



دینامیک پیشرفته

دینامیک اجسام صلب

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir



یک جسم صلب غیر متعین دارای ۶ درجه آزادی می باشد

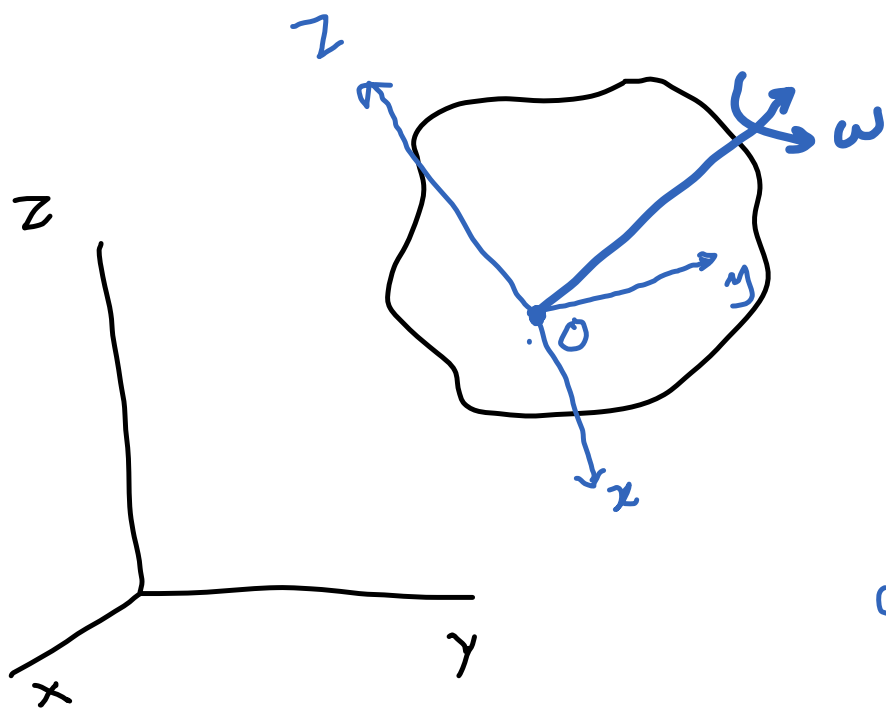
$\left. \begin{array}{l} ۳ درجه انتقالی مدعینت ۵ \\ ۳ درجه دورانی \end{array} \right\}$

میدان بیدار شدن دار:

$$O = \begin{bmatrix} O_x \\ O_y \\ O_z \end{bmatrix}$$

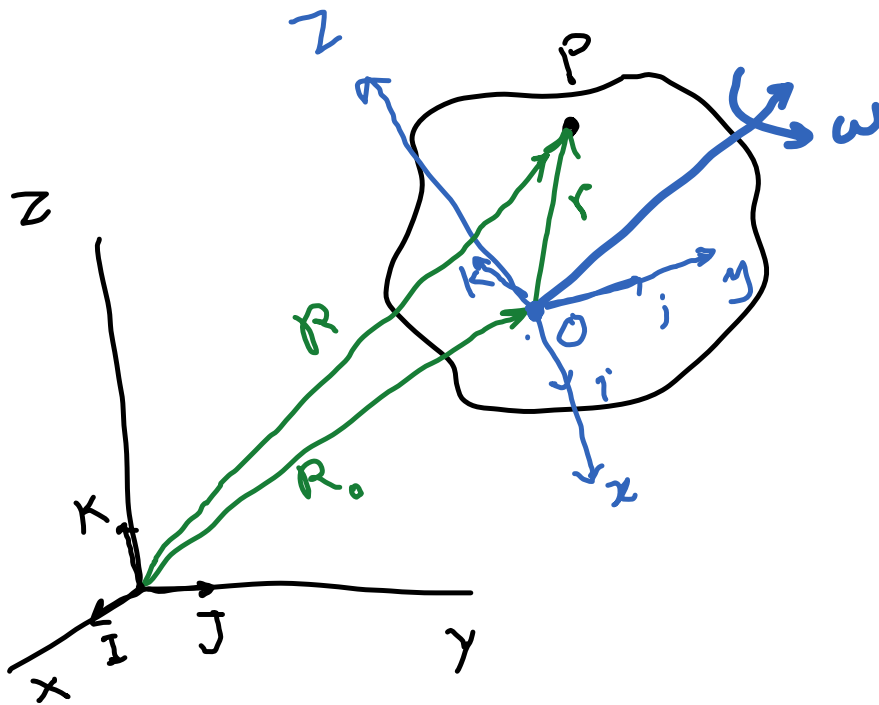
اما جهت را نمی توان
 یک بردار خالص را می توان
 نشان داد

اما سرعت زاویه ای جسم صلب را می توان
 بیک بردار نشان داد

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$


سیناتیک اجسام صلب

سرعت هر نقطه از جسم صلب با معلوم بودن
بدر، سرعت زاویه‌ای و جسم و سرعت
حقیقی یک نقطه از جسم مشخص می‌شود.



