



دینامیک پیشرفته

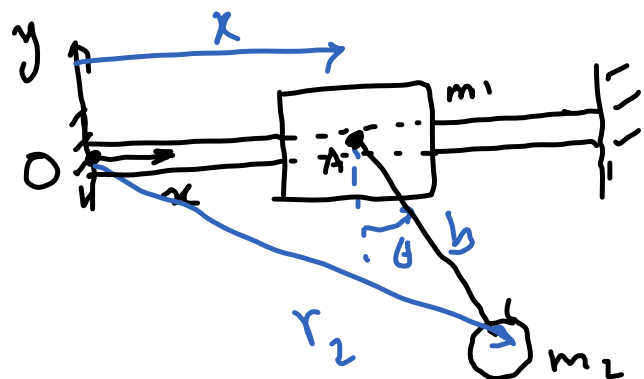
دینامیک ذرات
اصل کار و انرژی

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

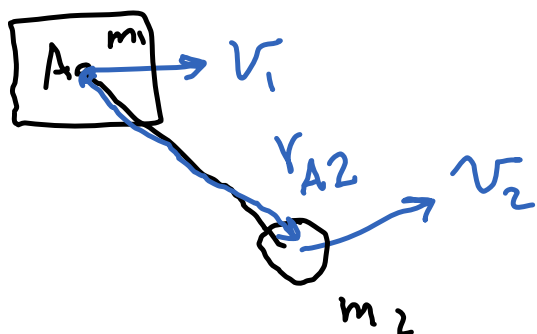
anikoobin@semnan.ac.ir

مثال 3-6. برای سیستم زیر معادله حرکت را به روش مستقیم زائوی حل نقطه A است آورید.



با روشینا روابط مستقیم زائوی حل نقطه A

$$\dot{H}_A = M_A - v_A \times m v_C$$



$$H = r \times m v$$

$$\Rightarrow H_A = \cancel{r_A} \times m_1 v_1 + \underline{r_{A2}} \times m_2 v_2$$



موضعیت هر ذره را در فرم xyz

$$\dot{H}_A$$

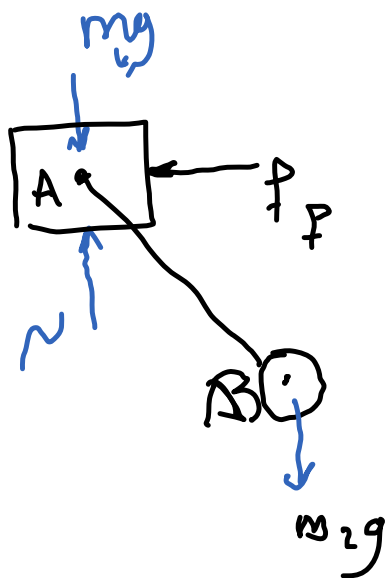
$$r_1 = x \hat{i} \quad , \quad r_2 = (x + b \sin \theta) \hat{i} - b \cos \theta \hat{j}$$

$$v_1 = \dot{x} \hat{i} \quad , \quad v_2 = (\dot{x} + b \dot{\theta} \cos \theta) \hat{i} + b \dot{\theta} \sin \theta \hat{j}$$

$$W_A = r_{A2} \times m_2 v_2 = (m_2 b^2 \ddot{\theta} + m_2 b \dot{x} \cos \theta) \hat{k}$$

$$r_{A2} = b \sin \theta \hat{i} - b \cos \theta \hat{j}$$

$$\dot{H}_A = (m_2 b^2 \ddot{\theta} + m_2 b \ddot{x} \cos \theta - m_2 b \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta) \hat{k}$$



