفته، دینامیک ذرات، اصل بقای انرژی

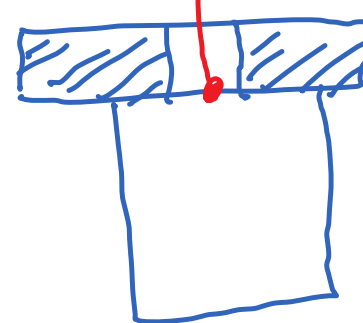
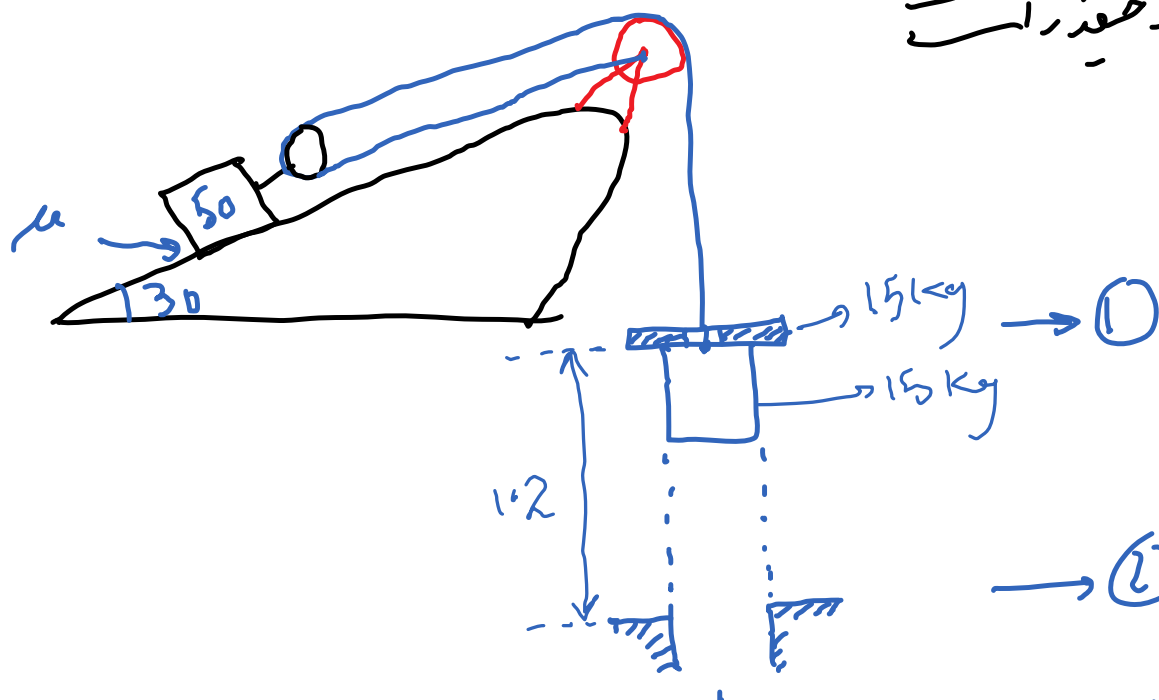
دکتر امین نیکوبین

$$\text{تغییر مومنتوم} = AB - AC = \text{حاصل ضربی سیر می 250}$$

کل مسافت که بیم یاه 50 کیلوگرمی کند جعبه است

$$\mu = 0.3$$

سیستم از حالت ممکن اجزای خود



→ ②

→ ③

$$d_{total} = 1.67 \text{ m}$$



Principle of impulse and momentum

اصل ضربه و مومنتوم

در بحث قبل با کنترل لایه از معادله حرکت $(F=ma)$ نسبت به جابجایی - معادله کینماتیک و انرژی را دیدیم. در این بخش با کنترل لایه از معادله حرکت نسبت به زمان به معادلات ضربه و مومنتوم می‌رسیم.

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \Rightarrow F dt = d(mv) \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_1^2 d(mv)$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} F dt = (mv)_2 - (mv)_1$$

$G = mv$ بردار مومنتم فضی

linear impulse

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} F \cdot dt = G_2 - G_1 = \Delta G$$

اگر بداند نیروی وارد بر یک ذره صفر باشد $F = 0$ ،
زمانی که بداند نیروی کدیک باشد $t_2 - t_1 = 0$ آنک

$$\int_{t_1}^{t_2} F \cdot dt = 0 \Rightarrow G_2 = G_1$$

که بآن فزونی فضی
مومنتم فضی گفته می شود.