Body C.S. : xyz

$$R = R_0 + r, \quad r = xi + yj + zk$$

$$R_0 = XI + YJ + ZK$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

برای اجسام صلب، $\dot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}} = 0$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{R}}_0$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

حجم طلب دارای محور مختصات

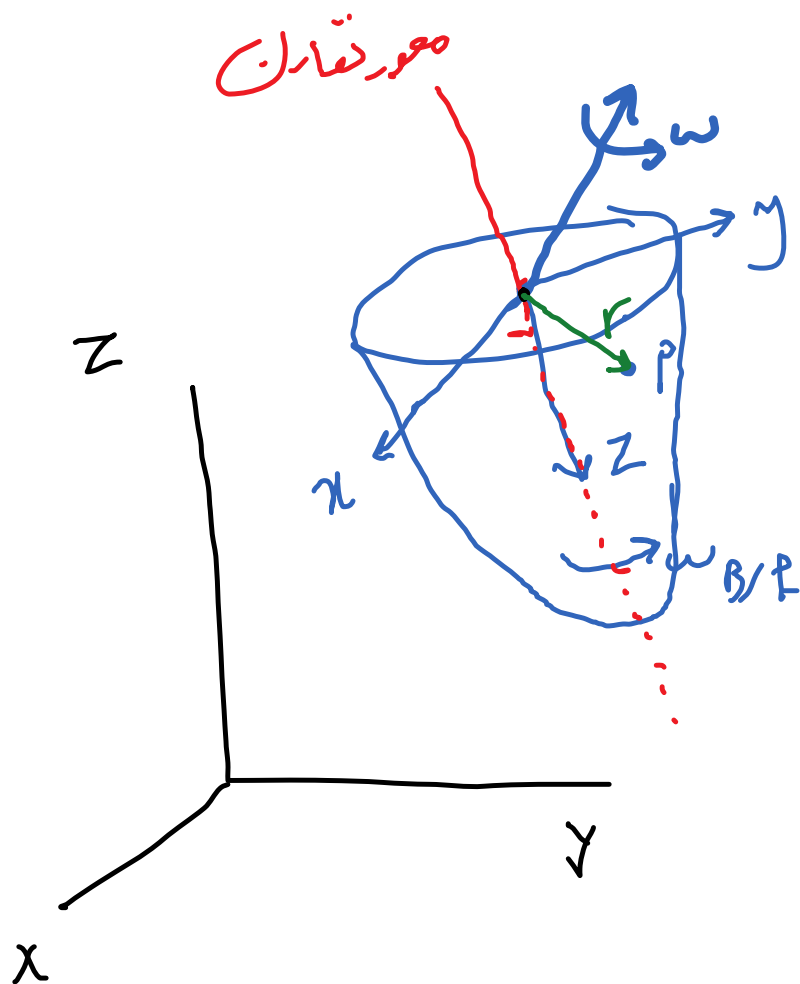
$\omega_{B/P}$ سرعت نسبی - جمع و تفریق نسبیت - فرم xyz

خیم ۲ و ۳ جداره آهن مل - قسم ملک پنجمه است

۷. سرعت، فریم، و مینیمم، مصرف

۱۰۰: سرسبز آبادی وسیع و صاف زمین: غرض مربع

$$\Omega = \omega + \omega_{B/f}$$





$$v = v_0 + \dot{r} + \omega \times r, \quad \dot{r} = \omega_{B/P} \times r$$

$$\Rightarrow v = v_0 + \omega_{B/P} \times r + \omega \times r = v_0 + (\omega_{B/P} + \omega) \times r$$

$$\Rightarrow v = v_0 + \Omega \times r$$

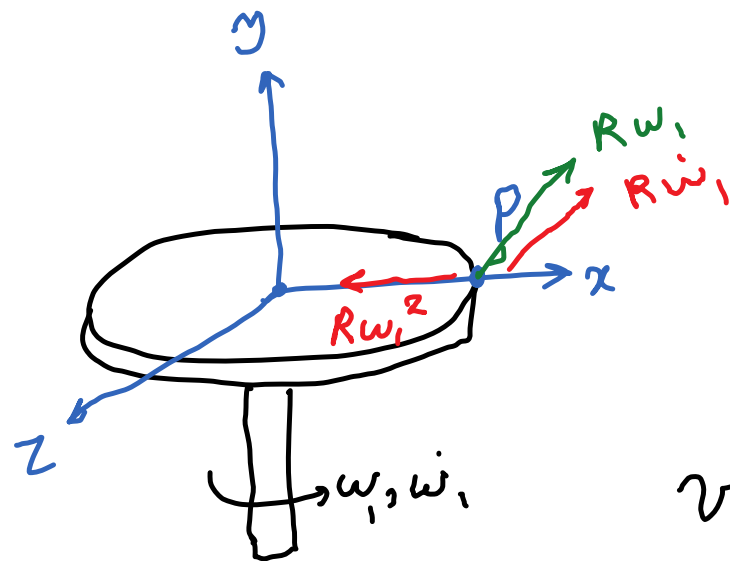
$$a = a_0 + \ddot{r} + 2\omega \times \dot{r} + \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r)$$

$$\ddot{r} = \dot{\omega}_{B/P} \times r + \omega_{B/P} \times (\omega_{B/P} \times r)$$

$$a = a_0 + \dot{\omega}_{B/P} \times r + \omega_{B/P} \times (\omega_{B/P} \times r) + 2\omega \times (\omega_{B/P} \times r) + \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r)$$

