



دینامیک پیشرفته

دینامیک اجسام صلب

ادامه ممان اینرسی

دکتر امین نیکوبین

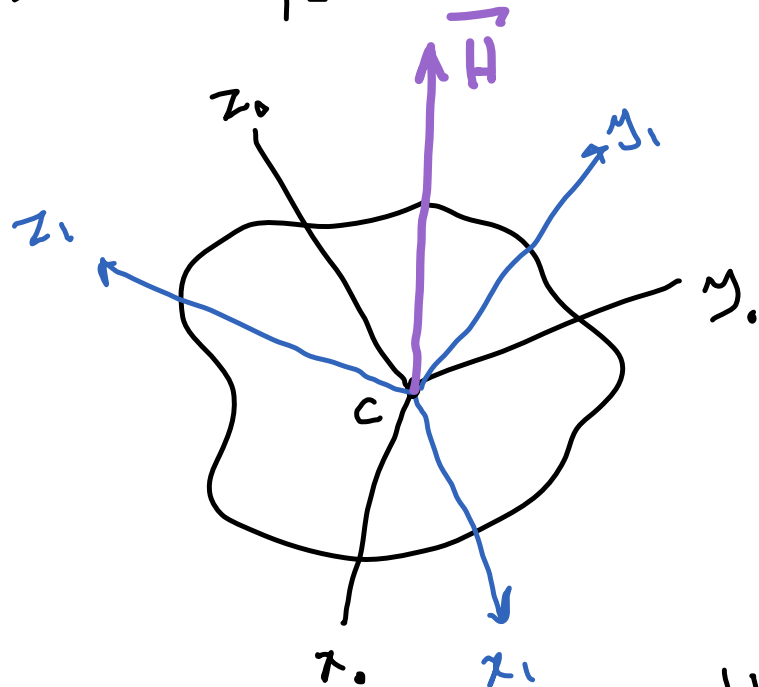
دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

Principle axes

محورهای اصلی،

معمولاً جهت‌هایی هستند که مانند سه محور اصلی یک سیستم مختصات، یک جسم را در فضای سه بعدی توصیف می‌کنند.



مانند سه تبدیل مختصات نسبت به هم R, R_1, R_2

H ، به یک محور اصلی نسبت به یک نقطه C

بیان H در مختصات H^0

~ ~ ~ ~ ~

$$H^0 = R_1^0 H^1$$

از قبل دانسته می‌شود



$$H^0 = I^0 \omega^0, \quad H^1 = I^1 \omega^1, \quad H^0 = R^0 H^1,$$

فریم واحد در بیج صلب متصل است.

$$\Rightarrow I^0 \omega^0 = R I^1 \omega^1 \Rightarrow I^0 \omega^0 = (R I^1 R^T) \omega^0$$

از طرف دیگر

$$\omega^0 = R \omega^1$$

$$\omega^1 = R^T \omega^0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I^0 = R I^1 R^T \\ I^1 = R^T I^0 R \end{cases}$$

رایج تبدیل هندسی میزنیم، 3 مؤلفه دارد

رایج تبدیل هندسی از یک فریم به فریم دیگر،



نقطه مرکزی 0 ← کمترین انرژی استاندارد ، 3^0 مؤلفه، جرم، زمان، $m^0 = m^1$

نقطه مرکزی 1 ← برابری 3^1 ، نیز، گشتاور، شتاب
محصول حقیقی و زوایای ...
 $F^0 = R^0 F^1$

نقطه مرکزی 2 ← 3^2 مؤلفه ، همان انرژی، نقش و گردش

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$I^0 = R I^1 R^T$$

نقطه مرکزی 4 ← 3^4 مؤلفه

$$\sigma = E \epsilon , \quad \sigma_{ij} = E_{ijrs} \epsilon_{rs}$$



دینال R ی هسته که منبیه I' قطری شود ،

$$I' = R^T I^0 R$$

- فرض کنید A دارای n مقدار ویژه متمایز $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باشد و n بردار ویژه متناظر $v_1, v_2, \dots, v_n$ باشد پس داریم:

