



دینامیک پیشرفته

دینامیک اجسام صلب

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

$$H = H_x i + H_y j + H_z k$$

$$H_x = \omega_x \int_m (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int x y dm - \omega_z \int x z dm$$

$$H_y = -\omega_x \int x y dm + \omega_y \int (x^2 + z^2) dm - \omega_z \int y z dm$$

$$H_z = -\omega_x \int x z dm - \omega_y \int y z dm + \omega_z \int (x^2 + y^2) dm$$

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm, \quad I_{xy} = - \int x y dm, \quad I_{xz} = - \int x z dm$$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm, \quad I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$$

بمعرفی

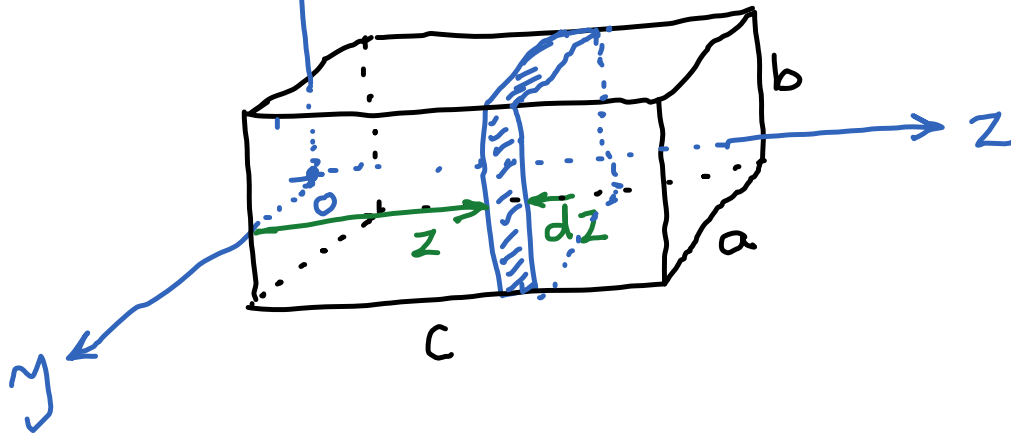
$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$H_o = I_o \omega, \quad H_c = I_c \omega, \quad H_c = \bar{I} \omega$$

I_o ممان اینرسی حول نقطه ثابت O
 I_c ممان اینرسی حول مرکز جرم C (c)

فصل ۷، بڑی مکعب مستطیل زیر، مائیں صال (انڈی کی) راہ صابہ لید

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm$$



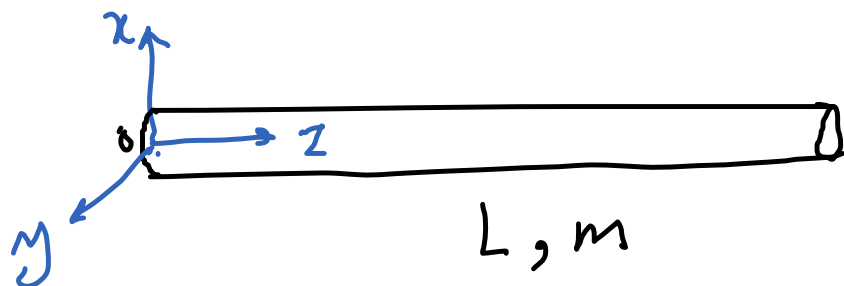
صیغہ کی حساب

$$c \gg a, b, \quad A = ab$$

$$\Rightarrow I_{yy} \approx \int z^2 dm, \quad dm = \rho dV = \rho A dz$$

$$\Rightarrow I_{yy} = \rho A \int_0^c z^2 dz = \rho A \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^c = \frac{\rho A c^3}{3} = \frac{\rho A c c^2}{3}$$