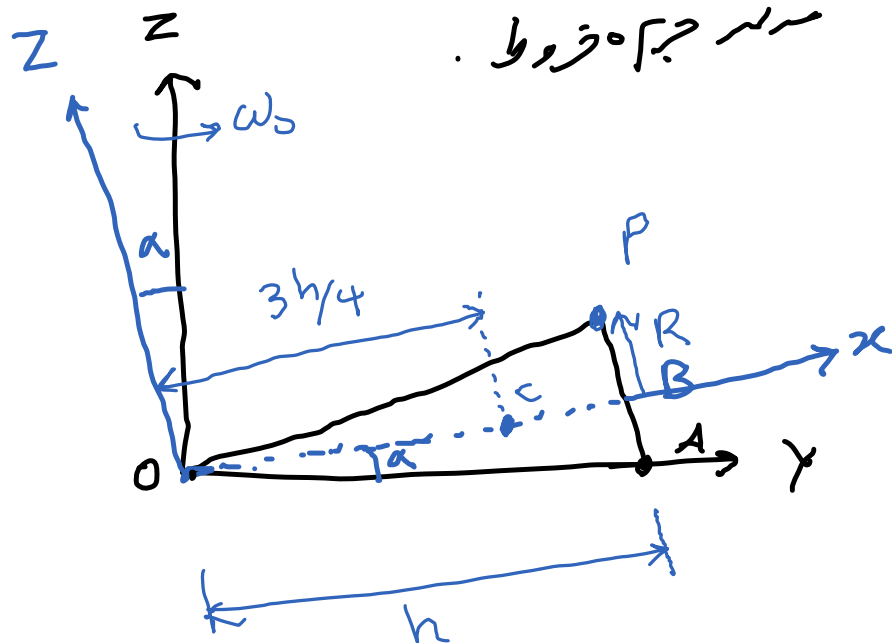
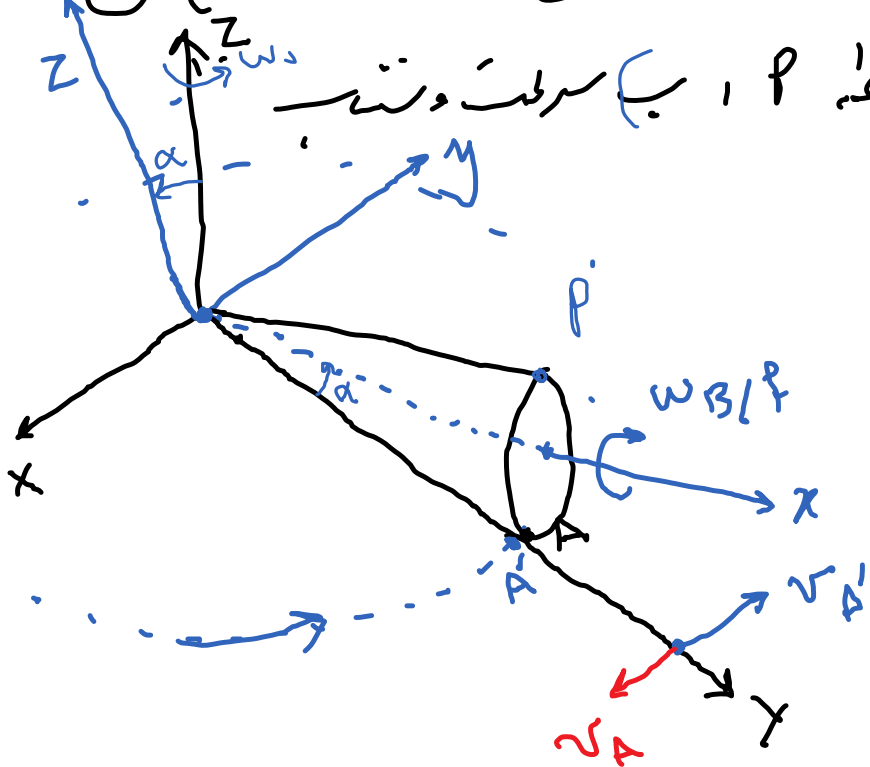


مثال: یک دیسک به شعاع R حول یک محور عمودی با ω_1 می‌چرخد. سرعت و شتاب نقطه P را با استفاده از روش‌های زیر محاسبه کنید.



