



دینامیک پیشرفته

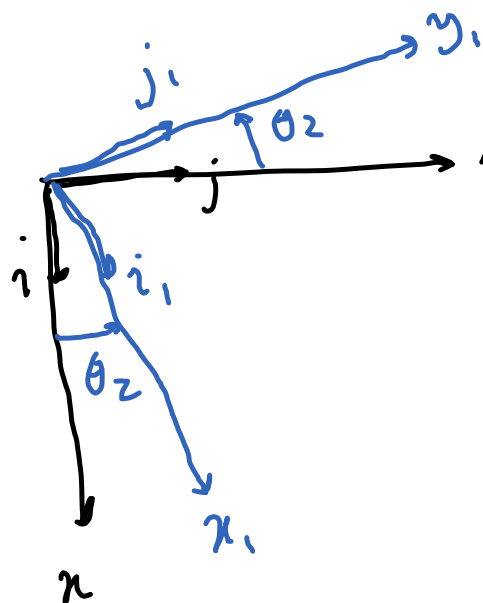
سینماتیک

بردار سرعت زاویه ای، حرکت در مختصات انتقالی-چرخشی

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \cdot i & i_1 \cdot j & i_1 \cdot k \\ j_1 \cdot i & j_1 \cdot j & j_1 \cdot k \\ k_1 \cdot i & k_1 \cdot j & k_1 \cdot k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_2(\theta_2)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

دوران حول محور y ، $C_y(\theta_y)$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_y \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & C_y \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

عازیس دوران حول محور z ، $C_z(\theta_z)$

$$C_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C \theta_z & \sin \theta_z \\ 0 & -\sin \theta_z & C \theta_z \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C^T \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix}$$

$$R_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix}$$



درانهای متوالی

دستگاه مختصات x_1, y_1, z_1 نسبت به x, y, z دوران خاصی زیر را دارند

مانند تغییر تبدیل فضای راهی به گنبد

۱. محور و ثابت بدنه مشخصه

ξ_1, ξ_2, ξ_3

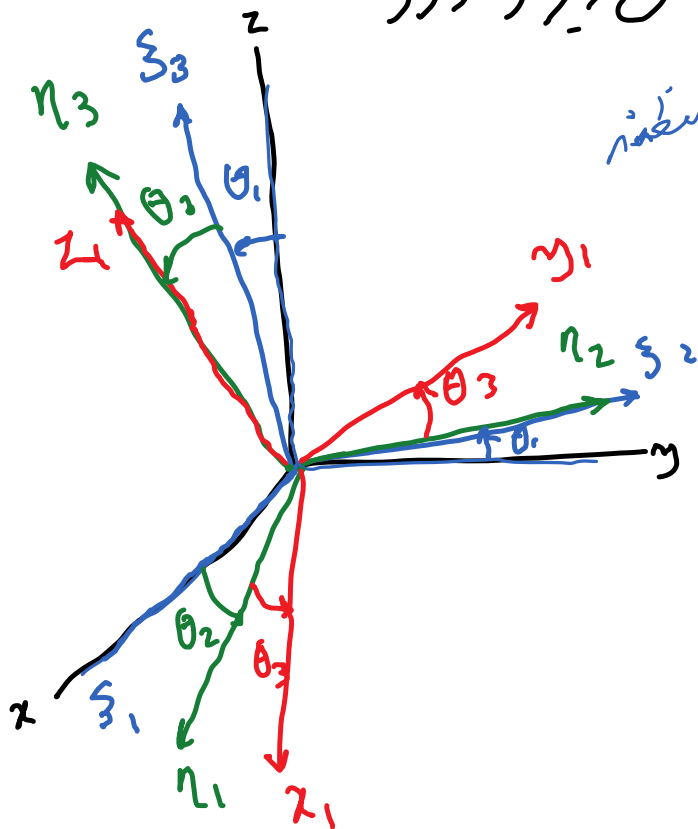
- چرخش حول محور x به اندازه θ_1

η_1, η_2, η_3

- چرخش حول محور ξ_2 به اندازه θ_2

x_1, y_1, z_1

- چرخش حول محور η_3 به اندازه θ_3



دران حول محورهای فرعی متوالی



$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = C_x(\theta_1) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = C_y(\theta_2) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = C_z(\theta_3) \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \underbrace{C_z(\theta_3) C_y(\theta_2) C_x(\theta_1)}_C \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$C(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