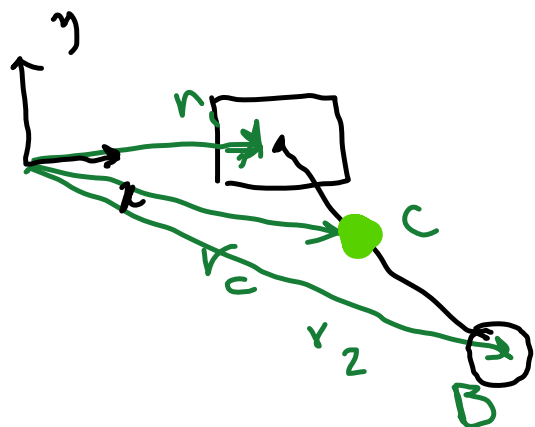
$$M = r \times F$$

$$M_A \sim \text{ط}$$

$$M_A = r_{AB} \times (-m_2 g j)$$

$$= (b \sin \theta i - b \cos \theta j) \times (-m_2 g j)$$

$$= -m_2 g b \sin \theta k$$



$$-v_A \times (m_1 v_C)$$

$m_1 + m_2$

از تعریف مرکز جرم داریم

$$r_C = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} \Rightarrow (\sum m_i) r_C = \sum m_i r_i$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) r_C = m_1 x i + m_2 [(x + b \sin \theta) i - b \cos \theta j]$$

$$\frac{d}{dt} \Rightarrow (m_1 + m_2) v_C = m_1 \dot{x} i + m_2 [\dot{x} + b \dot{\theta} \cos \theta] i + b \dot{\theta} \sin \theta j$$

$$\Rightarrow -v_A \times m v_C = -\dot{x} i \times \left[m_1 \dot{x} i + m_2 [\dot{x} + b \dot{\theta} \cos \theta] i + b \dot{\theta} \sin \theta j \right]$$

$$= -m_2 b \dot{\theta} \dot{x} \sin \theta k$$



جواب دینامیکی روابطی که به دست می آید در معادله روبرو داریم

$$\dot{H}_A = M_A - v_A \times m v_C$$

$$\Rightarrow m_1 b \ddot{\theta} + m_1 \ddot{x} \cos \theta = -m_1 g \sin \theta$$

$$\begin{cases} \sum F = \frac{d}{dt} (m v) \\ \sum M = \frac{d}{dt} (H) \rightarrow \checkmark \end{cases}$$

یعنی معادله به دست می آید از اینجا



اصل کارواندزی

اصل کارواندزی از انتگرال گیری از معادله حرکت است که از قانون دوم نیوتن
جست می آید:

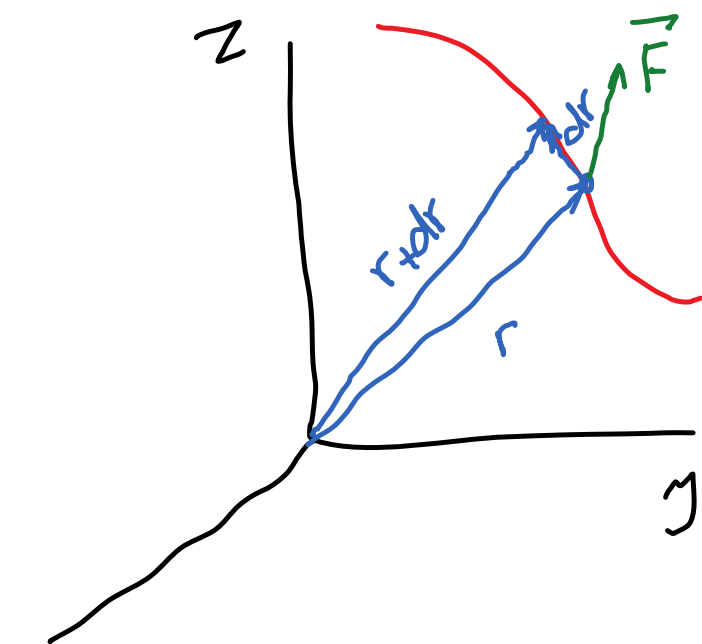
با استفاده از این روش می توان با یک سریع مثل در بدین نیانه استخراج
معادلات حرکت دست یافت.