سیاهی یک سیستم از ذرات داریم

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{t} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{v}_i \right)_2 - \left(\sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{v}_i \right)_1$$

برای مشتق از اسی

$$\frac{dH_o}{dt} = M_o \Rightarrow M_o dt = dH_o$$
$$\Rightarrow \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} M_o dt}_{\text{angular impulse}} = \underbrace{H_{o2} - H_{o1}}_{\text{Change in angular momentum}} = \Delta H_o$$



$$\text{اگر} \quad \int_{t_1}^{t_2} M_0 dt = 0 \quad \Rightarrow$$

$$H_{0,2} = H_{0,1}$$

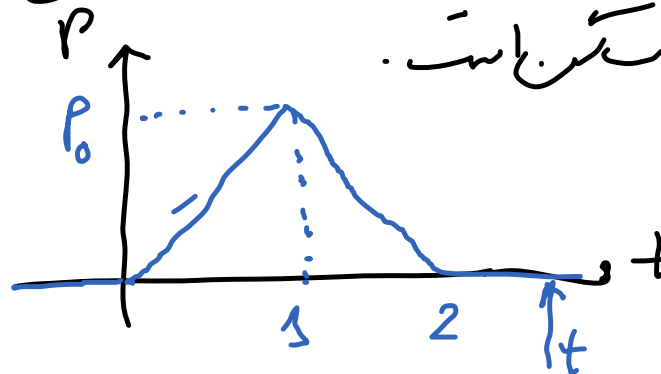
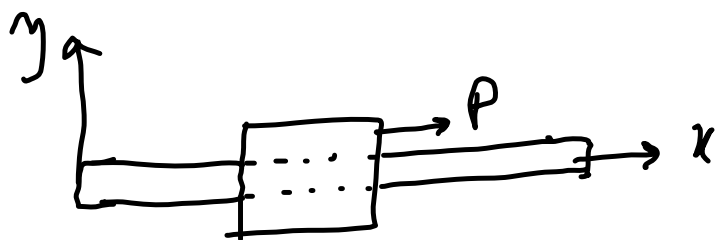
اصل بقای همدم زاده ای

صفتی که به دسترس
منتهی در همدم حل می شود

- اصل بقای منتهی در همدم، به وجود دارد
- منتهی در همدم با زمان متغیر باشد

یک لغزنده: جسم m روی یک میله با اصطکاک خشک نسبت به نیروی P وار گرفته شده.

جذب اصطکاک حرارتی: به رانندگی لغزنده، متوقف می شود
جسم در لحظه اول ساکن است.



$$\int \vec{F} dt = \vec{G}_2 - \vec{G}_1$$

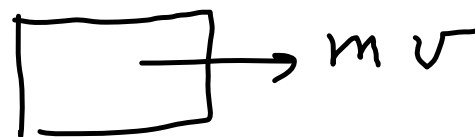
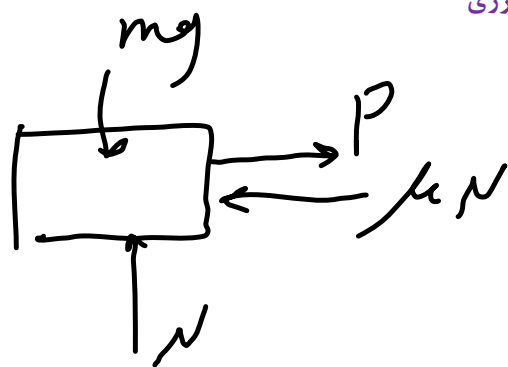


$$\begin{cases} \int F_x dt = G_{x2} - G_{x1} \\ \int F_y dt = G_{y2} - G_{y1} \\ \int F_z dt = G_{z2} - G_{z1} \end{cases}$$