$$\begin{cases} Av_1 = \lambda_1 v_1 \\ Av_2 = \lambda_2 v_2 \\ \vdots \\ Av_n = \lambda_n v_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow [Av_1 \ Av_2 \ \dots \ Av_n] = [v_1 \lambda_1 \ \dots \ v_n \lambda_n]$$

$$\Rightarrow \overbrace{A[v_1 \ \dots \ v_n]}^T = \overbrace{[v_1 \ \dots \ v_n]}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$



$$AT = T^{-1} \Lambda \Rightarrow T^{-1}AT = \Lambda$$

T ماتریس تبدیلی است که سکوتهای آن، بردارهای ویژه ماتریس A است

$$R^T I^0 R = I^1, \quad T^{-1} = T^T \text{ متعامد،}$$

سک فضا است،

۱- مفادید وید: ماتریس I^0 را حسب کنیم I_1, I_2, I_3

۲- حسب بردار ویژهها، v_1, v_2, v_3

$$I^1 = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{bmatrix}, \quad R = [v_1 \ v_2 \ v_3]$$

$$R^T I^0 R = I^1 \quad -3$$

-4



محورهای مارتیس محل انبندی بدنه اندیس منفرد و ثابت معین است،
مقادیر و نیز آن هموار، مثبت و حقیقی خواهد شد.

انرژی جنبشی ناشی از حرکت دورانی

$$E = \frac{1}{2} \omega^T I \omega$$

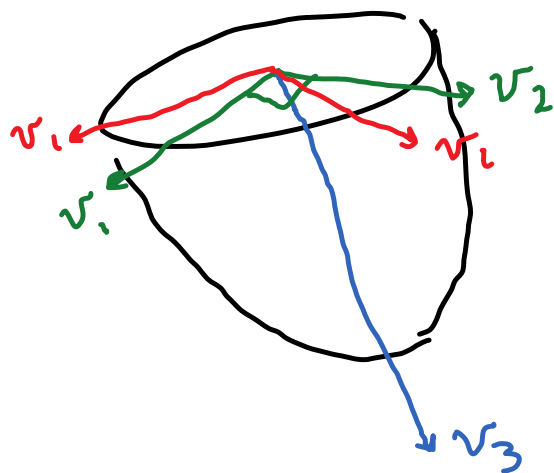
ماندیس آیکه اندیس مثبت معین است

موتور نسیم مقادیر و نیزهای مارتیس I به صورت I_1, I_2, I_3 و I_4 محاسبه می‌کنند

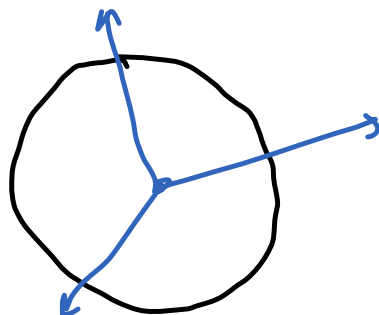
- $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ جهت سه برابری در نزد محورهای بدنه خواهد آمد.

- $I_1 = I_2 \neq I_3$ به جهت I_1 یک به دو دارند، جهت خواهد آمد. هر دو برابر
(البسی که محورهای دارند) محور بدنه که بر I_3 محور باشند، و جهت اصلی خواهد بود

3- مستطین بر محور تقاطع خواص دور



- I_1, I_2, I_3 هر سه محور عمود بر هم، محوری اصلی خواهد بود.
برای تک کره





بدان، مجموع زائیدی نسبت به فرم ۰

$$H^o = I^o \omega' \rightarrow H' = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

بدان، مجموع زائیدی نسبت به فرم ۱

$$H = H_x i + H_y j + H_z k, \quad H_x = I_{xx} \omega_x + I_{yx} \omega_y + I_{zx} \omega_z$$

$$H' = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{bmatrix}$$

$$H' = H_1 i_1 + H_2 i_2 + H_3 i_3, \quad H_1 = I_1 \omega_1$$

مثال: ماتریس همان اینرسی یک جعبه حول مرکز جرمش؛ طولها ۱، ۱ و ۲ متر است، مقادیر اصلی و جهت‌های اصلی را حساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 4$$
$$I_1 = I_2 = 1, \quad I_3 = 4$$



$$(A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -4 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \textcircled{1} -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \textcircled{2} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ \textcircled{3} -x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