2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-16-17-18-19-20-21-22-23-24-25-26-27-28-29-30-31-32-33-34-35-36-37-38-39-40-41-42-43-44-45-46-47-48-49-50-51-52-53-54-55-56-57-58-59-60-61-62-63-64-65-66-67-68-69-70-71-72-73-74-75-76-77-78-79-80-81-82-83-84-85-86-87-88-89-90-91-92-93-94-95-96-97-98-99-100-101-102-103-104-105-106-107-108-109-110-111-112-113-114-115-116-117-118-119-120-121-122-123-124-125-126-127-128-129-130-131-132-133-134-135-136-137-138-139-140-141-142-143-144-145-146-147-148-149-150-151-152-153-154-155-156-157-158-159-160-161-162-163-164-165-166-167-168-169-170-171-172-173-174-175-176-177-178-179-180-181-182-183-184-185-186-187-188-189-190-191-192-193-194-195-196-197-198-199-200-201-202-203-204-205-206-207-208-209-210-211-212-213-214-215-216-217-218-219-220-221-222-223-224-225-226-227-228-229-230-231-232-233-234-235-236-237-238-239-240-241-242-243-244-245-246-247-248-249-250-251-252-253-254-255-256-257-258-259-260-261-262-263-264-265-266-267-268-269-270-271-272-273-274-275-276-277-278-279-280-281-282-283-284-285-286-287-288-289-290-291-292-293-294-295-296-297-298-299-300-301-302-303-304-305-306-307-308-309-310-311-312-313-314-315-316-317-318-319-320-321-322-323-324-325-326-327-328-329-330-331-332-333-334-335-336-337-338-339-340-341-342-343-344-345-346-347-348-349-350-351-352-353-354-355-356-357-358-359-360-361-362-363-364-365-366-367-368-369-370-371-372-373-374-375-376-377-378-379-380-381-382-383-384-385-386-387-388-389-390-391-392-393-394-395-396-397-398-399-400-401-402-403-404-405-406-407-408-409-410-411-412-413-414-415-416-417-418-419-420-421-422-423-424-425-426-427-428-429-430-431-432-433-434-435-436-437-438-439-440-441-442-443-444-445-446-447-448-449-450-451-452-453-454-455-456-457-458-459-460-461-462-463-464-465-466-467-468-469-470-471-472-473-474-475-476-477-478-479-480-481-482-483-484-485-486-487-488-489-490-491-492-493-494-495-496-497-498-499-500-501-502-503-504-505-506-507-508-509-510-511-512-513-514-515-516-517-518-519-520-521-522-523-524-525-526-527-528-529-530-531-532-533-534-535-536-537-538-539-540-541-542-543-544-545-546-547-548-549-550-551-552-553-554-555-556-557-558-559-560-561-562-563-564-565-566-567-568-569-570-571-572-573-574-575-576-577-578-579-580-581-582-583-584-585-586-587-588-589-590-591-592-593-594-595-596-597-598-599-600-601-602-603-604-605-606-607-608-609-610-611-612-613-614-615-616-617-618-619-620-621-622-623-624-625-626-627-628-629-630-631-632-633-634-635-636-637-638-639-640-641-642-643-644-645-646-647-648-649-650-651-652-653-654-655-656-657-658-659-660-661-662-663-664-665-666-667-668-669-670-671-672-673-674-675-676-677-678-679-680-681-682-683-684-685-686-687-688-689-690-691-692-693-694-695-696-697-698-699-700-701-702-703-704-705-706-707-708-709-710-711-712-713-714-715-716-717-718-719-720-721-722-723-724-725-726-727-728-729-730-731-732-733-734-735-736-737-738-739-740-741-742-743-744-745-746-747-748-749-750-751-752-753-754-755-756-757-758-759-760-761-762-763-764-765-766-767-768-769-770-771-772-773-774-775-776-777-778-779-780-781-782-783-784-785-786-787-788-789-790-791-792-793-794-795-796-797-798-799-800-801-802-803-804-805-806-807-808-809-810-811-812-813-814-815-816-817-818-819-820-821-822-823-824-825-826-827-828-829-830-831-832-833-834-835-836-837-838-839-840-841-842-843-844-845-846-847-848-849-850-851-852-853-854-855-856-857-858-859-860-861-862-863-864-865-866-867-868-869-870-871-872-873-874-875-876-877-878-879-880-881-882-883-884-885-886-887-888-889-890-891-892-893-894-895-896-897-898-899-900-901-902-903-904-905-906-907-908-909-910-911-912-913-914-915-916-917-918-919-920-921-922-923-924-925-926-927-928-929-930-931-932-933-934-935-936-937-938-939-940-941-942-943-944-945-946-947-948-949-950-951-952-953-954-955-956-957-958-959-960-961-962-963-964-965-966-967-968-969-970-971-972-973-974-975-976-977-978-979-980-981-982-983-984-985-986-987-988-989-990-991-992-993-994-995-996-997-998-999-1000-1001-1002-1003-1004-1005-1006-1007-1008-1009-1010-1011-1012-1013-1014-1015-1016-1017-1018-1019-1020-1021-1022-1023-1024-1025-1026-1027-1028-1029-1030-1031-1032-1033-1034-1035-1036-1037-1038-1039-1040-1041-1042-1043-1044-1045-1046-1047-1048-1049-1050-1051-1052-1053-1054-1055-1056-1057-1058-1059-1060-1061-1062-1063-1064-1065-1066-1067-1068-1069-1070-1071-1072-1073-1074-1075-1076-1077-1078-1079-1080-1081-1082-1083-1084-1085-1086-1087-1088-1089-1090-1091-1092-1093-1094-1095-1096-1097-1098-1099-1100-1101-1102-1103-1104-1105-1106-1107-1108-1109-1110-1111-1112-1113-1114-1115-1116-1117-1118-1119-1120-1121-1122-1123-1124-1125-1126-1127-1128-1129-1130-1131-1132-1133-1134-1135-1136-1137-1138-1139-1140-1141-1142-1143-1144-1145-1146-1147-1148-1149-1150-1151-1152-1153-1154-1155-1156-1157-1158-1159-1160-1161-1162-1163-1164-1165-1166-1167-1168-1169-1170-1171-1172-1173-1174-1175-1176-1177-1178-1179-1180-1181-1182-1183-1184-1185-1186-1187-1188-1189-1190-1191-1192-1193-1194-1195-1196-1197-1198-1199-1200-1201-1202-1203-1204-1205-1206-1207-1208-1209-1210-1211-1212-1213-1214-1215-1216-1217-1218-1219-1220-1221-1222-1223-1224-1225-1226-1227-1228-1229-1230-1231-1232-1233-1234-1235-1236-1237-1238-1239-1240-1241-1242-1243-1244-1245-1246-1247-1248-1249-1250-1251-1252-1253-1254-1255-1256-1257-1258-1259-1260-1261-1262-1263-1264-1265-1266-1267-1268-1269-1270-1271-1272-1273-1274-1275-1276-1277-1278-1279-1280-1281-1282-1283-1284-1285-1286-1287-1288-1289-1290-1291-1292-1293-1294-1295-1296-1297-1298-1299-1300-1301-1302-1303-1304-1305-1306-1307-1308-1309-1310-1311-1312-1313-1314-1315-1316-1317-1318-1319-1320-1321-1322-1323-1324-1325-1326-1327-1328-1329-1330-1331-1332-1333-1334-1335-1336-1337-1338-1339-1340-1341-1342-1343-1344-1345-1346-1347-1348-1349-1350-1351-1352-1353-1354-1355-1356-1357-1358-1359-1360-1361-1362-1363-1364-1365-1366-1367-1368-1369-1370-1371-1372-1373-1374-1375-1376-1377-1378-1379-1380-1381-1382-1383-1384-1385-1386-1387-1388-1389-1390-1391-1392-1393-1394-1395-1396-1397-1398-1399-1400-1401-1402-1403-1404-1405-1406-1407-1408-1409-1410-1411-1412-1413-1414-1415