



دینامیک پیشرفته

سینماتیک

ماتریس دوران، حرکت در مختصات انتقالی-چرخشی

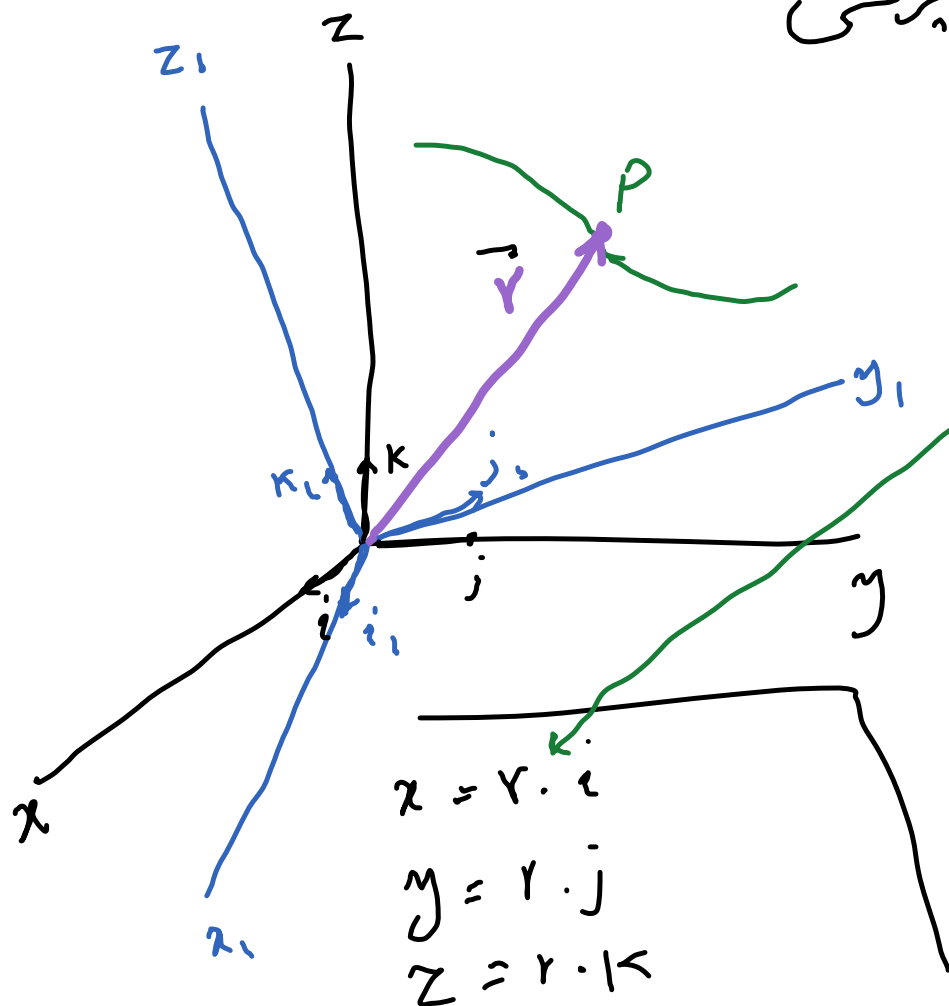
دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir



تبدیل دستگاه‌های مختصات در حالت چرخشی



بین ۲ در فریم z $\leftarrow \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$

