رباتیک پیشرفته

سینماتیک دیفرانسیلی

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

Fundamental theorem of Linear Algebla

مروری بر قضیه اساسی جبر خطی،

آیا معادله $Ax = b$ را ارضا می‌کند.

$x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

فضای ستونی ماتریس A، $R(A)$ - Column space

فضای تهی کرنل (Span) توسط ستون‌های مستقل ماتریس A،

فضای سطری ماتریس A، $R(A^T)$ - Row space

فضای تشکیل شده (spam) توسط سطرهای مستقل ماتریس A،

- صفر فضای ماتریس A، $N(A)$ ، Null space A

فضای تشکیل شده توسط بردارهایی که در معادله زیر صدق می‌کنند $Ax=0$ (x)

- صفر فضای ماتریس A^T. $N(A^T)$

$A^Tx=0$

مثال: $R(A)$، $N(A)$، $R(A^T)$، $N(A^T)$ را برای ماتریس زیر محاسبه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(A) = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} \right\}$$

$\dim(R(A)) = 2 \rightarrow$ یک فضای $\mathbb{R}^2$، $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$$R(A^T) = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2} \right\}$$

$\dim(R(A^T)) = 2$

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

α_1، α_2 هر مقدار دلخواهی.

محاسبه صفرهای $N(A)$

$$Ax = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 - x_3 + 3x_3 \Rightarrow x_1 = -2x_3 \\ x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3 \end{cases}$$

$$N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

هم بردارهایی که ضربی از یکدیگر هستند

αv_1

$\rightarrow \dim(N(A)) = 1$

$$\mathcal{N}(A^T)$$

$$A^T x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 0 \longrightarrow x_2 = 0$$

$$3x_1 + x_2 = 0$$

$$\mathcal{N}(A^T) = \{\ \}$$

$$\dim \mathcal{N}(A^T) = 0$$

(1) طبق قضیه اساسی جبر خطی

$$DIM\,R(A) = DIM\,(R(A^T))$$

$$DIM\,R(A) + DIM\,N(A) = n$$

مثال حل شده: $A \in R^{2\times 3}$ ،

$$m = 2,\ n = 3$$

$$2 + 1 = 3 \quad \checkmark$$

$$DIM\,R(A^T) + DIM\,N(A^T) = m$$

$$2 + 0 = 2 \quad \checkmark$$

مثال حل شده:

$$\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A^T)$$

$$\mathcal{R}(A^T) \perp \mathcal{N}(A)$$

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad , \quad \mathcal{R}(A^T) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

v_1 v_1' v_2'

$v_1^T v_1' = v_1 \cdot v_1' = 0 \Rightarrow -2 - 1 + 3 = 0$ ✓

$v_1 \cdot v_2' = 0 \Rightarrow -1 + 1 = 0$ ✓

حل معادله $Ax = b$ در فضای یکدیه

طبق توضیحات قبلی اگر $b \in IR(A)$ معادله بالا جواب دارد.

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b$$

$$\rightarrow x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots x_n v_n = b$$

فرض کنید x_p یک پاسخ از معادله $Ax = b$ باشد یعنی

$$Ax_p = b$$

در این صورت $\forall x = x_p + x_n$ که در آن $x_n \in \mathcal{N}(A)$

آنگاه:

$$Ax = A(x_p + x_n) = Ax_p + Ax_n = b$$

از تعریف فضای پوچ $Ax_n = 0$ ،

پس $x_p + x_n$ هم جواب معادله خواهد بود

تعریف: فضای تمام بردارهای مستقل خطی

$\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ ،

می شود کل فضایی که توسط بردارهای v_1 تا v_n حاصل می شود

یعنی هر بردار مثل y که

$y = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_n v_n$ ، α_1 تا α_n

هر عدد واقعی می تواند باشد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = b \quad , \quad b \in R(A)$$

$$R(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad , \quad b = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

یعنی هر بردار دلخواه b ، معادله بالا جواب دارد.

$$R(A) \equiv \mathbb{R}^2$$

$$Ax = b \quad , \quad R(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$ آنگاه

$$b \in R(A) \longrightarrow b = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = b \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$