ماتریس ۳×۳ دوران حول x, y, z

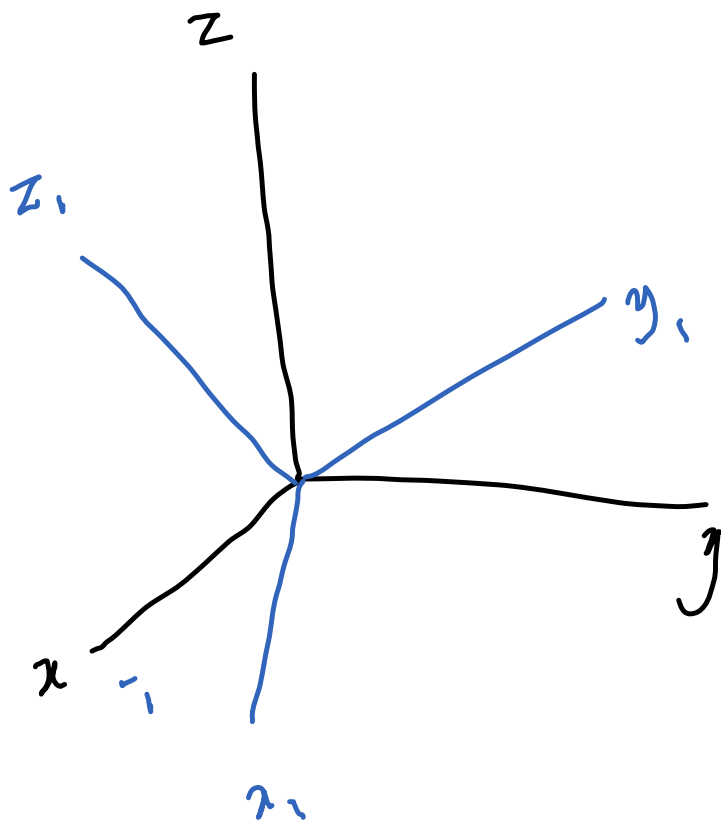


چرخش مذرب هندب ماندریر در نذیر لکچی نائیر گذاراس، لعی سدان در ران محدود
کیر اسنما، هفتم س را با یک بر رارتان داد

z, y, x بدائر دوران با سنان $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ حول
محورهای z, y, x ایچ اسنزل

پسوست کیر بدارب شکل
زیرینی بولن شان داد

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$





حالت خاص دوران‌های خیلی کوچک

$$C_1(\Delta\theta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta\theta_1 \\ 0 & -\Delta\theta_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sin \Delta\theta_1 \approx \Delta\theta_1$$

$$\cos \Delta\theta_1 \approx 1$$

$$C_2(\Delta\theta_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta\theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_3(\Delta\theta_3) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\theta_3 & 0 \\ -\Delta\theta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

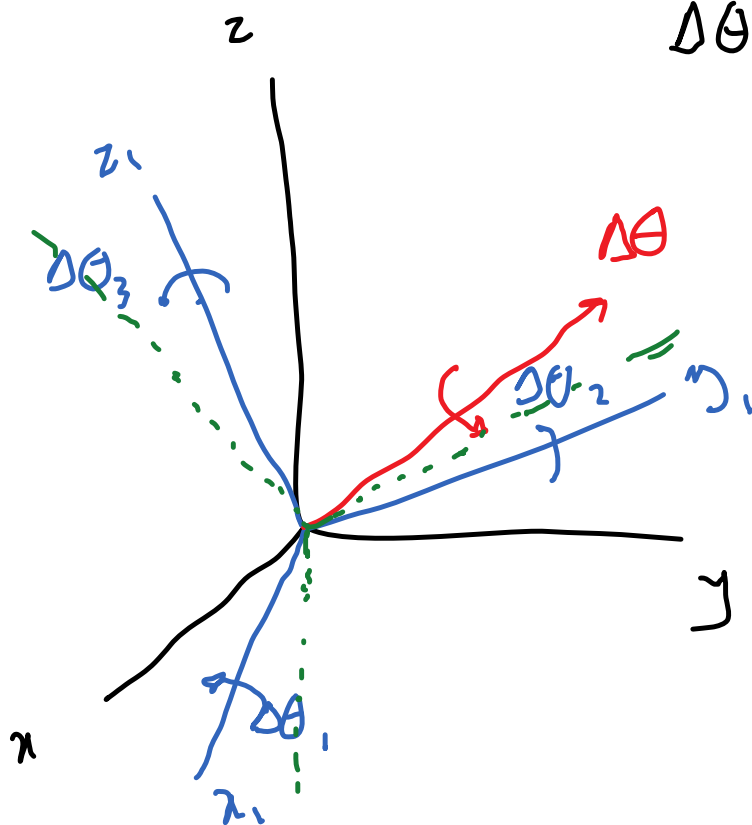
$$C = C_3 C_2 C_1 = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\theta_3 & -\Delta\theta_2 \\ -\Delta\theta_3 & 1 & \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 & -\Delta\theta_1 & 1 \end{bmatrix} + O((\Delta\theta)^2)$$