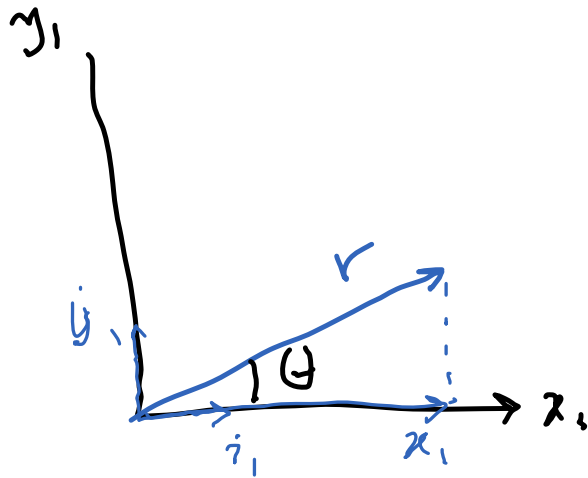
بین ۲ در فریم z_1 $\leftarrow \vec{r} = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1$

dot product

$$x_1 = r \cdot i_1 = x i \cdot i_1 + y j \cdot i_1 + z k \cdot i_1$$

$$y_1 = r \cdot j_1 = x i \cdot j_1 + y j \cdot j_1 + z k \cdot j_1$$

$$z_1 = r \cdot k_1 = x i \cdot k_1 + y j \cdot k_1 + z k \cdot k_1$$



$$x_1 = r \cdot e_1 = |r| |e_1| \cos \theta$$

$$y_1 = r \cdot j_1$$

$$i_1 \cdot e_1 = 1, \quad j_1 \cdot j_1 = 1, \quad k_1 \cdot k_1 = 1$$

$$i_1 \cdot j_1 = 0, \quad i_1 \cdot k_1 = 0, \quad k_1 \cdot j_1 = 0$$



$$x_1 = \dot{r} \cdot \dot{i}_1 = x \dot{i} \cdot \dot{i}_1 + y \dot{j} \cdot \dot{i}_1 + z \dot{k} \cdot \dot{i}_1, \quad i \cdot i_1 = i_1 \cdot i$$

$$y_1 = \dot{r} \cdot \dot{j}_1 = x \dot{i} \cdot \dot{j}_1 + y \dot{j} \cdot \dot{j}_1 + z \dot{k} \cdot \dot{j}_1$$

$$z_1 = \dot{r} \cdot \dot{k}_1 = x \dot{i} \cdot \dot{k}_1 + y \dot{j} \cdot \dot{k}_1 + z \dot{k} \cdot \dot{k}_1$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \cdot i & i_1 \cdot j & i_1 \cdot k \\ j_1 \cdot i & j_1 \cdot j & j_1 \cdot k \\ k_1 \cdot i & k_1 \cdot j & k_1 \cdot k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

این ماتریس از سه بردار ortonormal تشکیل شده است. $C^{-1} = C^T$ ، C یک ماتریس ortonormal است.



$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C^T \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

$$C^T = C^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{C^{-1}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

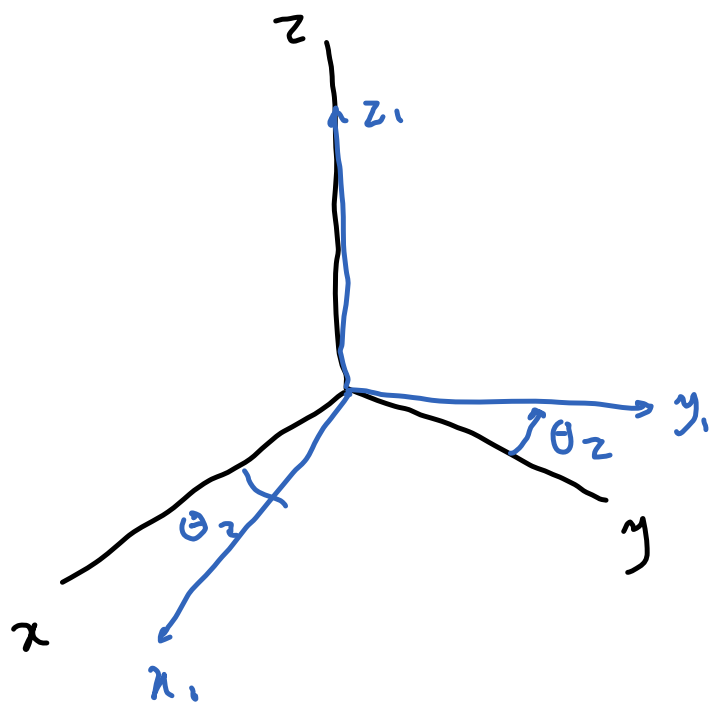
$$R = C^T \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad R_1^0$$