-1416-1417-1418-1419-1420-1421-1422-1423-1424-1425-1426-1427-1428-1429-1430-1431-1432-1433-1434-1435-1436-1437-1438-1439-1440-1441-1442-1443-1444-1445-1446-1447-1448-1449-1450-1451-1452-1453-1454-1455-1456-1457-1458-1459-1460-1461-1462-1463-1464-1465-1466-1467-1468-1469-1470-1471-1472-1473-1474-1475-1476-1477-1478-1479-1480-1481-1482-1483-1484-1485-1486-1487-1488-1489-1490-1491-1492-1493-1494-1495-1496-1497-1498-1499-1500-1501-1502-1503-1504-1505-1506-1507-1508-1509-1510-1511-1512-1513-1514-1515-1516-1517-1518-1519-1520-1521-1522-1523-1524-1525-1526-1527-1528-1529-1530-1531-1532-1533-1534-1535-1536-1537-1538-1539-1540-1541-1542-1543-1544-1545-1546-1547-1548-1549-1550-1551-1552-1553-1554-1555-1556-1557-1558-1559-1560-1561-1562-1563-1564-1565-1566-1567-1568-1569-1570-1571-1572-1573-1574-1575-1576-1577-1578-1579-1580-1581-1582-1583-1584-1585-1586-1587-1588-1589-1590-1591-1592-1593-1594-1595-1596-1597-1598-1599-1600-1601-1602-1603-1604-1605-1606-1607-1608-1609-1610-1611-1612-1613-1614-1615-1616-1617-1618-1619-1620-1621-1622-1623-1624-1625-1626-1627-1628-1629-1630-1631-1632-1633-1634-1635-1636-1637-1638-1639-1640-1641-1642-1643-1644-1645-1646-1647-1648-1649-1650-1651-1652-1653-1654-1655-1656-1657-1658-1659-1660-1661-1662-1663-1664-1665-1666-1667-1668-1669-1670-1671-1672-1673-1674-1675-1676-1677-1678-1679-1680-1681-1682-1683-1684-1685-1686-1687-1688-1689-1690-1691-1692-1693-1694-1695-1696-1697-1698-1699-1700-1701-1702-1703-1704-1705-1706-1707-1708-1709-1710-1711-1712-1713-1714-1715-1716-1717-1718-1719-1720-1721-1722-1723-1724-1725-1726-1727-1728-1729-1730-1731-1732-1733-1734-1735-1736-1737-1738-1739-1740-1741-1742-1743-1744-1745-1746-1747-1748-1749-1750-1751-1752-1753-1754-1755-1756-1757-1758-1759-1760-1761-1762-1763-1764-1765-1766-1767-1768-1769-1770-1771-1772-1773-1774-1775-1776-1777-1778-1779-1780-1781-1782-1783-1784-1785-1786-1787-1788-1789-1790-1791-1792-1793-1794-1795-1796-1797-1798-1799-1800-1801-1802-1803-1804-1805-1806-1807-1808-1809-1810-1811-1812-1813-1814-1815-1816-1817-1818-1819-1820-1821-1822-1823-1824-1825-1826-1827-1828-1829-1830-1831-1832-1833-1834-1835-1836-1837-1838-1839-1840-1841-1842-1843-1844-1845-1846-1847-1848-1849-1850-1851-1852-1853-1854-1855-1856-1857-1858-1859-1860-1861-1862-1863-1864-1865-1866-1867-1868-1869-1870-1871-1872-1873-1874-1875-1876-1877-1878-1879-1880-1881-1882-1883-1884-1885-1886-1887-1888-1889-1890-1891-1892-1893-1894-1895-1896-1897-1898-1899-1900-1901-1902-1903-1904-1905-1906-1907-1908-1909-1910-1911-1912-1913-1914-1915-1916-1917-1918-1919-1920-1921-1922-1923-1924-1925-1926-1927-1928-1929-1930-1931-1932-1933-1934-1935-1936-1937-1938-1939-1940-1941-1942-1943-1944-1945-1946-1947-1948-1949-1950-1951-1952-1953-1954-1955-1956-1957-1958-1959-1960-1961-1962-1963-1964-1965-1966-1967-1968-1969-1970-1971-1972-1973-1974-1975-1976-1977-1978-1979-1980-1981-1982-1983-1984-1985-1986-1987-1988-1989-1990-1991-1992-1993-1994-1995-1996-1997-1998-1999-2000-2001-2002-2003-2004-2005-2006-2007-2008-2009-2010-2011-2012-2013-2014-2015-2016-2017-2018-2019-2020-2021-2022-2023-2024-2025-2026-2027-2028-2029-2030-2031-2032-2033-2034-2035-2036-2037-2038-2039-2040-2041-2042-2043-2044-2045-2046-2047-2048-2049-2050-2051-2052-2053-2054-2055-2056-2057-2058-2059-2060-2061-2062-2063-2064-2065-2066-2067-2068-2069-2070-2071-2072-2073-2074-2075-2076-2077-2078-2079-2080-2081-2082-2083-2084-2085-2086-2087-2088-2089-2090-2091-2092-2093-2094-2095-2096-2097-2098-2099-2100-2101-2102-2103-2104-2105-2106-2107-2108-2109-2110-2111-2112-2113-2114-2115-2116-2117-2118-2119-2120-2121-2122-2123-2124-2125-2126-2127-2128-2129-2130-2131-2132-2133-2134-2135-2136-2137-2138-2139-2140-2141-2142-2143-2144-2145-2146-2147-2148-2149-2150-2151-2152-2153-2154-2155-2156-2157-2158-2159-2160-2161-2162-2163-2164-2165-2166-2167-2168-2169-2170-2171-2172-2173-2174-2175-2176-2177-2178-2179-2180-2181-2182-2183-2184-2185-2186-2187-2188-2189-2190-2191-2192-2193-2194-2195-2196-2197-2198-2199-2200-2201-2202-2203-2204-2205-2206-2207-2208-2209-2210-2211-2212-2213-2214-2215-2216-2217-2218-2219-2220-2221-2222-2223-2224-2225-2226-2227-2228-2229-2230-2231-2232-2233-2234-2235-2236-2237-2238-2239-2240-2241-2242-2243-2244-2245-2246-2247-2248-2249-2250-2251-2252-2253-2254-2255-2256-2257-2258-2259-2260-2261-2262-2263-2264-2265-2266-2267-2268-2269-2270-2271-2272-2273-2274-2275-2276-2277-2278-2279-2280-2281-2282-2283-2284-2285-2286-2287-2288-2289-2290-2291-2292-2293-2294-2295-2296-2297-2298-2299-2300-2301-2302-2303-2304-2305-2306-2307-2308-2309-2310-2311-2312-2313-2314-2315-2316-2317-2318-2319-2320-2321-2322-2323-2324-2325-2326-2327-2328-2329-2330-2331-2332-2333-2334-2335-2336-2337-2338-2339-2340-2341-2342-2343-2344-2345-2346-2347-2348-2349-2350-2351-2352-2353-2354-2355-2356-2357-2358-2359-2360-2361-2362-2363-2364-2365-2366-2367-2368-2369-2370-2371-2372-2373-2374-2375-2376-2377-2378-2379-2380-2381-2382-2383-2384-2385-2386-2387-2388-2389-2390-2391-2392-2393-2394-2395-2396-2397-2398-2399-2400-2401-2402-2403-2404-2405-2406-2407-2408-2409-2410-2411-2412-2413-2414-2415-2416-2417-2418-2419-2420-2421-2422-2423-2424-2425-2426-2427-2428-2429-2430-2431-2432-2433-2434-2435-2436-2437-2438-2439-2440-2441-2442-2443-2444-2445-2446-2447-2448-2449-2450-2451-2452-2453-2454-2455-2456-2457-2458-2459-2460-2461-2462-2463-2464-2465-2466-2467-2468-2469-2470-2471-2472-2473-2474-2475-2476-2477-2478-2479-2480-2481-2482-2483-2484-2485-2486-2487-2488-2489-2490-2491-2492-2493-2494-2495-2496-2497-2498-2499-2500-2501-2502-2503-2504-2505-2506-2507-2508-2509-2510-2511-2512-2513-2514-2515-2516-2517-2518-2519-2520-2521-2522-2523-2524-2525-2526-2527-2528-2529-2530-2531-2532-2533-2534-2535-2536-2537-2538-2539-2540-2541-2542-2543-2544-2545-2546-2547-2548-2549-2550-2551-2552-2553-2554-2555-2556-2557-2558-2559-2560-2561-2562-2563-2564-2565-2566-2567-2568-2569-2570-2571-2572-2573-2574-2575-2576-2577-2578-2579-2580-2581-2582-2583-2584-2585-2586-2587-2588-2589-2590-2591-2592-2593-2594-2595-2596-2597-2598-2599-2600-2601-2602-2603-2604-2605-2606-2607-2608-2609-2610-2611-2612