برای سادگی معادله ها را به صورت زیر بنویسیم: $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\textcircled{1} + \textcircled{3} \Rightarrow -3x_1 - x_3 - x_3 = 0 \Rightarrow -3x_1 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}x_3$$

$$-3x_2 - 3x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3 \xrightarrow{\textcircled{1}} -2x_1 - x_3 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3$$



$$P_0, \lambda = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \rightarrow v_1, v_2 \text{ عمود هستند}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \\ a_3 \end{bmatrix}, \xrightarrow{v_1 \perp v_2} a_2 + a_3 = 0$$

انتخاب راس

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 + a_3 = 0$$

$$R = [v_1 \ v_2 \ v_3] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

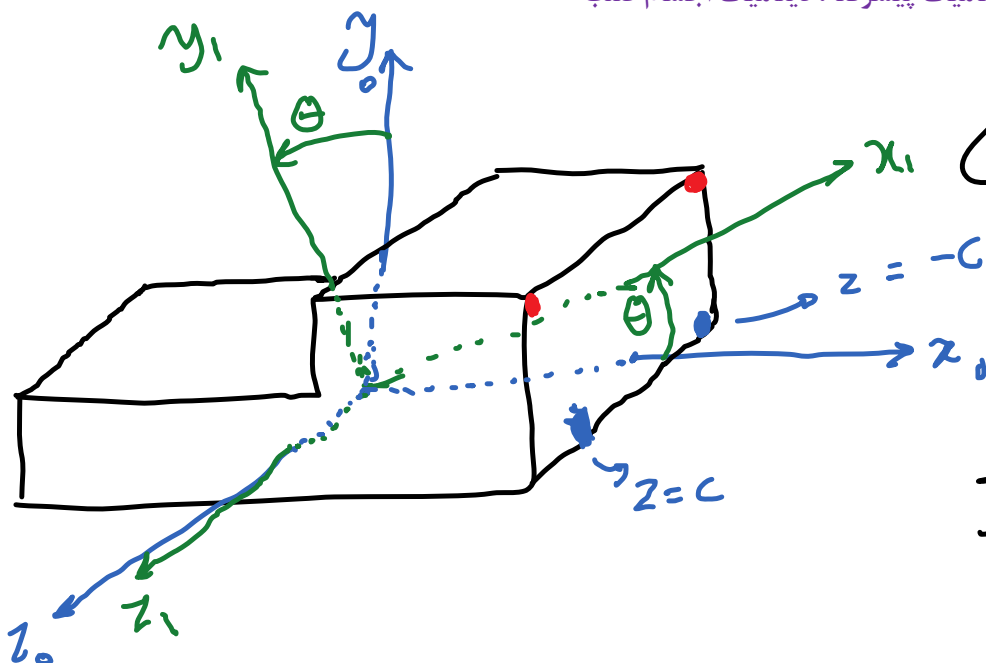
$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $\lambda_1=1$ 1 4

ماتریس R به یک شکل است

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$R^T I^0 R = I^1$$

$$R^T A R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$



ابکارهای صفت تغییرات

xy صفت تغییرات

$$I_{xz} = - \int xz dm = 0$$

$$I_{yz} = - \int yz dm = 0$$

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل بین فریم ها،

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$I' = R^T I^0 R$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{2} I_2 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{3} I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta & s_\theta & 0 \\ -s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} R$$

$$\begin{cases} \textcircled{1} I_1 = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta + 2 I_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \textcircled{2} 0 = I_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (I_y - I_x) \sin \theta \cos \theta \\ \textcircled{3} I_2 = I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta - 2 I_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \textcircled{4} I_3 = I_{zz} \end{cases} \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{I_{xy}}{\frac{1}{2} (I_x - I_y)}$$

$\theta = \checkmark$

$\textcircled{1}, \textcircled{3} \Rightarrow I_1, I_2 = \checkmark$



دینامیک پیشرفته، دینامیک اجسام صلب

دکتر امین نیکوبین