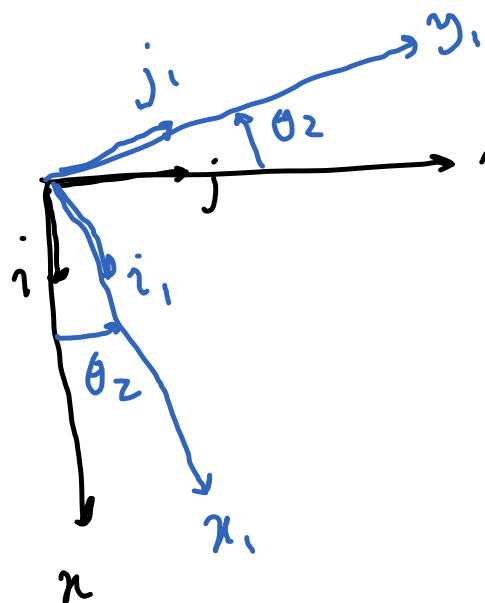


دورانهای اصلی
دوران حول محور z

دینامیک پیشرفته، سینماتیک

دکتر امین نیکوبین





$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \cdot i & i_1 \cdot j & i_1 \cdot k \\ j_1 \cdot i & j_1 \cdot j & j_1 \cdot k \\ k_1 \cdot i & k_1 \cdot j & k_1 \cdot k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_2(\theta_2)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

دوران حول محور y ، $C_y(\theta_y)$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_y \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & C_y \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

عازیس دوران حول محور z ، $C_z(\theta_z)$

$$C_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C \theta_z & \sin \theta_z \\ 0 & -\sin \theta_z & C \theta_z \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C^T \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix}$$

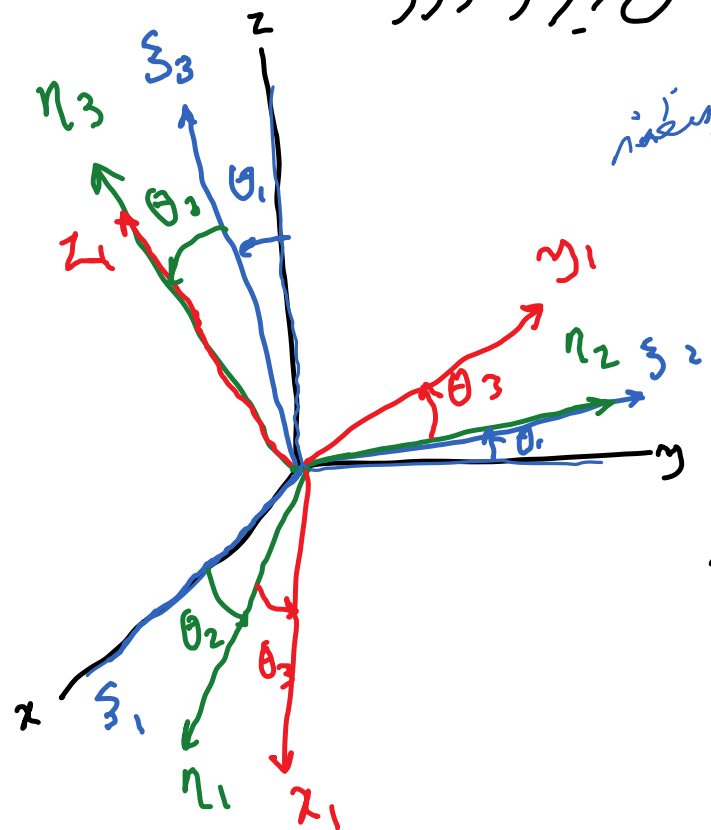
$$R_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix}$$



