



دینامیک پیشرفته

دینامیک ذرات
سیستم ذرات، ممنتوم زاویه ای

دکتر امین نیکوبین

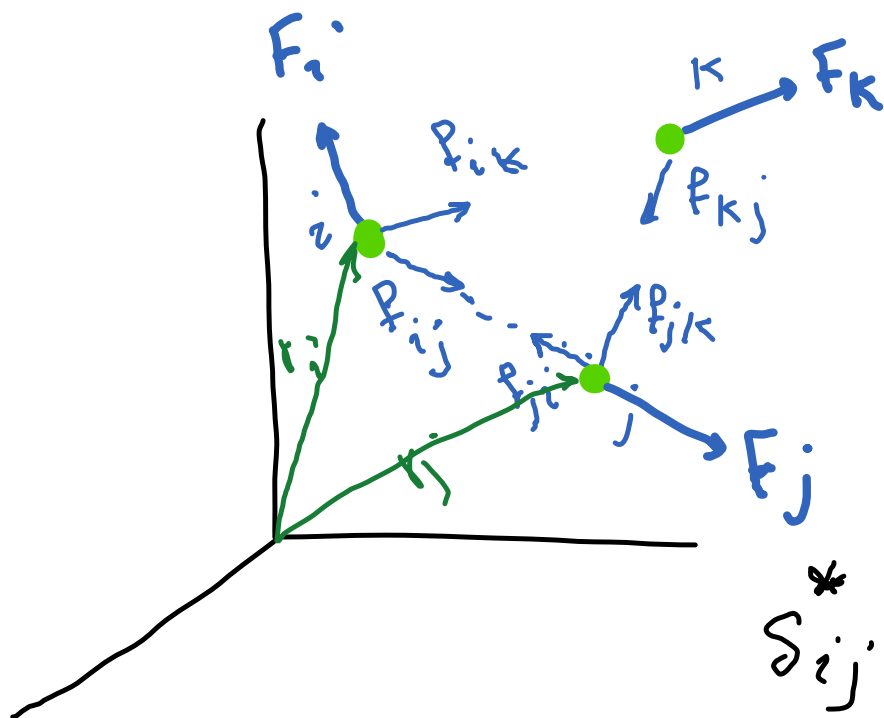
دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

معادلات حرکت برای یک سیستم از ذرات

F_i برآیند نیروهای وارد بر ذره i ام

F_{ij} ^{دانه} نیروی وارد بر ذره i ام از طرف ذره j ام
 $\sum_{j=1}^n F_{ij}$ برآیند نیروهای داخلی وارد بر ذره i ام



$$\delta_{ij}^* = 1 - \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i=j \\ 1 & i \neq j \end{cases} \quad F_{ii} = 0$$



قانون دوم نیوتن برای ذره i ام

$$F_i + \sum_{j=1}^n \delta_{ij}^* p_{ij} = m_i a_i$$

$\Rightarrow$ برای کل ذرات

$$\sum_{i=1}^n F_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij}^* p_{ij} = \sum_{i=1}^n m_i a_i$$

از آنجا که $p_{ij} + p_{ji} = 0$

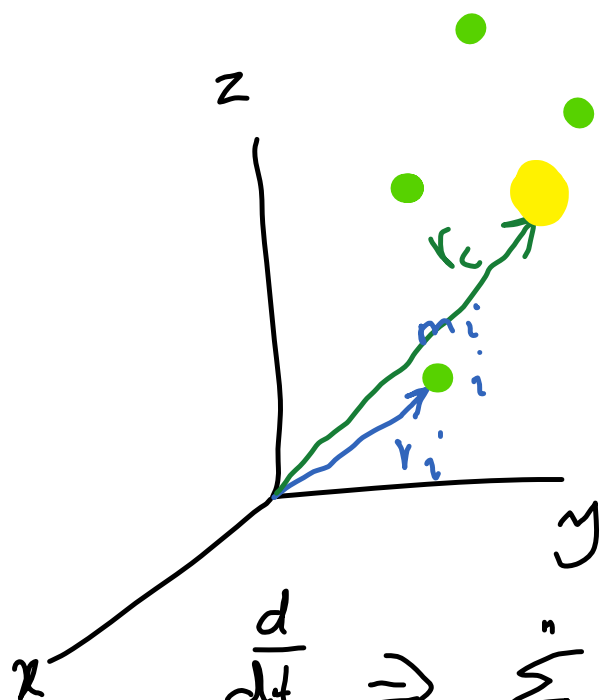
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n m_i a_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n F_i = m a_c$$

