



رباتیک پیشرفته

سینماتیک دیفرانسیلی

دکتر امین نیکوبین

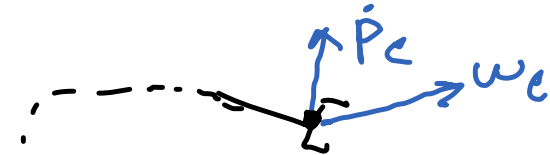
دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

Analytical Jacobian

ژاکوبین تحلیلی

$$v_e = J \dot{q}, \quad v_e = \begin{bmatrix} \dot{p}_e \\ \omega_e \end{bmatrix}, \quad J \text{ ژاکوبین هندسی}$$



Φ_e می‌تواند یکی از تفاضلات زنجیره اولیه باشد

$$x_e = \begin{bmatrix} p_e \\ \varphi_e \end{bmatrix}$$

$$x_e = k(q)$$

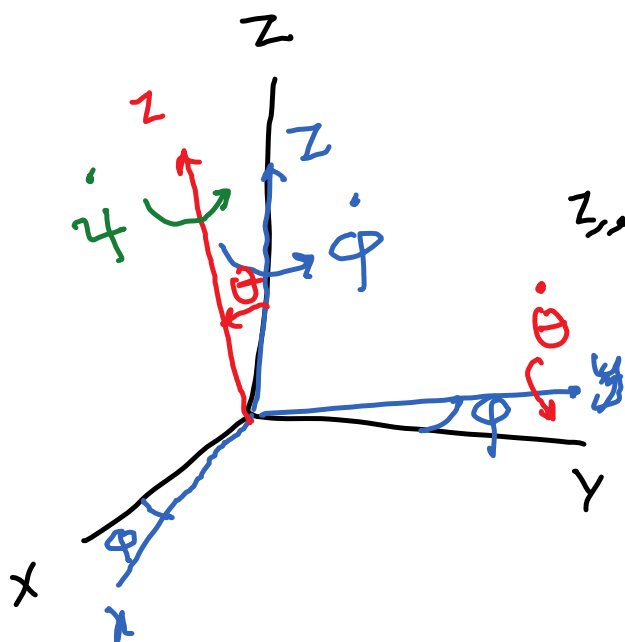
$$\dot{\Phi}_e = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_e = J_A \dot{q}, \quad J_A = \frac{\partial k}{\partial q}$$

خرش کنید از زوایای اولیه z و z استند کنید

$$\omega_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\varphi}$$

سرعت زاویه ای حول محور z



فریم متحرک حول محور y
سرعت زاویه θ در این فریم

$$\omega_e = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}$$

فریم محور حول محور z
سرعت ψ در

$$\omega_e = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix} \dot{\psi}$$



$$\omega_e = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\varphi & \sin\theta \cos\varphi \\ 0 & \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi \\ 1 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \omega_e = T(\varphi_e) \dot{\varphi}_e, \quad v_e = \begin{bmatrix} \dot{p}_e \\ \omega_e \end{bmatrix}, \quad \dot{x}_e = \begin{bmatrix} \dot{p}_e \\ \dot{\varphi}_e \end{bmatrix}$$

$$v_e = J \dot{q} \Rightarrow \quad v_e = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \dot{x}_e = T_A \dot{x}_e$$

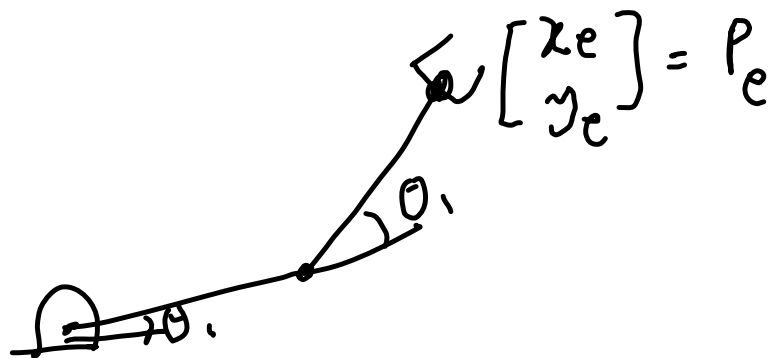
$$\dot{x}_e = J_A \dot{q} \Rightarrow T_A \dot{x}_e = T_A J_A \dot{q} = v_e \Rightarrow \boxed{J = T_A J_A}$$