بعداً خواهیم دید که با استفاده از روش لائرانژ و معادله کارواندزی می توان معادله
حرکت را استخراج کرد



مترادف‌های این
موضوع

- رواندزی تعریف‌های استاندارد هستند
- ارزش‌های فیزیکی و پدیده‌های دیگر که با انجام برخی تعهدی توان صورت می‌گیرد
- تعریف سیستم ذرات را می‌توان به صورت یک مجموعه در نظر گرفت



ذره m را در فضا بکشید که نیروی برآیند F به آن وارد می‌شود

کار نیروی F متناظر با جابجایی dr برابر با

$$dw = F \cdot dr$$

نقطه نقطه ای

انرژی پتانسیل در مسافت بین نقطه ها

$$F = m\ddot{r} \Rightarrow dw = m\ddot{r} \cdot dr = m\dot{r} \cdot d\dot{r}$$

از قانون دوم نیوتن

$$(\ddot{x}dx = vdv)$$



$$dw = m\ddot{r} \cdot dr = m\dot{r} \cdot d\dot{r}$$

$$\Rightarrow dw = d\left(\frac{1}{2}m\dot{r} \cdot \dot{r}\right)$$

مقدار $m\dot{r} \cdot \dot{r} + m\dot{r} \cdot d\dot{r}$ تحت نقطه خاصیت جابجایی دارد

$$\Rightarrow dw = dT$$

بالفقدان انرژی جنبشی - صورت

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r} \cdot \dot{r}$$

که سرعت ذره می باشد

وقتی ذره از محضت r_1 - r_2 تحت نیروی F حرکت می کند داریم

$$F \cdot dr = dT \Rightarrow \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr = \int_1^2 dT \Rightarrow \boxed{\int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr = T_2 - T_1}$$



اصل ترمودینامیکی: وقتی یک ذره از موقعیت r_1 به r_2 حرکت می‌کند، کار انجام شده توسط نیرو برابر است با تغییرات انرژی جنبشی ذره.

$$\int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr = T_2 - T_1$$

$$dw = dT$$



(بدار ۲)

اگر سرعت در هضد به مربع میل کند

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r} \cdot \dot{r}$$

(بدار ۳)

اگر سرعت در هضد به مربع میل کند

باید در غیم مشترک میل کند

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

برای حساب انرژی جنبشی یک ذره باید سرعت مطلق حساب کرد.

این سرعت مطلق می تواند در غیم مربع یا غیم مشترک میل کند

احمال این قانون بزرگ ذرات.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{r_{i,1}}^{r_{i,2}} \left(F_i + \sum_{j=1}^n F_{i,j} \right) \cdot dr_i = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i \right)_2 - \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i \right)_1$$

$$\Rightarrow W_{1-2} = T_2 - T_1$$



مسئله: $m = 50 \text{ kg}$, $v_A = 4 \text{ m/s}$, $\mu = 0.3$, $v_B = ?$

$$W_{1-2} = T_2 - T_1$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_2^2, \quad T_1 = \frac{1}{2} m (4)^2 = 8m$$

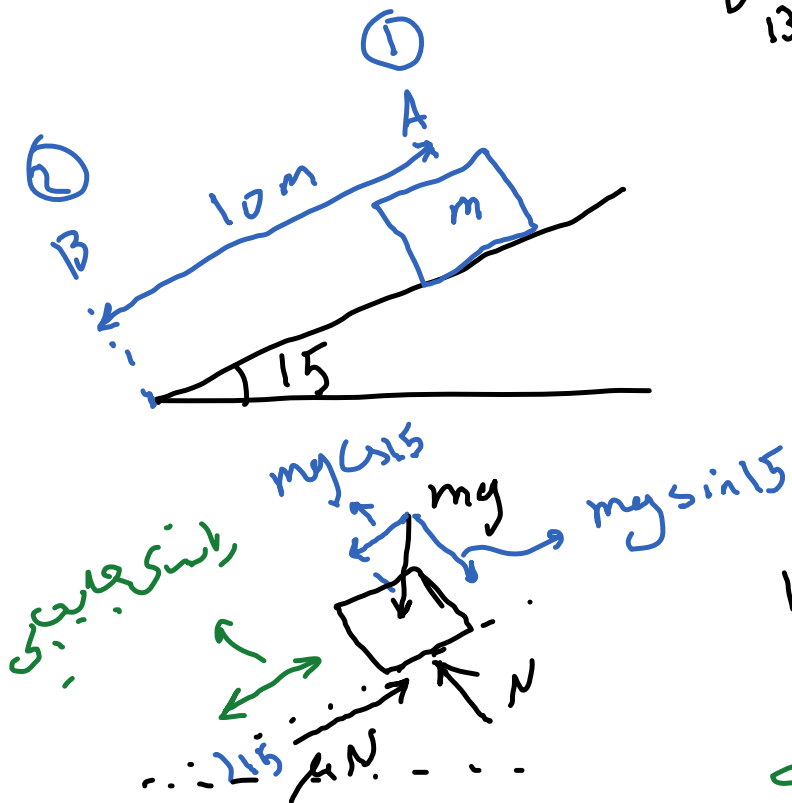
در این مرحله، در طول بازه حرکت نیروی کشش