از تعریف مرکز جرم یک سیستم از ذرات داریم

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = m \mathbf{r}_c$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$



$$\frac{d}{dt} \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_c$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \cdot \mathbf{a}_i = m \mathbf{a}_c$$



$$\sum_{i=1}^n F_i = m a_c$$

این معادله بیان می‌کند که حرکت مرکز جرم یک سیستم ذرات، مثل این است که کل جرم در مرکز جرم مستقر شده است و هر گاه نیروها نیز به محل مرکز جرم اعمال می‌شوند به این معنی است.

$$\sum F_i = 0 \rightarrow a_c = 0 \Rightarrow m v_c = \text{ثابت}$$

$m v_c$ مومنت خطی سیستم ذرات.

$$m v_c = \sum_{i=1}^n m_i v_i$$

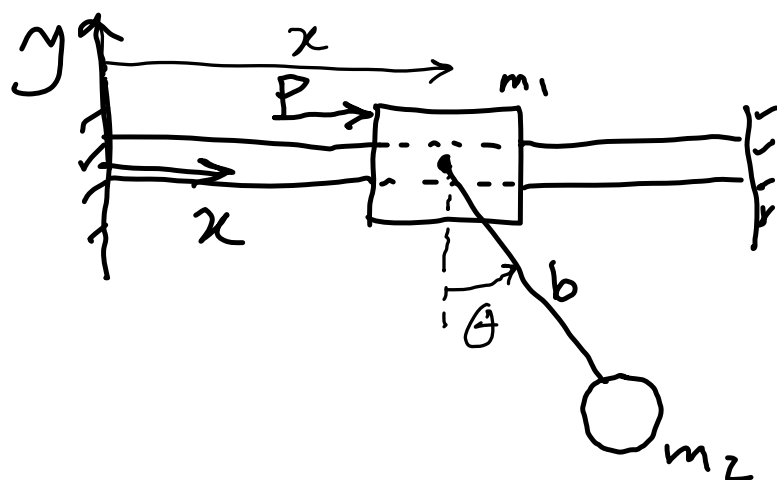


سیستم ذرات

- ذرات مقید (کسب، تامل، ...)

- ذرات آزاد ← حرکت مرکب ویم ذرات در نقطه لرزه مرکب

رسم ریاضی آزاد برای هر ذره
لذتشن معادله حرکت در هر
عنصر شیره های داخلی



مثل: جسم m_1 با اصطکاک خشک روی میله

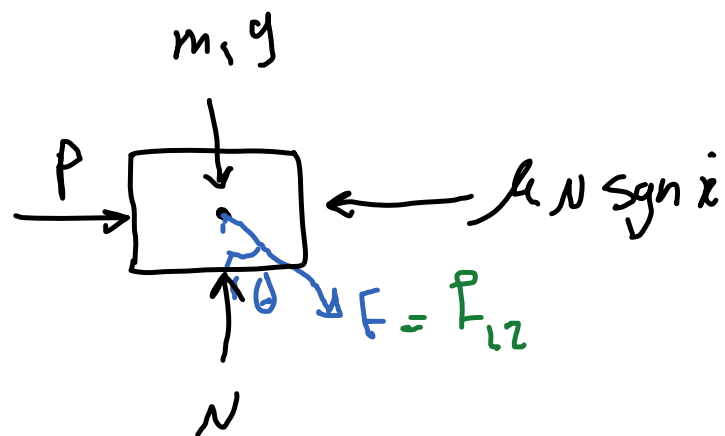
حرکت می کند. نیروی P به جسم m_1

احمال می شود. جسم m_1 و m_2 با یک

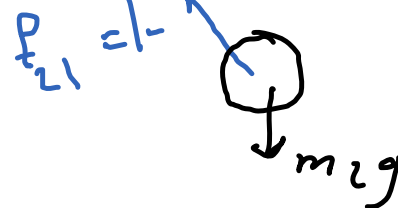
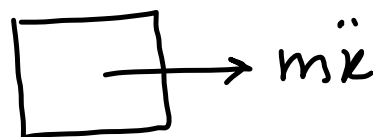
میله صلب بدون جسم با طول b هم متصل

سند اند. می داند حرکت این سیستم را

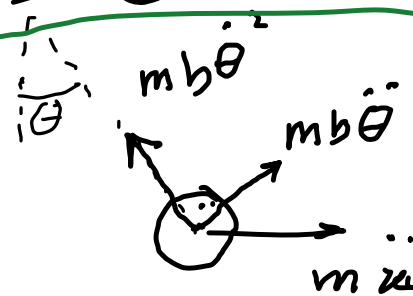
استخراج کنید.