دینامیک پیشرفته، دینامیک ذرات، اصل بقای انرژی

دکتر امین نیکوبین



$$\int F_x dt = G_{x2} - G_{x1} = (mv)_2 - (mv)_1$$

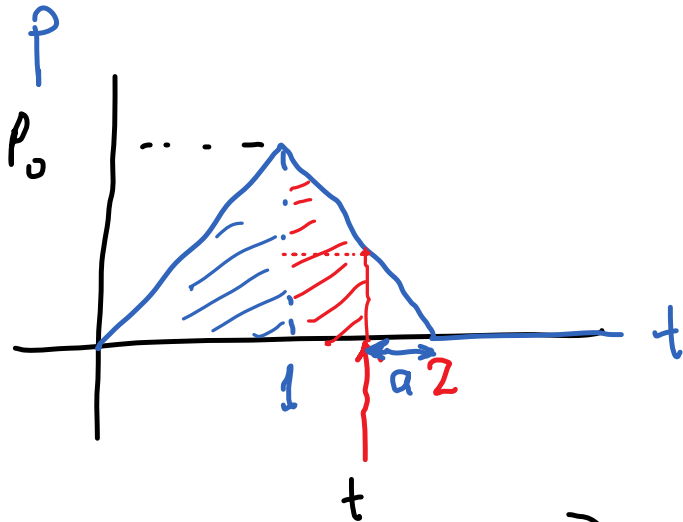
$$\int_0^t (P - \mu N) dt = \int_0^t P dt - \int_0^t \mu mg dt = 0$$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}(2P_0 t) - \mu mg t = 0 \Rightarrow t = \frac{P_0}{\mu mg}$

t زمان توقف

برای P, μ, m, g حتمی $t > 2 \rightarrow \checkmark$

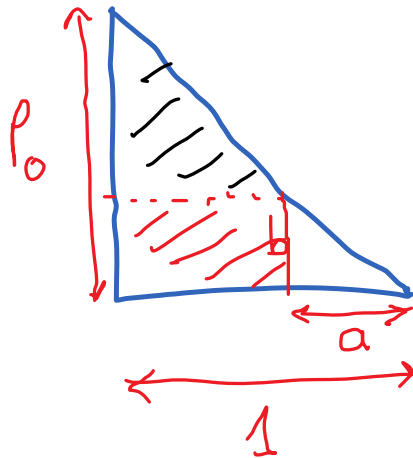
اگر $t < 2$ ، معادلات حل شود



$$\int_0^t P dt - \mu m g = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 P dt + \int_1^t P dt - \mu m g = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} P_0 +$$

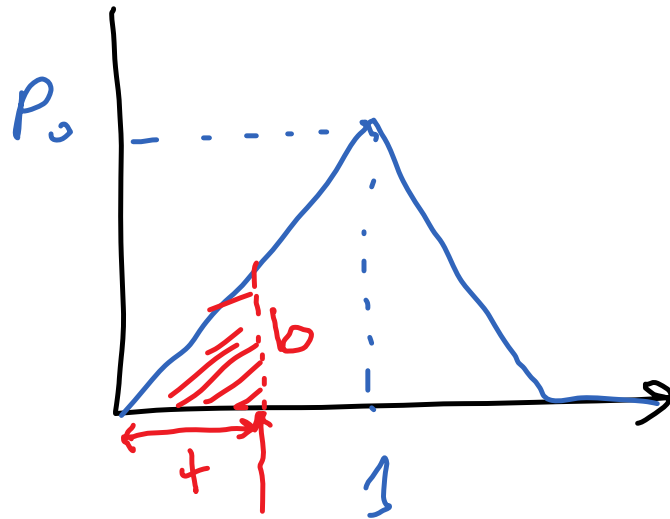


$$\frac{a}{1} = \frac{b}{p_0} \Rightarrow b = a p_0$$

$$(1-a)b + \frac{1}{2}(1-a)(p_0-b)$$

$$\Rightarrow (1-a)a p_0 + \frac{1}{2}(1-a)(p_0 - a p_0) - \mu m g = 0$$

$$\Rightarrow a = \checkmark$$



حالت سوم $t < 1$

$$\int_0^t P dt - \mu mg t = 0$$

$$\frac{t}{1} = \frac{b}{P_0} \rightarrow b = P_0 t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + (P_0 t) - \mu mg t = 0 \Rightarrow t \left(\frac{1}{2} P_0 t - \mu mg \right) = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{2 \mu mg}{P_0}$$

3.1

3.2

3.3

3.4