مثال 4.2 یک مخروط صلب با زاویه 2α به طوری که با افتادن لغزش روی یک سطح افقی حول محور Z با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. ارتفاع مخروط h و ارتفاع آن R است. تعیین کنید الف. سرعت و شتاب نقطه P ب. سرعت و شتاب مرکز جرم مخروط.



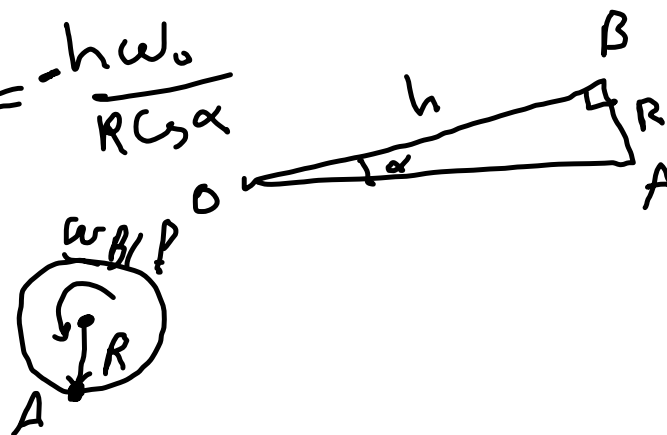
ω ، سرعت زاویه‌ای در فریم 2
 $\omega_1 = \omega_{B/P}$ ، سرعت زاویه‌ای مورد نیاز حول محور x

$$\omega = \omega_0 \cos \alpha k + \omega_0 \sin \alpha i$$

حین حرکت بدون لغزش است $\omega_{B/P}$ و اینکه ω_0 می‌باشد که به دلیل رابطه آنها با هم است.