$\equiv$



$\equiv$





معادلات حرکت برای m_1

① x axis: $P - \mu N \sin \theta + F \sin \theta = m_1 \ddot{x}$ $\rightarrow$ (3.16) 51

② y axis: $N - m_1 g - F \cos \theta = 0 \rightarrow N = \checkmark$

معادلات حرکت برای m_2

③ r axis: $m_2 g \cos \theta - F = m_2 \ddot{x} \sin \theta - m_2 b \dot{\theta}^2 \rightarrow F = \checkmark$

④ θ axis: $-m_2 g \sin \theta = m_2 \ddot{x} \cos \theta + m_2 b \ddot{\theta}$ (I)

دو نیمی رانگی N و F وجود دارد که باید حذف شوند.



$$\textcircled{3} m_2 g \cos \theta - F = m_2 \ddot{x} \sin \theta - m_2 b \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow F = m_2 g \cos \theta - m_2 \ddot{x} \sin \theta + m_2 b \dot{\theta}^2 \quad \checkmark$$

$$\textcircled{2} N - m_1 g - F \cos \theta = 0 \Rightarrow N = m_1 g - m_2 g \cos^2 \theta - m_2 \ddot{x} \sin \theta \cos \theta + m_2 b \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\textcircled{1} P - \mu N \operatorname{sgn} \dot{x} + F \sin \theta = m_1 \ddot{x}$$

$$\Rightarrow P - \mu (m_1 g - m_2 g \cos^2 \theta - m_2 \ddot{x} \sin \theta \cos \theta + m_2 b \dot{\theta} \cos \theta) \operatorname{sgn} \dot{x} + (m_2 g \cos \theta - m_2 \ddot{x} \sin \theta + m_2 b \dot{\theta}) \sin \theta = m_1 \ddot{x}$$





$$\textcircled{II} \quad P - \mu (m_1 g - m_2 g \cos^2 \theta - \underbrace{m_2 \ddot{x} \sin \theta \cos \theta}_{\text{green}} + m_2 b \dot{\theta} \cos \theta) \operatorname{sgn} \dot{x} +$$

$$(\underbrace{m_2 g \cos \theta - m_2 \ddot{x} \sin \theta}_{\text{green}} + m_2 b \dot{\theta}) \sin \theta = \underline{m_1 \ddot{x}}$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{m_2 \sin^2 \theta + m_1 + m_2 \sin \theta \cos \theta} \left[P - \mu (m_1 g - m_2 g \cos^2 \theta + m_2 b \dot{\theta} \cos \theta) \operatorname{sgn} \dot{x} \right. \\ \left. + m_2 g \cos \theta \sin \theta + m_2 b \dot{\theta} \sin \theta \right] \Rightarrow \ddot{x} = F_1(P, x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$$

$$\textcircled{I} \quad -m_2 g \sin \theta = m_2 \ddot{x} \cos \theta + m_2 b \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = F_2(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$$



$$\begin{bmatrix} m_2 \zeta \theta & m_2 b \\ m_1 + m_2 \sin^2 \theta - \mu m_2 \sin \theta \zeta \theta \operatorname{sgn}(\dot{x}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) \\ h_2(\quad, \quad) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$M(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = M^{-1} \left(\begin{bmatrix} -h_1 \\ -h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = f_1(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) \\ \ddot{\theta} = f_2(\quad, \quad) \end{cases}$$