حل سینماتیک دینامیکی معکوس

$$v_e = J \dot{q}, \quad J \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

non Redundant - } ✓
Redundant - }

$$\rightarrow \dot{q} = J^{-1}(q) v_e$$



$$J_p = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}.$$

$$\dot{p}_e = \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \end{bmatrix} = J_p \dot{q} \Rightarrow \dot{p}_e = J_p \dot{q}$$

$\dot{q} \xrightarrow{\quad} \dot{p}_e$

حل مستقیم



مثال: برای یک رباتیک دو درجه‌ای: سرعت نامی از زمان به شکل زیر

دارد: $\dot{\theta}_1 = 2 \cos t$ و $\dot{\theta}_2 = 4t$

$$\theta_1(t) = 2 \sin t \rightarrow \dot{\theta}_1 = 2 \cos t$$

$$\theta_2(t) = 2t^2 + 1 \rightarrow \dot{\theta}_2 = 4t$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \sin(\theta_1) - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ a_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

حل مستقیم برای $\dot{x}_e$ و $\dot{y}_e$ Redundant: چون سرعت خداهند



حل معکوس $\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{bmatrix} = J \dot{q} \Rightarrow \dot{q} = J^{-1}(q) \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{bmatrix}$

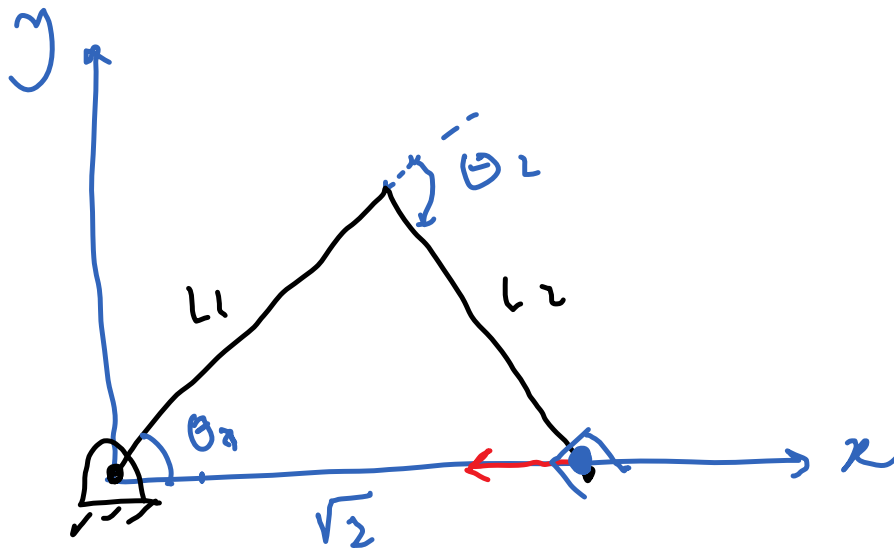
$\dot{x}_c$ و $\dot{y}_c$ معلوم است می خواهیم سرعت، موقعیت مفاد را حساب کنیم.

$$J^{-1}(q) = \frac{1}{\det(J)}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = f_1(\theta_1, \theta_2, \dot{x}_c, \dot{y}_c) \\ \dot{\theta}_2 = f_2(\theta_1, \theta_2, \dot{x}_c, \dot{y}_c) \end{cases}$$

$$\det J = \sin \theta_2$$

در این صورت ode غیر خطی ← ode45 $\theta_1(0), \theta_2(0)$



$$x = vt \Rightarrow \sqrt{2} = 0.1t \rightarrow t = \frac{1.4}{0.1} \approx 14s$$

$$\begin{cases} x_e = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_e = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