$$W_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} F(r) \cdot dr = F \cdot (r_2 - r_1)$$

در محاسبات برآیند نیروی کشش را در امتداد مسافت آن محاسبه می‌کنیم

$$- \mu N (10) = -15 \mu N \quad \text{برای } \mu$$

$$mg \cos 15 (10) \quad \text{برای } mg$$



$$N = mg \cos 15$$



$$mg \sin 15 (10) - 10 \mu (N) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$N = mg \sin 15$$

$$\Rightarrow v_B = 3.15 \text{ m/s}$$

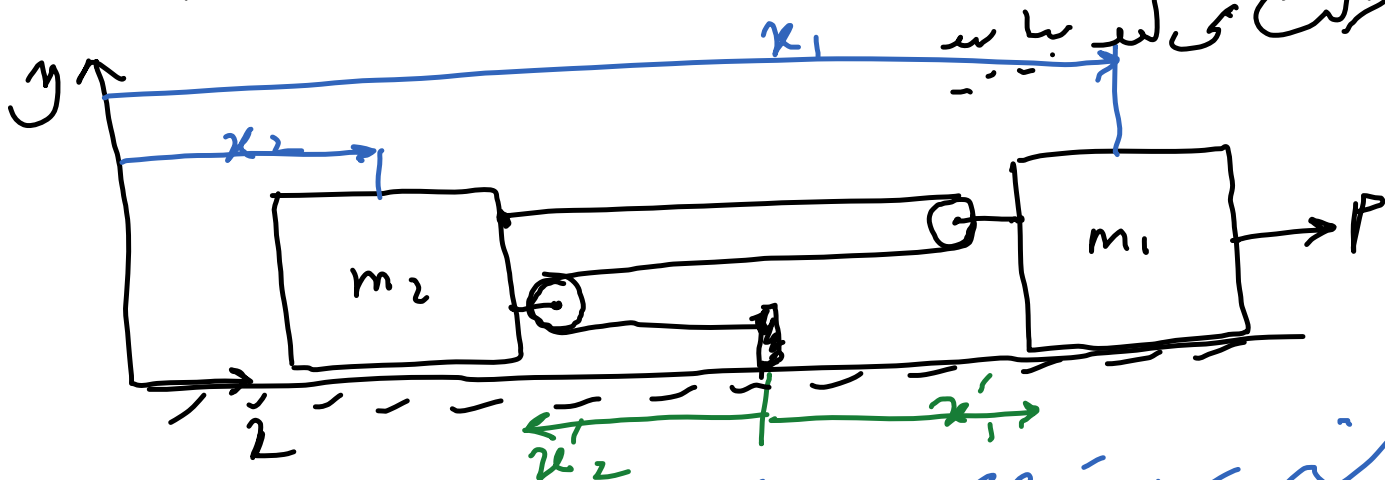
$$F(t) \longrightarrow F(r)$$

$$\int F(r) \cdot dr$$

گشتاورهای اعمالی متغیر است



مثال: سیستم دوی می زیر افقی شیبی ثابت P به آن اجزای شوا در حال سکون است. جذب اصطکاک بین جرمها و زمین عمراست. سرعت جرم m_1 را وقتی به اندازه L حرکت می کند بیابید