معادلات دینامیک حالت نوشته شود

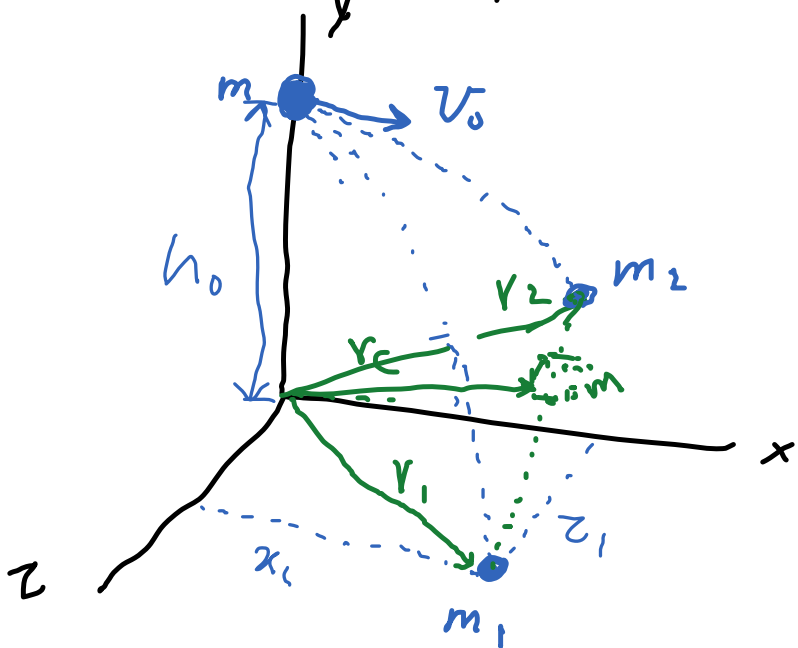
$$\begin{cases} x = x_1 \\ \theta = x_2 \\ \dot{x} = x_3 \\ \dot{\theta} = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \dot{x}_4 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{cases}$$

→ ode 45



مثال: ذره m در لحظه $t=0$ دارای سرعت v_0 و ارتفاع h_0 است. در این لحظه منعقدند و به دو تکه m_1 و m_2 تفکیک می شود. فقط m_1 در زمان t_1

با ترسین به طور می کند در موقعیت $x_1 i + z_1 k$ ، موقعیت جرم m_2 را در این لحظه تعیین کنید $(x_2 i + y_2 j + z_2 k)$



$$\begin{cases} \ddot{x}_c = 0 & , & \dot{x}_c(0) = v_0 & , & x_c(0) = 0 \\ \ddot{y}_c = -g & , & \dot{y}_c(0) = 0 & , & y_c(0) = h_0 \\ \ddot{z}_c = 0 & , & \dot{z}_c(0) = 0 & , & z_c(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_c = v_0 t & \longrightarrow & x_c(t_i) = v_0 t_i \\ y_c = h_0 - \frac{1}{2} g t^2 & \longrightarrow & y_c(t_i) = h_0 - \frac{1}{2} g t_i^2 \\ z_c = 0 & \longrightarrow & z_c(t_i) = 0 \end{cases}$$



از تعریف حرکت جیم را بر

?

$$(m_1 + m_2) \vec{r}_c(t) = m_1 \vec{r}_1(t) + m_2 \vec{r}_2(t)$$

$$(m_1 + m_2) \vec{v}_c = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad X$$

$$\textcircled{C} \rightarrow t=t_1 \quad (m_1 + m_2) \left[v_0 t_1 \hat{i} + \left(h_0 - \frac{1}{2} g t_1^2 \right) \hat{j} \right] = m_1 (x_1 \hat{i} + z_1 \hat{k}) + m_2 (x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k})$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{m v_0 t_1 - m_1 x_1}{m_2}, \quad y_2 = \frac{m(h_0 - \frac{1}{2} g t_1^2)}{m_2}, \quad z_2 = \frac{-m_1 z_1}{m_2}$$