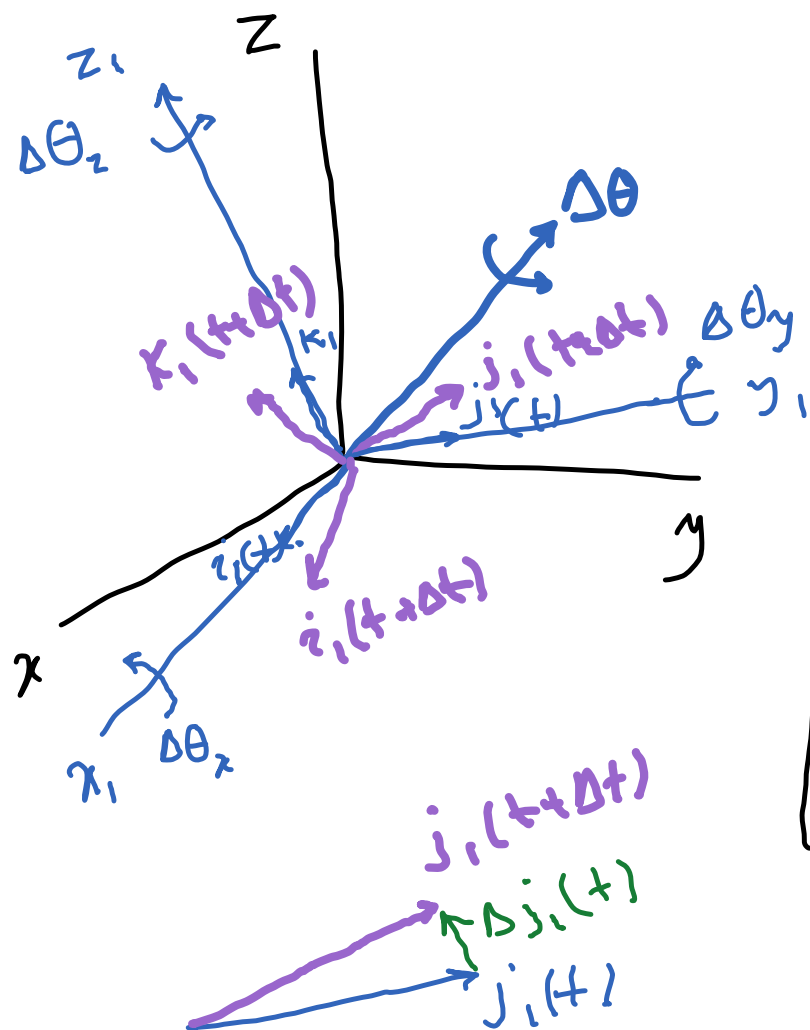
$= C_1 C_2 C_3 = C_1 C_3 C_2$

ترتیب ضرب متوالی در دوارهای کوچک بی تأثیر است

$$\Delta \theta = \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Delta \theta} = \Delta \theta_1 \hat{i}_1 + \Delta \theta_2 \hat{j}_1 + \Delta \theta_3 \hat{k}_1$$





$$\vec{\Delta\theta} = \Delta\theta_x i_1 + \Delta\theta_y j_1 + \Delta\theta_z k_1$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega_x i_1 + \omega_y j_1 + \omega_z k_1$$

$$\begin{bmatrix} i_1(t+\Delta t) \\ j_1(t+\Delta t) \\ k_1(t+\Delta t) \end{bmatrix} = \textcircled{1} C(\Delta\theta) \begin{bmatrix} i_1(t) \\ j_1(t) \\ k_1(t) \end{bmatrix} \textcircled{2}$$