$$= \frac{m c^2}{3}$$



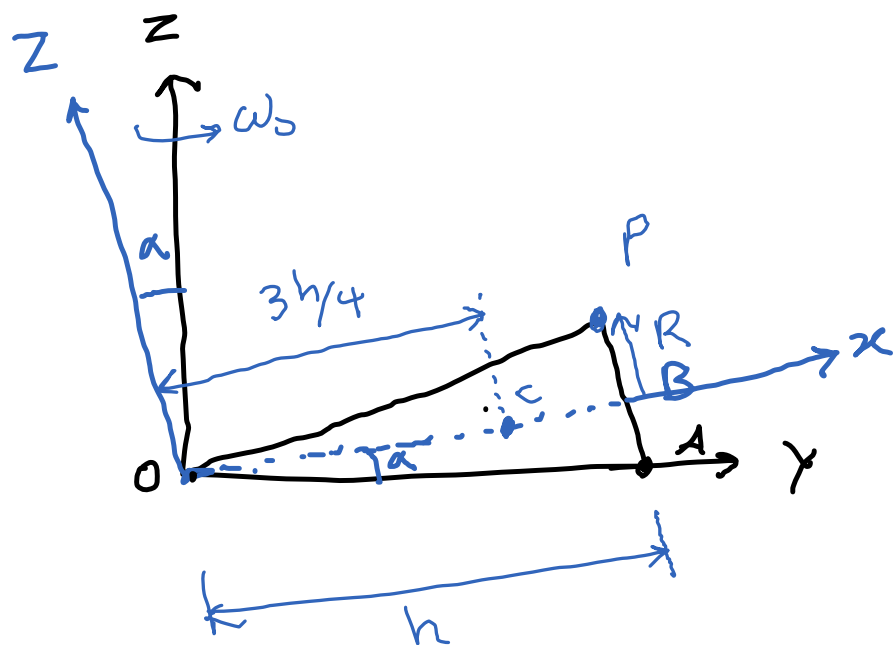
$$I_{yy} = \frac{ml^2}{3}$$

$$I_{xx} = \frac{ml^2}{3}, \quad I_{zz} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{I}_0 = \begin{bmatrix} \frac{ml^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



مثال 4.3، برای مثال 4.2 همونک زائیدی و همونک قطعی راه حل بگیر.
الف. مبدأ دست، همونک در نقطه 0 قرار دار، ب. مبدأ دست همونک
در نقطه C قرار دار.



$$\omega = \omega_0 \cos \alpha k + \omega_0 \sin \alpha i$$

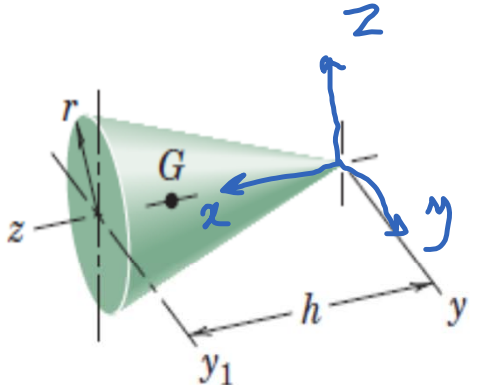
$$\omega_{B/P} = -\frac{h\omega_0}{R \cos \alpha} i$$

$$v_c = \frac{3}{4} h\omega_0 \cos \alpha j$$

$$L = m v_c = \frac{3}{4} m h \omega_0 \cos \alpha \mathbf{j}$$

$$H_o = I_o \Omega, \quad H_c = I_c \Omega$$

$$\Omega = \omega + \omega_{B/P} = \left(\omega_0 \sin \alpha - \frac{\omega_0}{\cos \alpha} \right) \mathbf{i} + \omega_0 \cos \alpha \mathbf{k}$$

 Right-Circular Cone	$\bar{z} = \frac{3h}{4}$	$I_{yy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{5}mh^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$
--	--------------------------	---

$$I_0 = \begin{bmatrix} \frac{3mR^2}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{5}mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{5}mh^2 \end{bmatrix}$$

$$H_0 = I_0 \omega$$



$$H_0 = I_0 \Omega = \begin{bmatrix} \frac{3mR^2}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{5}mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{5}mh^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_0 \sin \alpha - \frac{\omega_0}{\cos \alpha} \\ 0 \\ \omega_0 \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$H_0 = H_{0x} i + H_{0y} j + H_{0z} k$$

$$H_{0x} = \frac{3mR^2}{10} \left(\omega_0 \sin \alpha - \frac{\omega_0}{\cos \alpha} \right)$$

$$H_{0y} = 0, \quad H_{0z} = \left(\frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{5}mh^2 \right) \omega_0 \cos \alpha$$

$$H_c = I_c \Omega = \begin{bmatrix} \frac{3m}{10} m R^2 & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{3}{20} R^2 + \frac{3}{80} h^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\left(\frac{3}{20} R^2 + \frac{3}{80} h^2\right) \end{bmatrix} \Omega$$