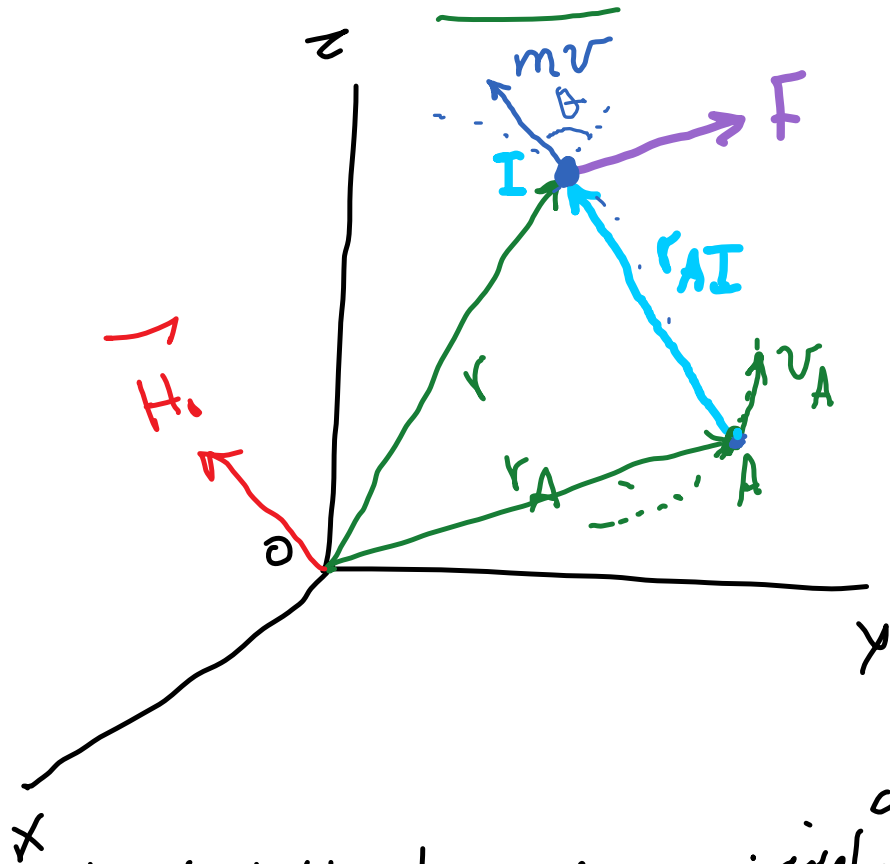
بدار مومن زادی یک ذره حول نقطه ثابت و متحرک

جرم m دارای سرعت v نسبت به O است.
مرجع xy است.

بدار مومن خطی $\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$
محان بدار مومن خطی حول نقطه O

$$H_O = \vec{r} \times m \vec{v}$$

$H_O \perp$ صفحه زادی ذره حول نقطه O می‌گردد.
رابطه H_O همواره بر صفحه‌ای که از r و v می‌گذرد



$$|H_O| = |r| |v| \sin \theta$$



باجستق گیری از H_0 نسبت به زمان داریم

$$H_0 = r \times m v$$

$$\Rightarrow \dot{H}_0 = \dot{r} \times m v + r \times m \dot{v} = \cancel{v \times m v} + r \times m \dot{v} = r \times m a = r \times F$$

$$\dot{r} = v$$

$$r \times F = M_0$$

$$\Rightarrow \dot{H}_0 = M_0$$

$$\dot{H}_0 = \frac{dH_0}{dt}$$

برآیند همان نیروها حاصل صفر 0 برابر است با
تغییرات مومنم زامیای نسبت به زمان حاصل صفر 0



مقدار محاسبه زاویه‌ای جسم m را حول نقطه متحرک A حساب کنید

$$H_A = r_{AI} \times m v \rightarrow \dot{H}_A = \underbrace{\dot{r}_{AI} \times m v} + \underbrace{r_{AI} \times m \dot{v}}$$

$$r_{AI} \times m \dot{v} = r_{AI} \times m a = r_{AI} \times F = M_A, \quad r_{AI} = r - r_A$$

$$\dot{r}_{AI} \times m v = (\dot{r} - \dot{r}_A) \times m v = \cancel{\dot{r} \times m v} - \dot{r}_A \times m v = -v_A \times m v$$