دینامیک پیشرفته، سینماتیک

(II)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \frac{\Delta z_1(t)}{\Delta t} \\ \frac{\Delta j_1(t)}{\Delta t} \\ \frac{\Delta k_1(t)}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_1(t+\Delta t) - z_1(t)}{\Delta t} \\ \frac{j_1(t+\Delta t) - j_1(t)}{\Delta t} \\ \frac{k_1(t+\Delta t) - k_1(t)}{\Delta t} \end{bmatrix} = \frac{(C(\Delta\theta) - I)}{\Delta t} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ j_1(t) \\ k_1(t) \end{bmatrix} + O(\Delta t^2)$$

$$\frac{C(\Delta\theta) - I}{\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Delta\theta_x}{\Delta t} & -\frac{\Delta\theta_y}{\Delta t} \\ -\frac{\Delta\theta_x}{\Delta t} & 0 & \frac{\Delta\theta_z}{\Delta t} \\ \frac{\Delta\theta_y}{\Delta t} & -\frac{\Delta\theta_z}{\Delta t} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta_z}{\Delta t} = \omega_z$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d i_1(t)}{dt} \\ \frac{d j_1(t)}{dt} \\ \frac{d k_1(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{i}_1(t) \\ \dot{j}_1(t) \\ \dot{k}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ j_1(t) \\ k_1(t) \end{bmatrix}$$

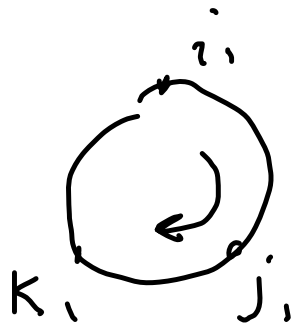
$$\begin{cases} \dot{i}_1 = \omega_z j_1 - \omega_y k_1 \\ \dot{j}_1 = -\omega_z i_1 + \omega_x k_1 \\ \dot{k}_1 = \omega_y i_1 - \omega_x j_1 \end{cases} \begin{matrix} \longrightarrow \dot{i}_1 = \omega \times i_1 \\ \longrightarrow \dot{j}_1 = \omega \times j_1 \\ \longrightarrow \dot{k}_1 = \omega \times k_1 \end{matrix}$$

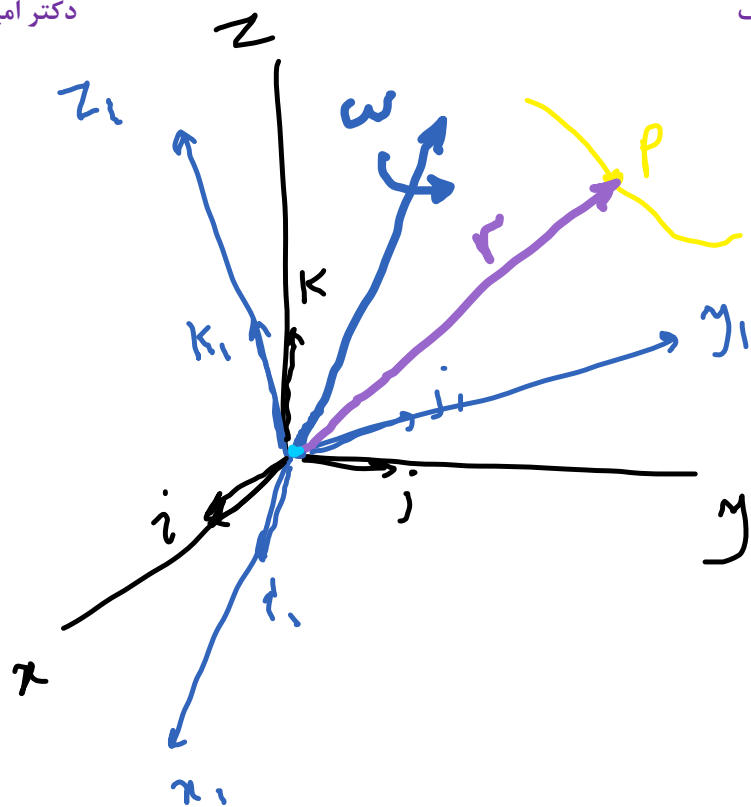
$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_x \dot{\mathbf{r}}_1 + \omega_y \mathbf{j}_1 + \omega_z \mathbf{k}_1$$

$$= (\omega_x \dot{\mathbf{r}}_1 + \omega_y \mathbf{j}_1 + \omega_z \mathbf{k}_1) \times \mathbf{r}_1 = -\omega_y \mathbf{k}_1 + \omega_z \mathbf{j}_1$$

$$\dot{\mathbf{r}}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 = 0$$

$$\mathbf{j}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 = -\mathbf{k}_1$$