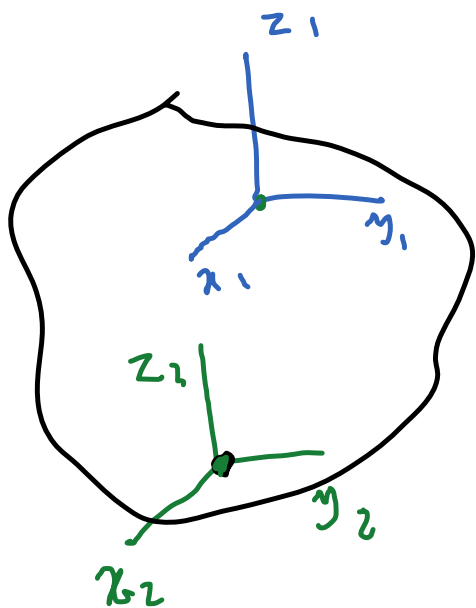
نظری محوری موازی ماندر اندکی

$$x_2 = x_1 + a, \quad y_2 = y_1 + b, \quad z_2 = z_1 + c$$

مجموع 2 سیت 1 فریم 3 - اندازه $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ جابجاست

باراستن ماندر من اندکی محل فریم 1، ماندر

من اندکی نسبت به فریم 2 چه می شود؟ $I_2 = ?$ $I_1 = \checkmark$





$$I_{x_2 x_2} = \int (y_1^2 + z_1^2) dm = \int \left[(y_1 + b)^2 + (z_1 + c)^2 \right] dm$$

$$= I_{x_1 x_1} + 2b \int y_1 dm + 2c \int z_1 dm + (b^2 + c^2)m$$

$$= I_{x_1 x_1} + 2m(b y_c + c z_c) + m(b^2 + c^2)$$

الک فزیم ۱ در مرکز جرم مکرار داشته باشد، $\int y_1 dm = 0$, $\int z_1 dm = 0$

$$\Rightarrow I_{x x_2} = \boxed{I_{x x_1}} + m(b^2 + c^2)$$

$\bar{I}_{xx}$

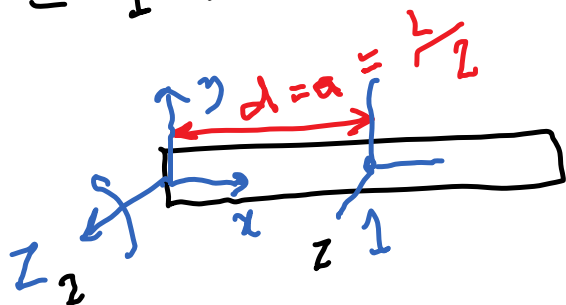


$$[I]_1 = I_c + m \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

باغرفتن تبدیل به مبدأ خیم اندر مرکز جرم باشد

حالت صفحه‌ای (I_{zz})

$$I = \bar{I} + md^2$$

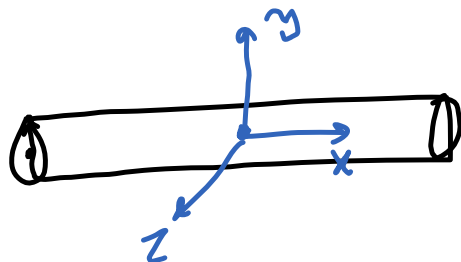


$$I_{zz} = \bar{I} + md^2$$

$$\Rightarrow \frac{ml^2}{3} = \bar{I} + m \frac{l^2}{4} \Rightarrow \bar{I} = \frac{ml^2}{12}$$

دینامیک پیشرفته، دینامیک اجسام صلب

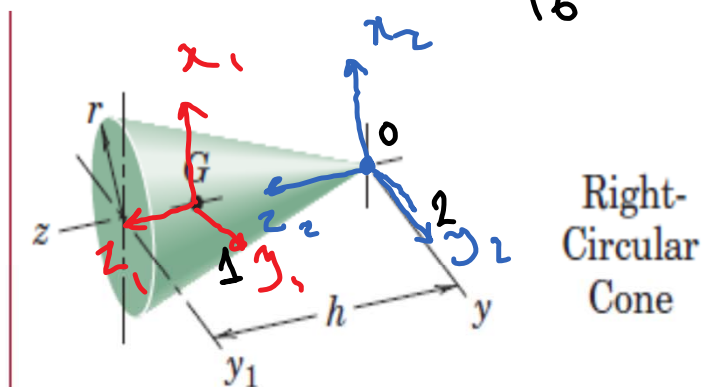
دکتر امین نیکوبین



$$\bar{I} = \bar{I}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{12} \end{bmatrix}$$