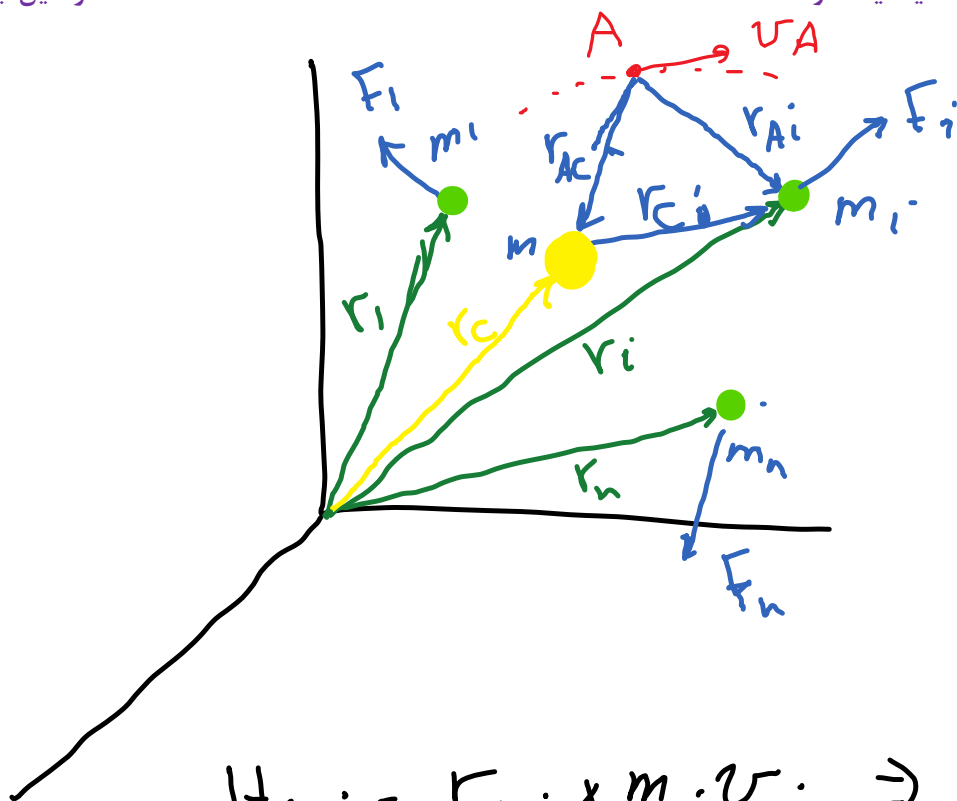
$$\Rightarrow \dot{H}_A = M_A - v_A \times m v$$

در بسیاری از این رابطه تبدیل می‌شود
 $\dot{H}_A = M_A$ ، $v_A = 0$ ، A نقطه ثابت باشد



دینامیک پیشرفته، دینامیک ذرات

دکتر امین نیکوبین



بدلار منقسم زاده ای حول یک نقطه بدای
سیستم ذرات

$$m r_c = \sum_{i=1}^n m_i r_i$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$L_{A,i} = r_{A,i} \times m_i \cdot v_i \Rightarrow L_A = \sum_{i=1}^n r_{A,i} \times m_i \cdot v_i$$

$$\rightarrow \dot{L}_A = \sum_{i=1}^n \dot{r}_{A,i} \times m_i \cdot v_i + \sum_{i=1}^n r_{A,i} \times m_i \cdot \dot{v}_i \rightarrow M_A$$



دینامیک پیشرفته، دینامیک ذرات

دکتر امین نیکوبین

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{Ai} \times m_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{Ai} \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_A$$

$$\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{r}}_{Ai} \times m_i \cdot \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{r}_{Ai} = \mathbf{r}_{Ac} + \mathbf{r}_{ci} \rightarrow \dot{\mathbf{r}}_{Ai} = \dot{\mathbf{r}}_{Ac} + \dot{\mathbf{r}}_{ci}$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{ci} \rightarrow \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_c + \dot{\mathbf{r}}_{ci}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{r}}_{Ai} \times m_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n (\dot{\mathbf{r}}_{Ac} + \dot{\mathbf{r}}_{ci}) \times m_i (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{ci})$$

$$= \dot{\mathbf{r}}_{Ac} \times \dot{\mathbf{r}}_c \sum_{i=1}^n m_i + \dot{\mathbf{r}}_{Ac} \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_{ci} + \left(\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_{ci} \right) \times \dot{\mathbf{r}}_c + \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_{ci} \times \mathbf{v}_{ci}$$

از مغزِ مترجم

$$\sum m_i \cdot \vec{r}_{ci} = 0$$

$$\Rightarrow \sum m_i \dot{\vec{r}}_{ci} = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_{Ai} \times m_i \cdot \vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_{Ac} \times \vec{r}_c \sum_{i=1}^n m_i = (\vec{v}_c - \vec{v}_A) \times m \vec{v}_c = -\vec{v}_A \times m \vec{v}_c$$

$$\vec{r}_{Ac} = \vec{r}_c - \vec{r}_A \rightarrow \dot{\vec{r}}_{Ac} = \vec{v}_c - \vec{v}_A$$

رایحه برای جرم ذرات

$$\dot{H}_A = M_A - v_A \times m v_C$$

اگر $v_A = 0 \leftarrow \dot{H}_A = M_A$

اگر $C \equiv A \leftarrow v_A = v_C \leftarrow \dot{H}_C = M_C$

پس اگر بخواهیم از رایحه $\dot{H} = M$ استفاده کنیم، همان باید حول یک نقطه ثابت
نمایند حول مرکز جرم گرفته شود



دینامیک پیشرفته، دینامیک ذرات

دکتر امین نیکوبین