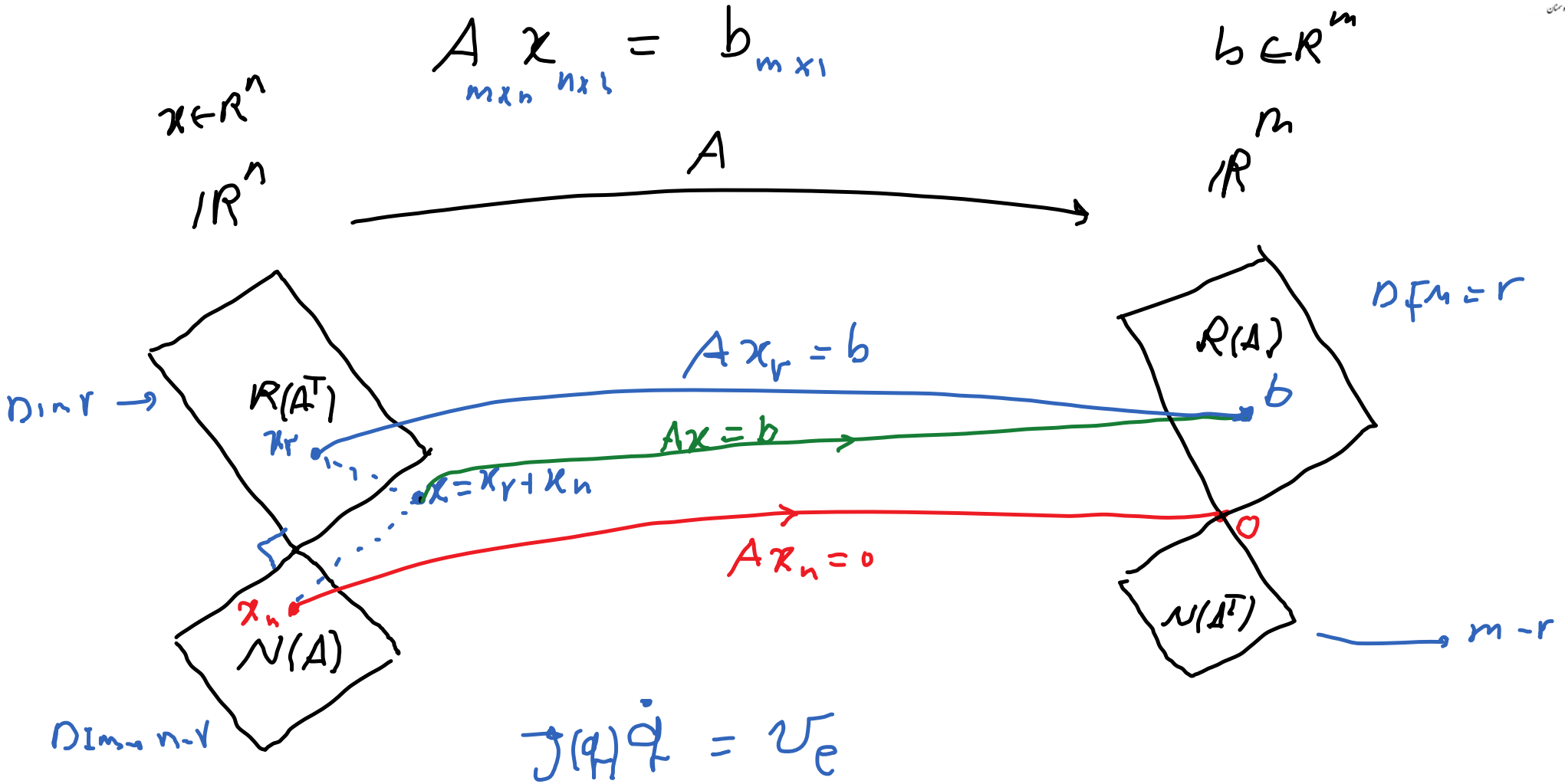
$$x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3$$

$$\Rightarrow x_1 - x_3 + 3x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + 2x_3 = 1$$

$$\rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$x_3 + x_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}^1$$


$A_{m\times n}\, x_{n\times 1} = b_{m\times 1}$
$x \in R^n$
R^n
A
$b \in R^m$
R^m
$\dim r$
$R(A^T)$
x_r
$A x_r = b$
$Ax = b$
$x = x_r + x_n$
$R(A)$
b
$\dim R(A) = r$
$A x_n = 0$
0
x_n
$N(A)$
$N(A^T)$
$m - r$
$\dim n - r$
$J(q)\dot{q} = v_e$

$$J\dot{q} = v_e \ ,$$

$$\mathcal{R}(P) \equiv \mathcal{N}(J) \ ,$$

$$\mathcal{N}(J) = \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \quad P = v_1$$

$$\mathcal{N}(J) = \left\{ v_1 , v_2 \right\} \rightarrow \quad P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$