$$\frac{9}{16} + \frac{3}{80} = \frac{45+3}{80} = \frac{48}{80} = \frac{3}{5}$$



$$\bar{z} = \frac{3h}{4}$$

$$I_{x_2 x_2} = I_{y_2 y_2} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{5}mh^2$$

$$I_{y_1 y_1} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$$

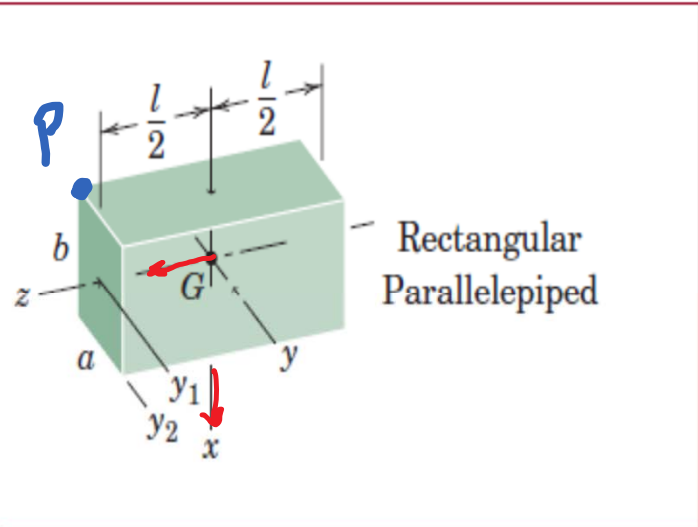
$$I_{z_2 z_2} = \frac{3}{10}mr^2$$

$$I_{x_2 x_2} = \bar{I}_{y_2 y_2} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$$

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{x_2 x_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_2 y_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_2 z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{I}_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_{z_1} \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} (-\frac{3h}{4})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{3h}{4})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a=0, b=0, c=-\frac{3h}{4}$$

فریم 2 سین 1 حیدر جایی است.

 Rectangular Parallelepiped	—	$\bar{I}_{xx} = \frac{1}{12}m(a^2 + l^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{12}m(b^2 + l^2)$ $\bar{I}_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{12}mb^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{y_2y_2} = \frac{1}{3}m(b^2 + l^2)$
---	----------	--

مختصات، ماتریس همان اندکی را حاصل نقطه P حساب کنند.

جابجایی در امتداد x

جابجایی در امتداد y

جابجایی در امتداد z

$a = -\frac{b}{2}$

$b = -\frac{a}{2}$

$c = \frac{l}{2}$

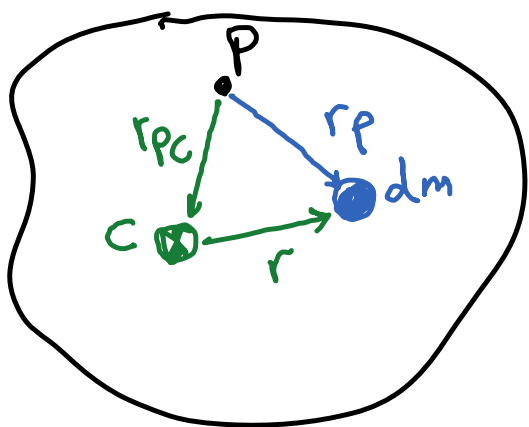
$I_P = \bar{I} + m[\dots]$

جابجایی مستقیم زاویه‌ای

$$H_P = \int r_P \times v \, dm$$

$$v = v_c + \omega \times r$$

$$r_P = r_{PC} + r$$



$$H_P = \int (r_{PC} + r) \times (v_c + \omega \times r) \, dm = \dots = r_{PC} \times m v_c + \int r \times (\omega \times r) \, dm$$

$$L = m v_c \Rightarrow H_P = r_{PC} \times L + H_C$$



مثال 4.5 ، مدل = ضوابط این رابطه را یک کنید

$$H_o = r_{oc} \times L + H_c \quad , \quad r_{oc} = \frac{3}{4} h_i \quad , \quad L = \frac{3}{4} m h \omega_s Gaj$$



دینامیک پیشرفته، دینامیک اجسام صلب

دکتر امین نیکوبین