سرعت زاویه‌ای فرم $\omega = \omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2 + \omega_3 \gamma_3$

$$\omega = \omega_x i_1 + \omega_y j_1 + \omega_z k_1$$

بدان r سرعت نقطه P بین نذر فریم $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

$$\vec{r} = x_1 i_1 + y_1 j_1 + z_1 k_1$$

بین موقعیت P در فریم x, y, z

$$\vec{r} = x i + y j + z k$$



$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

اگر موقعیت نقطه را در فضا مربع چهارم
روبرو بیان کنید، سرست اکسیس خود

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}$$



آثر موقعیت نقطه P در غزیم x, y, z که حذرش سرعت زاویه‌ای ω دارد،
بین‌سند باشد.

$$\vec{r} = x, \vec{i}_1 + y, \vec{j}_1 + z, \vec{k}_1$$

$$\omega = \omega_x \vec{i}_1 + \omega_y \vec{j}_1 + \omega_z \vec{k}_1$$

سرعت نقطه P می‌شود:

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}, \vec{i}_1 + \dot{y}, \vec{j}_1 + \dot{z}, \vec{k}_1 + x, \dot{\vec{i}}_1 + y, \dot{\vec{j}}_1 + z, \dot{\vec{k}}_1$$

$$= \dot{x}, \vec{i}_1 + \dot{y}, \vec{j}_1 + \dot{z}, \vec{k}_1 + x, \omega_x \vec{i}_1 + y, \omega_y \vec{j}_1 + z, \omega_z \vec{k}_1$$



$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{x}_1 \mathbf{i}_1 + \dot{y}_1 \mathbf{j}_1 + \dot{z}_1 \mathbf{k}_1 + x_1 \omega \times \mathbf{i}_1 + y_1 \omega \times \mathbf{j}_1 + z_1 \omega \times \mathbf{k}_1 \\ &= \dot{x}_1 \mathbf{i}_1 + \dot{y}_1 \mathbf{j}_1 + \dot{z}_1 \mathbf{k}_1 + \omega \times x_1 \mathbf{i}_1 + \omega \times y_1 \mathbf{j}_1 + \omega \times z_1 \mathbf{k}_1 \\ &= \dot{x}_1 \mathbf{i}_1 + \dot{y}_1 \mathbf{j}_1 + \dot{z}_1 \mathbf{k}_1 + \omega \times (x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1) \\ &= \dot{x}_1 \mathbf{i}_1 + \dot{y}_1 \mathbf{j}_1 + \dot{z}_1 \mathbf{k}_1 + \omega \times \mathbf{r} = \underbrace{(\dot{\mathbf{r}})}_{x_1, y_1, z_1} + \omega \times \mathbf{r} \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \underbrace{(\dot{\mathbf{v}})}_{x_1, y_1, z_1} + \omega \times \underbrace{(\mathbf{r})}_{x_1, y_1, z_1}$$



حرکت در سنده انتقالی و چرخان

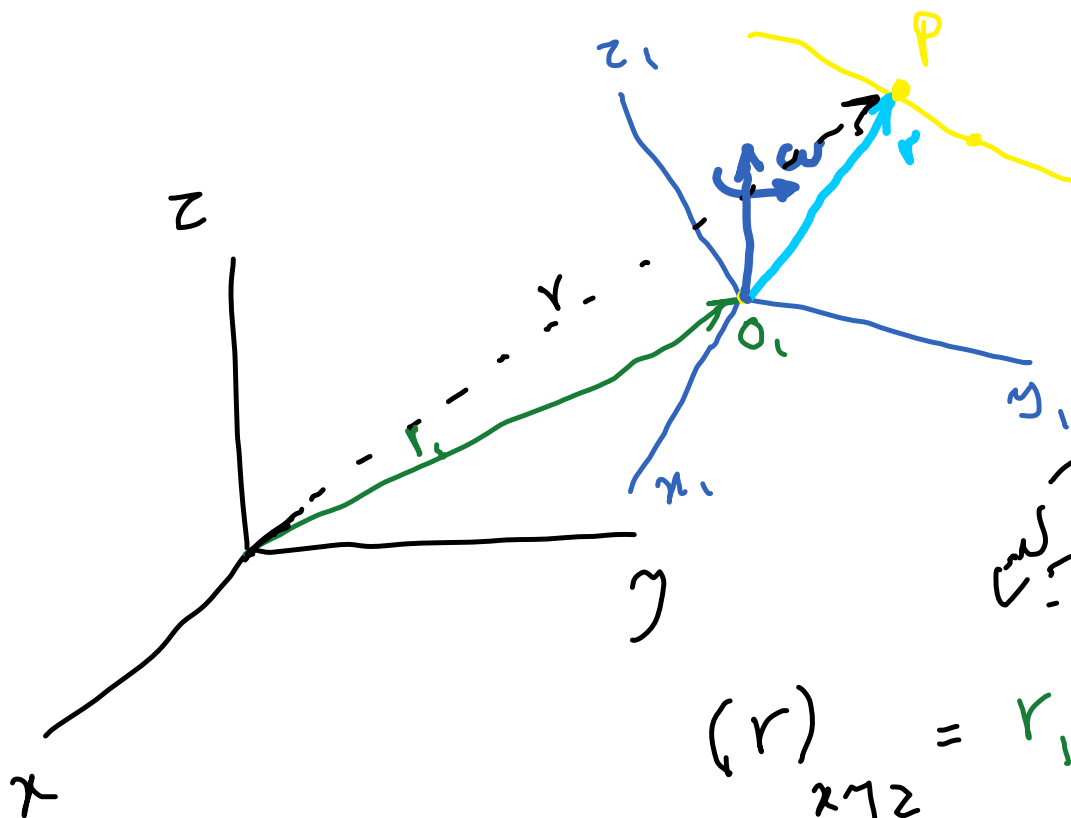
$$\vec{r}_1 = o_{1x} \hat{i} + o_{1y} \hat{j} + o_{1z} \hat{k}$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i}_1 + \omega_y \hat{j}_1 + \omega_z \hat{k}_1$$