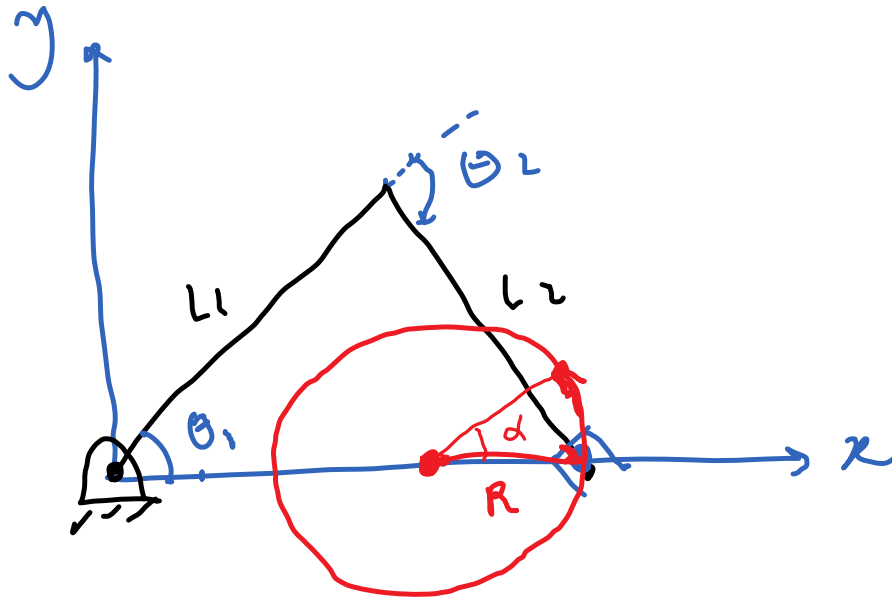
$$L_1 = L_2 = 1$$

$$\theta_1(0) = 45^\circ$$

$$\theta_2(0) = -90^\circ$$

$$\begin{cases} \dot{x}_e = -0.1 \text{ m/s} \\ \dot{y}_e = 0 \end{cases}$$

Plot (x_e, y_e)



$$\begin{cases} x_e = R \cos \alpha(t), & \alpha = 0, 2\pi \\ y_e = R \sin \alpha(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_e = -R \dot{\alpha} \sin \alpha(t) \\ \dot{y}_e = R \dot{\alpha} \cos \alpha(t) \end{cases}$$

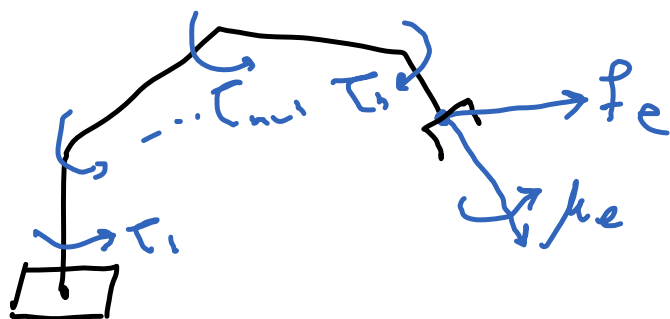
$$\alpha = 2t \rightarrow \dot{\alpha} = 2$$

استاتیک، صلبه را به سن نیروهای اعمالی در e و نیروهای احمالی در مفصل

$$\gamma = \begin{bmatrix} \vec{f}_e \\ \tau_e \end{bmatrix}$$

این نیروی e ، به دو خط نیروهای احمالی توسط
موتورها ایجاد شود

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}$$



داشتن نیروی ، خدمت کنیم که مفصل به جایی در فضای dq داشته باشد
که به جایی ناشی از این جابجایی رباتیک می شود

$$dW_c = \tau_1 dq_1 + \tau_2 dq_2 + \dots + \tau_n dq_n = \tau^T dq$$



بدانند این جابجایی dq ، یک جابجایی در دوران در ee را به

$$dp_e, \omega_e dt$$

تبدیل می‌کنند. لذا این جابجایی در دوران را به جابجایی

$$\delta W_r = p_e^T dp_e + \mu_e^T \omega_e dt = p_e^T J_p dq + \mu_e^T J_0 dq$$

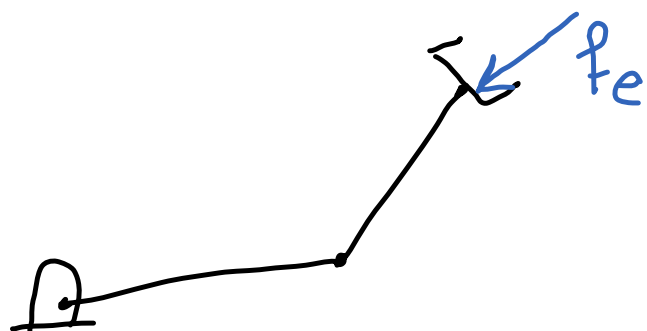
اصل نوسان: $\delta W_r = \delta W_g \Rightarrow \tau^T dq = (p_e^T J_p + \mu_e^T J_0) dq$

$$\Rightarrow \tau^T dq = \delta^T \begin{bmatrix} J_p \\ J_0 \end{bmatrix} dq = \delta^T J dq$$

$$\Rightarrow \tau^T = \delta^T J$$

$$\tau^T = \delta^T J \Rightarrow \tau = J^T \delta$$

مثال:



$$\tau = J_p^T f_e$$

$$J_p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$



رباتیک پیشرفته، سینماتیک دیفرانسیلی

دکتر امین نیکوبین