$$v_A = |OA| \omega_0 = \frac{h}{R \cos \alpha} \omega_0 \quad \omega_{B/P} = -\frac{h \omega_0}{R \cos \alpha}$$

$$v_A = \omega_{B/P} R \quad v_A = -v_A'$$





$$\omega_{B/f} = -\frac{h\omega_0}{R\cos\alpha} i$$

$$v_A + v_{A'} = 0 \rightarrow \omega_{B/f} = \checkmark$$

الف: برای نقطه P

$$v = \cancel{v_0} + \omega_{B/f} \times r + \omega \times r, \quad r = hi + Rk$$

$$\dot{\omega} = 0, \quad \dot{\omega}_{B/f} = 0, \quad a_0 = 0$$

(I) و (II)
=

$$v_p = \checkmark, \quad a_p = \checkmark$$

ب، سرعت، C

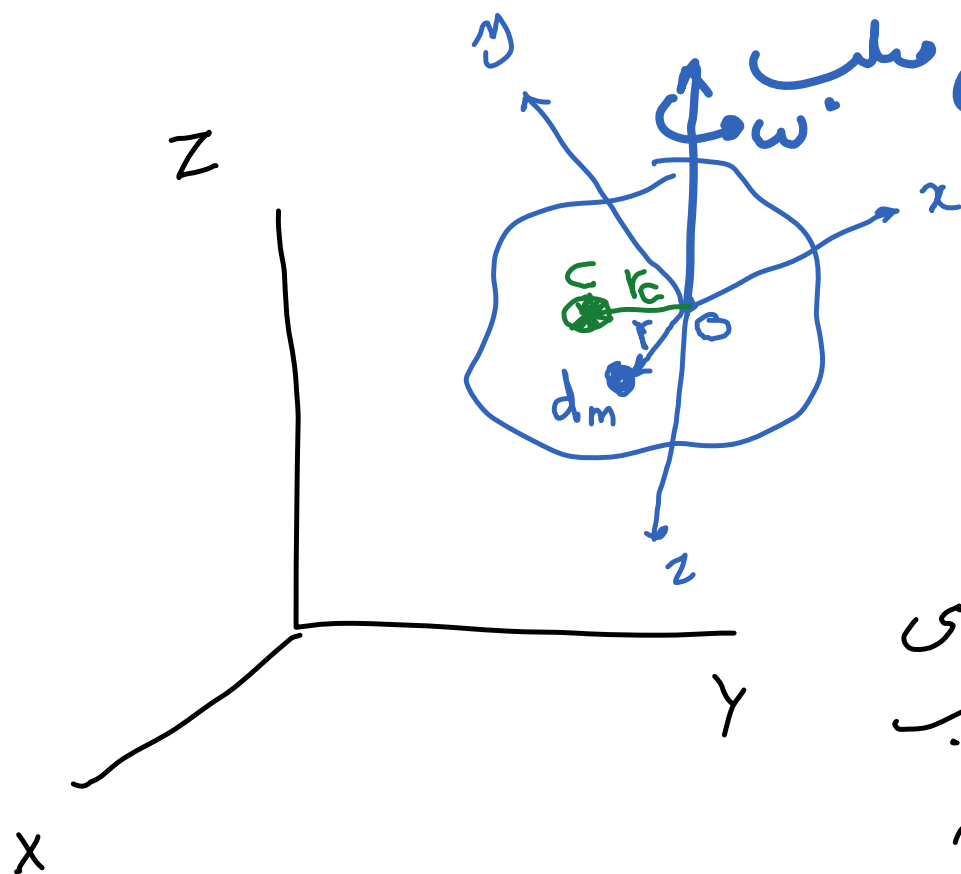
$$r = \frac{3h}{4} i'.$$

$$v_c = \frac{3}{4} h \omega_0 \cos \alpha j$$

$$a_c = -\frac{3}{4} h \omega_0^2 \cos^2 \alpha i' + \frac{3}{4} h \omega_0^2 \sin \alpha \cos \alpha k$$

مoment فضای و زادی یک جسم صلب

نکته: مرکز جرم صلب



$$dL = v dm$$

$$L = \int_m v dm$$

مoment فضای
جسم صلب

$$v = v_0 + \omega \times r$$

$$\Rightarrow L = \int (v_0 + \omega \times r) dm = m v_0 + \omega \times \int r dm$$



$$L = \int (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm = m\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \int \mathbf{r} dm$$

$$\mathbf{r}_c = \frac{\int \mathbf{r} dm}{m} \Rightarrow m\mathbf{r}_c = \int \mathbf{r} dm$$

از تعریف مرکز جرم داریم

$$\Rightarrow L = m\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (m\mathbf{r}_c) = m(\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c) = m\mathbf{v}_c$$

$$\Rightarrow \boxed{L = m\mathbf{v}_c}$$



مستقیم زاویه ای

مستقیم زاویه ای همان
 $dH_o = r \times v dm \Rightarrow H_o = \int r \times v dm$

$$= \int r \times (v_o + \omega \times r) dm = \int r \times v_o dm + \int r \times (\omega \times r) dm$$