$$\vec{r} = x_1 \hat{i}_1 + y_1 \hat{j}_1 + z_1 \hat{k}_1$$

سرعت و شتاب فقط را می توانیم در یک کس

$$(\vec{r})_{xyz} = \vec{r}_1 + (\vec{r})_{x_1 y_1 z_1}$$





$$r_p = r_1 + r = \dot{o}_{1x} i + \dot{o}_{1y} j + \dot{o}_{1z} k + x_1 \dot{i}_1 + y_1 \dot{j}_1 + z_1 \dot{k}_1$$

$$v_p = \frac{dr_p}{dt} = \underbrace{\dot{o}_{1x} i + \dot{o}_{1y} j + \dot{o}_{1z} k}_{v_1} + \underbrace{x_1 \dot{i}_1 + y_1 \dot{j}_1 + z_1 \dot{k}_1}_{\dot{r}} + \omega \times r$$

$$v_p = v_1 + \dot{r} + \omega \times r \quad / \quad \begin{aligned} \dot{r} &= \dot{x} \dot{i}_1 + \dot{y} \dot{j}_1 + \dot{z} \dot{k}_1 \\ \omega &= \omega_x \dot{i}_1 + \omega_y \dot{j}_1 + \omega_z \dot{k}_1 \end{aligned}$$

$$a_p = a_1 + \ddot{r} + \underbrace{\omega \times \dot{r}} + (\underbrace{\dot{\omega} + \omega \times \omega}) \times r + \underbrace{\omega \times (\dot{r} + \omega \times r)}$$

$$= a_1 + \ddot{r} + 2\omega \times \dot{r} + \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r)$$



در برداری مثل $\mathbf{h}$ که در یک دست، محورک به سرعت زاویه‌ای ω به دور محور متغیر آن به صورت زیر است

$$\dot{\mathbf{h}}_{xyz} = \dot{\mathbf{h}}_{x_1y_1z_1} + \omega \times \mathbf{h}$$

متغیرهای در فریم متحرک

$$= \ddot{\mathbf{r}} + \omega \times \dot{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{h} = \dot{\mathbf{r}}$$

$$a_p = a_1 + \ddot{r} + 2\omega \times \dot{r} + \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r)$$

a_1 : شتاب مبدأ فریم منوط

$\ddot{r}$: شتاب منبسطی، شتاب نسبت به فریم x_1, y_1, z_1

$2\omega \times \dot{r}$: شتاب کوریولیس

$\dot{\omega} \times r$: شتاب محاسی $\leftarrow r\ddot{\alpha}, r\ddot{\theta}$

$\omega \times (\omega \times r)$: شتاب مرکزگرا $\leftarrow r\omega^2, r\dot{\theta}^2$



مثال: موقعیت نقطه P در فریم منورک x_1, y_1, z_1 با سرعت زیر بیان می شود

$$v = t^2 \hat{i}_1 + \sin t \hat{j}_1 + t \hat{k}_1$$

فریم منورک x_1, y_1, z_1 با سرعت زیر دوران و انتقال می یابد

$$\omega = 2 \hat{i}_1 + \cos t \hat{j}_1 + 4 \hat{k}_1$$

$$r_1 = (t^3 + 2t^2) \hat{i}_1 + (5 \cos t) \hat{j}_1 + \frac{2}{t+1} \hat{k}_1$$