$$3x_2' + 2x_1' = L$$

$$\rightarrow 3v_2 + 2v_1 = 0$$

$$\Rightarrow v_2 = -\frac{2}{3}v_1$$

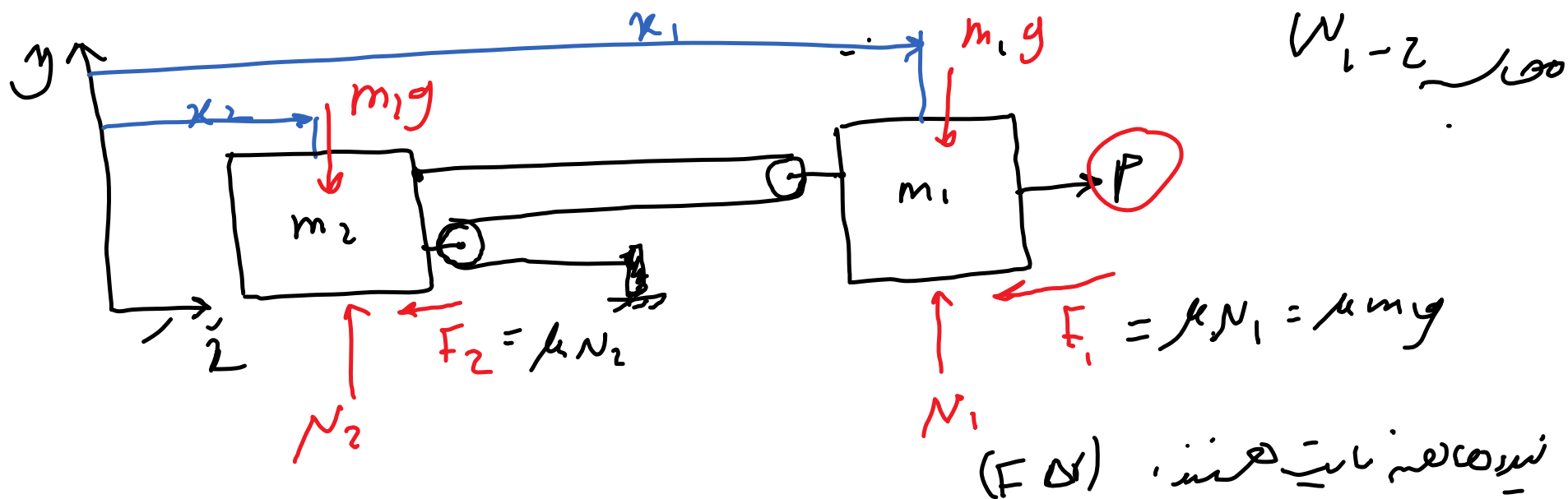
اگر سرعت جرم m_1 را v_1 بانه سرعت جرم m_2 حیدرست $v_2 = -\frac{2}{3}v_1$.
چون جرم m_1 و m_2 هم مشکل هندی سرعت v_1 واسیته v_1 است.