درانهای متوالی

دستگاه مختصات x_1, y_1, z_1 نسبت به x, y, z دوران خاصی زیر را دارند

مانند تغییر تبدیل فضای راه را به کبک $\rightarrow$ متوالی و ثابت به هم منطبق



- چرخش حول محور x به اندازه $\theta_1 \rightarrow \xi_1, \xi_2, \xi_3$

- چرخش حول محور ξ_1 به اندازه $\theta_2 \rightarrow \eta_1, \eta_2, \eta_3$

- چرخش حول محور η_1 به اندازه $\theta_3 \rightarrow x_1, y_1, z_1$

دران حول محورهای فرعی متوالی



$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = C_x(\theta_1) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = C_y(\theta_2) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = C_z(\theta_3) \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \overbrace{C_z(\theta_3) C_y(\theta_2) C_x(\theta_1)}^C \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



$$\underbrace{C_z^T}_{\text{1- منبر}} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = C_z(\theta_3) C_y(\theta_2) C_x(\theta_1) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{array}{l} C_z^T \\ C_y^T \\ C_x^T \end{array} \begin{array}{l} \text{1- منبر} \\ \text{2- } \\ \text{3- م} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_x^T C_y^T C_z^T(\theta_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_x(\theta_1) R_y(\theta_2) R_z(\theta_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

پس منبر - (متورک)



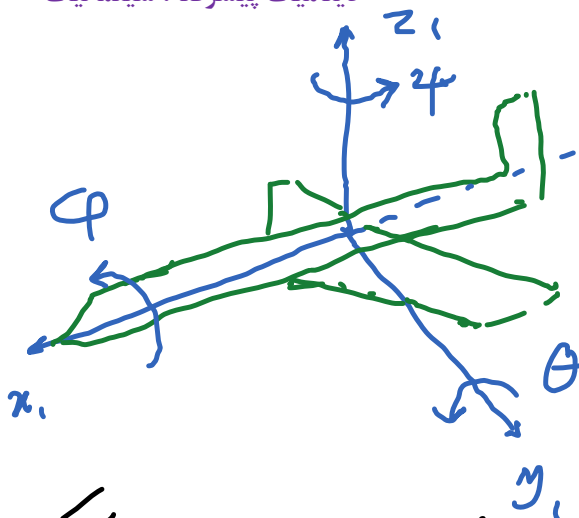
(x_1, y_1, z_1)

۱- در دورانهای متوالی حول محورهای دست، متحرک مانده‌های دوران (R) پس مندرج می‌شوند.

۲- در دورانهای متوالی حول محورهای دست، ثابت (x_2, y_2, z_2) مانده‌های دوران

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_z(\theta_3) R_y(\theta_2) R_x(\theta_1) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

مندرج مانده‌های خاصیت جابجایی ندارند. بنابراین دوران حول مدهای ثابت و متحرک نتایج متفاوتی را خواهد داشت.



$$v = v_i i + v_j j + v_k k$$

$$v = v_x i_1 + v_y j_1 + v_z k_1$$

[illegible]

$$R(z, \theta, \varphi) = R_z(z) R_y(\theta) R_x(\varphi)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{z_1} \end{bmatrix}$$

- دوستان محل Z_1 و Z_2

Pitch $\leftarrow \theta$ y_1 y_2 y_3 y_4

$$R_0 \cup \varphi x, \quad \sim \sim \sim$$



بدان جهت یکایم ، یک فرم است ، فرم مرجع

- مائیس دوران $R = \{x, y, z\}$ مولفه

- نوائینی اولیه ، $\phi(0, 0, 0)$, minimal

- زاویه و محور $\{x, y, z\}$

- چهارگانیک unite Quaternion



دینامیک پیشرفته، سینماتیک

دکتر امین نیکوبین