سرعت و شتاب نقطه P را محاسبه کنید.



$$v_p = \dot{r}_1 + \dot{r} + \omega \times r$$

$$a_p = \underbrace{\ddot{r}_1}_{\text{②}} + \underbrace{\ddot{r}}_{\text{①}} + 2\omega \times \dot{r} + \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r)$$

$$r_1 = (t^3 + 2t^2) i + (5 \cos t) j + \frac{2}{t+1} k$$

$$\dot{r}_1 = (3t^2 + 4t) i + (-5 \sin t) j + \left(\frac{-2}{(t+1)^2} \right) k$$

$$\ddot{r}_1 = (6t + 4) i - 5 \cos t j + \frac{2(2t+2)}{(t+1)^4} k$$

$$\frac{-2}{t^2 + 2t + 1}$$

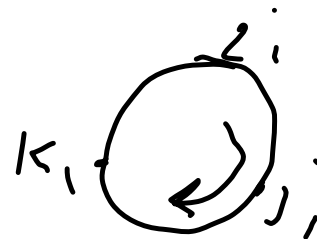


$$r = t^2 i_1 + \sin t j_1 + t k_1, \quad \omega = 2 i_1 + \cos t j_1 + 4 k_1$$

$$\dot{r} = 2t i_1 + \cos t j_1 + k_1 + \cancel{t^2 \dot{i}_1 + \sin t \dot{j}_1 + t \dot{k}_1}$$

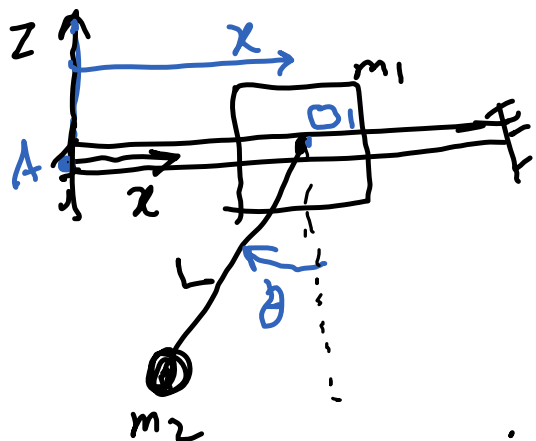
$$\ddot{r} = 2 i_1 - \sin t j_1$$

$$\dot{\omega} = -\sin t j_1 + 2 \dot{i}_1 + \cancel{\cos t j_1 + \dots}$$



$$\begin{aligned} \omega \times r &= (2 i_1 + \cos t j_1 + 4 k_1) \times (t^2 i_1 + \sin t j_1 + t k_1) \\ &= 2 \sin t k_1 - 2 t j_1 - t^2 \cos t k_1 + t \cos t i_1 + 4 t^2 j_1 - 4 \sin t i_1 \\ &= (t \cos t - 4 \sin t) i_1 + (-2 t + 4 t^2) j_1 + (2 \sin t - t^2 \cos t) k_1 \end{aligned}$$

EX 2.4

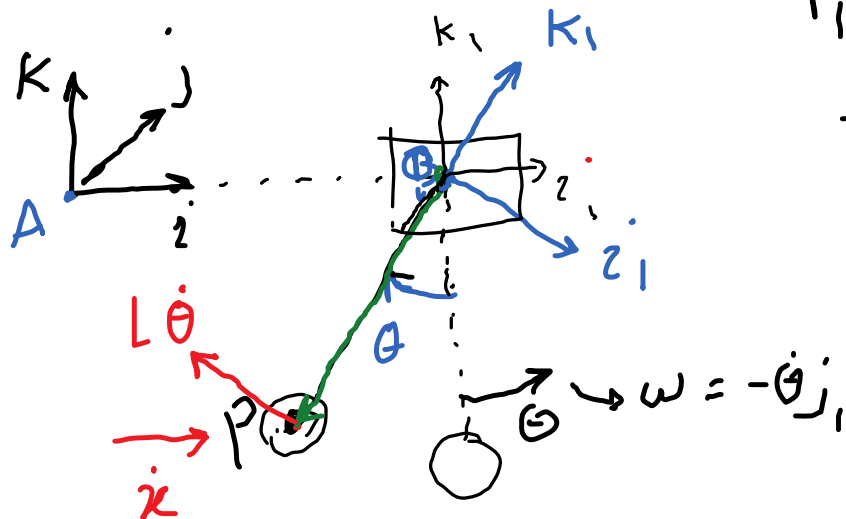


سرعت داشتن با جرم m_2 راه ساده‌تر است
 بهر در فریم ثابت و به هر در فریم متحرک به دل بکنند.
 $\dot{\theta} = 0$ جرم ای فریم صاف است.