$$x'_1, x'_2 \rightarrow v_2 = -\frac{2}{3} v_1$$

$$x_1, x_2 \rightarrow \left(v_2 = \frac{2}{3} v_1 \right)$$

اگر m_1 باشد: حرکت کند، m_2 باشد: $\frac{2}{3}d$

$$w_{1-2} = T_2 - T_1$$



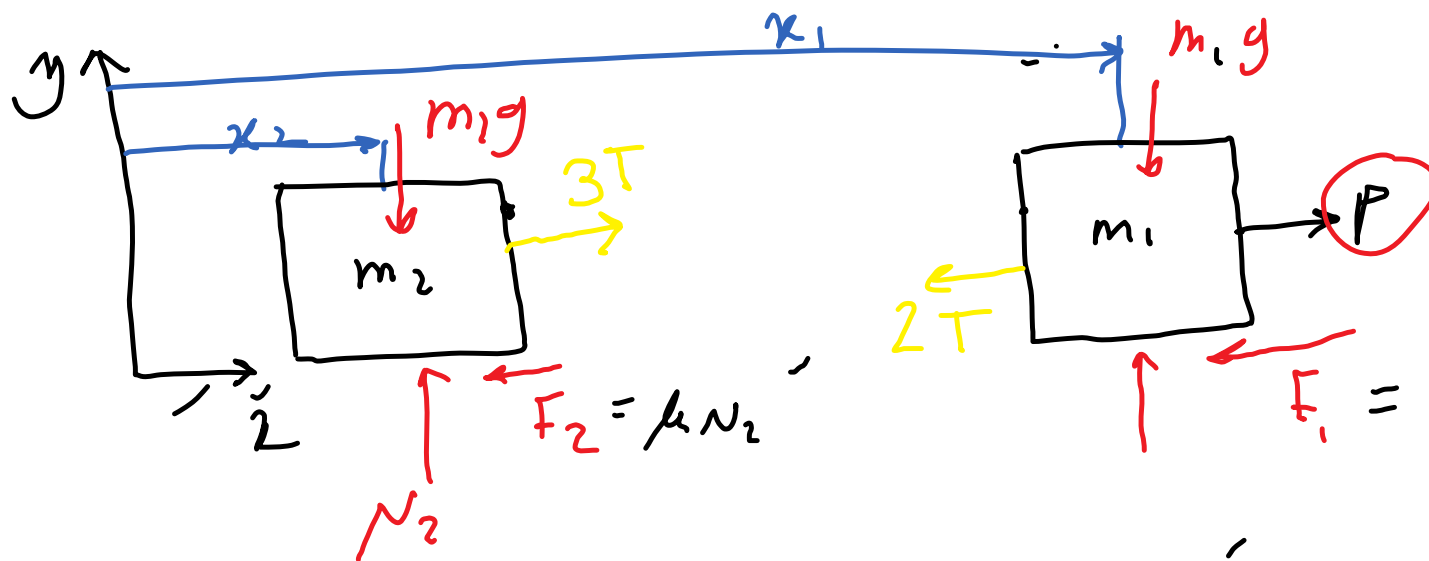
$$W_{1-2} = Pd - \mu m_1 g d - \mu m_2 g \left(\frac{2}{3} d \right)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{2}{3} v_1 \right)^2$$

$$T_1 = 0$$

$$W_{1-2} = T_2 - T_1 \Rightarrow$$

$$v_1^2 = \frac{pd - \mu m_1 g d - \frac{2}{3} \mu m_2 g d}{\frac{1}{2} m_1 + \frac{4}{18} m_2}$$



حل اینکار از نقطه نبدی تنش T .

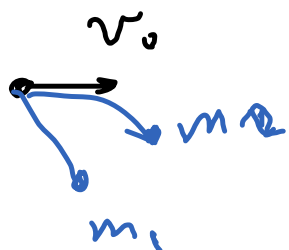
$$W_{1-2} = Pd - \cancel{\mu m_1 g d} - \mu m_2 g \left(\frac{2}{3} d \right) - \cancel{2T(d)} + \cancel{3T\left(\frac{2}{3}d\right)}$$

مثال 8-3، سرعت اولیه ذره در مثال 3.5 v_0 است. دو جسم

m_1 و m_2 منقبض می شود. به ما فاصله بعد از انفجار سرعت v_1 و v_2

است. با فرض اینکه انفجار به صورت آکنی رخ داده باشد، به انجام سندانفوس

نیمرهای داخلی را در صورت انفجار به دست آورید



$$W_{1-2} = T_2 - T_1$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_0^2$$

در انفجار - نیروی های داخلی و نیروی خارجی

$$W_{1-2} = (W_{1-2})_{\text{دلتی}} + (W_{1-2})_{\text{خارجی}}$$

چون انفجار به صورت آگنی رخ می افتد و خفیه شدن نیروهای خارجی معنای
سوی کار اعم از نه نه و نه نیروهای خارجی بی تأثیر و برابر معنای

$$W_{1-2} = T_2 - T_1$$



دینامیک پیشرفته، دینامیک ذرات، کار و انرژی

دکتر امین نیکوبین



دینامیک پیشرفته، دینامیک ذرات، کار و انرژی

دکتر امین نیکوبین