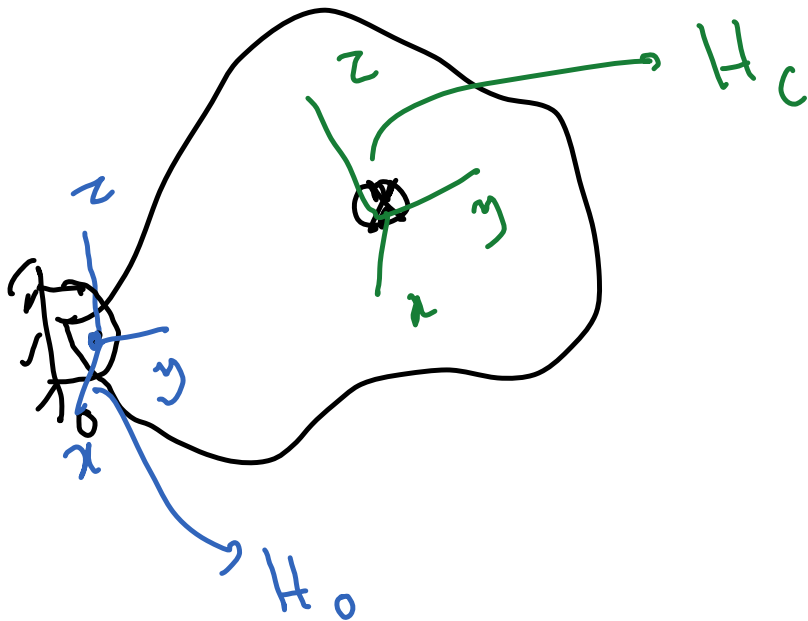
$$= -v_o \times \int r dm + \int r \times (\omega \times r) dm = -v_o \times (m r_c) + \int r \times (\omega \times r) dm$$

if $v_o = 0$, $\omega \neq 0$ $\Rightarrow$ $-v_o \times (m r_c) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_o = \int r \times (\omega \times r) dm \\ H_c = \int r \times (\omega \times r) dm \end{cases}$$

$O \equiv C \rightarrow r_c = 0$

جهت سادگی معکوبه، مبدأ فریم xyz را یاروی مرکز فریم صلب خارجی ایم
! روی یک نقطه از جسم صلب که ثابت است.



$$H_c = \int r \times (\omega \times r) dm$$

$$r = x i + y j + z k$$

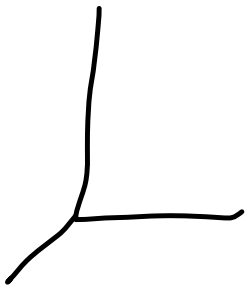
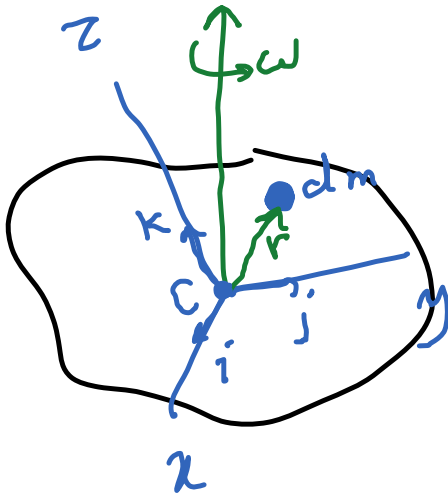
$$\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$$

$$r \times (\omega \times r) =$$

$$[y(\omega_x y - \omega_y x) - z(\omega_z x - \omega_x z)] i$$

$$+ [z(\omega_y z - \omega_z y) - x(\omega_x y - \omega_y x)] j$$

$$+ [x(\omega_z x - \omega_x z) - y(\omega_y z - \omega_z y)] k$$



$$H = H_x i + H_y j + H_z k$$

$$H_x = \omega_x \int_m (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int xy dm - \omega_z \int xz dm$$

$$H_y = -\omega_x \int xy dm + \omega_y \int (x^2 + z^2) dm - \omega_z \int yz dm$$

$$H_z = -\omega_x \int xz dm - \omega_y \int yz dm + \omega_z \int (x^2 + y^2) dm$$

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm, \quad I_{xy} = - \int xy dm, \quad I_{xz} = - \int xz dm$$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm, \quad I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$$

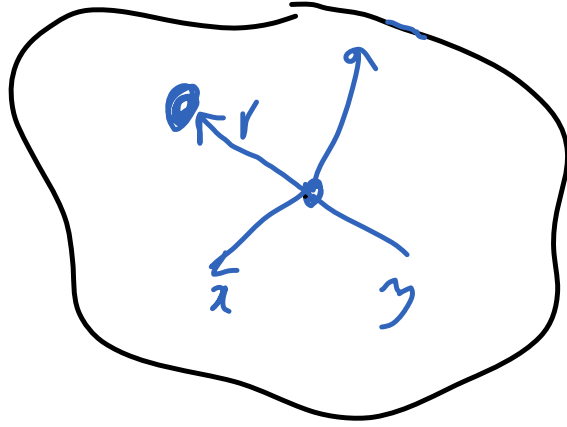
بمعرفی

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$H_o = I_o \omega, \quad H_c = I_c \omega, \quad H_c = \bar{I} \omega$$

I_o ممان اینرسی حول نقطه ثابت O
 I_c ممان اینرسی حول مرکز جرم C (c)

معادلات حرکتی در این زمینه هم به میدان رست. هم از انتفا بگذر
والبته ارت هم به جهت محوری $\sim \sim \sim \sim$





دینامیک پیشرفته، دینامیک اجسام صلب

دکتر امین نیکوبین