موقعیت مایل فریم 1
 $r_1 = x i$

$$\vec{r} = -L \vec{k}_1$$

$$\vec{\omega} = +\dot{\theta} \vec{j}_1$$

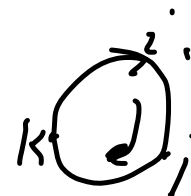




$$r_1 = x i \longrightarrow \dot{r}_1 = \dot{x} i \quad \dot{\gamma}_1 = \dot{x} i \quad \ddot{r}_1 = \ddot{x} i$$

$$\vec{r} = -L k_1 \longrightarrow \ddot{r} = 0, \quad \ddot{\gamma} = 0$$

$$\vec{\omega} = +\dot{\theta} j_1 \longrightarrow \dot{\omega} = \ddot{\theta} j_1$$

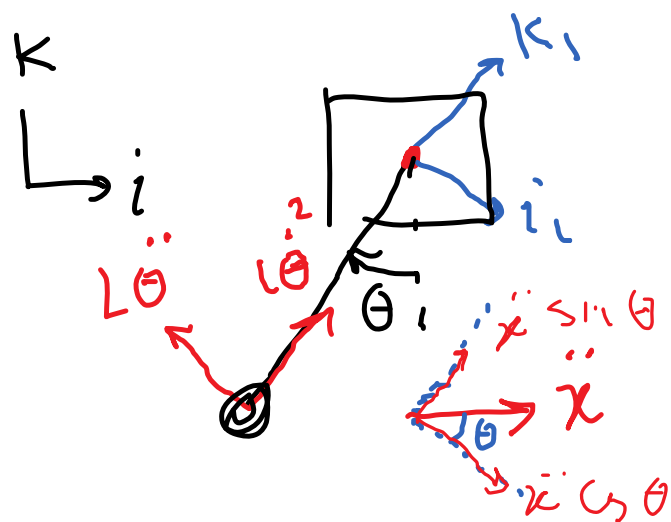


$$v_p = \dot{r}_1 + \ddot{r} + \omega \times r = \dot{x} i + 0 + \dot{\theta} j_1 \times (-L k_1) = \dot{x} i - L \dot{\theta} i_1$$

$$a_p = \ddot{r}_1 + \ddot{\gamma} + 2\omega \times \dot{r}_1 + \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r)$$

$$= \ddot{x} i + 0 + 0 + \ddot{\theta} j_1 \times (-L k_1) + \dot{\theta} j_1 \times (-L \dot{\theta} i_1)$$

$$= \ddot{x} i - L \ddot{\theta} i_1 + L \dot{\theta}^2 k_1$$



$$a_p = \underbrace{\ddot{x}_i}_{0} - \underbrace{L\ddot{\theta}z_i + L\dot{\theta}^2 k_1}_1$$

به سبب دایره ای بودن حرکت در امتداد محورهای
در دست راست، ریدر فیدل استور.

فریم 1 حول محور y چنانچه theta دور از مرکز

$$\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$



$$a_p = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L\ddot{\theta} \\ 0 \\ L\dot{\theta}^2 \end{bmatrix}$$

↑
غیر ۱
↑
غیر ۰

بین a_p در فوج ۰

$$a_p = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} -L\ddot{\theta} \\ 0 \\ L\dot{\theta}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -L\ddot{\theta} \\ 0 \\ L\dot{\theta}^2 \end{bmatrix}$$

بین a_p در فوج ۱

$$a_p = \begin{bmatrix} -L\ddot{\theta} \\ 0 \\ L\dot{\theta}^2 \end{bmatrix} + R^T \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L\ddot{\theta} \\ 0 \\ L\dot{\theta}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_p = \begin{bmatrix} -L\ddot{\theta} \\ 0 \\ L\dot{\theta}^2 \end{bmatrix} + R^T \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L\ddot{\theta} \\ 0 \\ L\dot{\theta}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ن. a_p در فرم 1

$$\Rightarrow a_p = \begin{bmatrix} -L\ddot{\theta} \\ 0 \\ L\dot{\theta}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{x} \cos\theta \\ 0 \\ \ddot{x} \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \cos\theta - L\ddot{\theta} \\ 0 \\ \ddot{x} \sin\theta + L\dot{\theta}^2 \end{bmatrix}$$