



رباتیک پیشرفته سینماتیک دیفرانسیلی

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir



سینماتیک دیفرانسیلی معکوس

$$m = n$$

$$v_e = J(q) \dot{q}$$

حل معکوس $\Rightarrow \dot{q} = J^{-1}(q) v_e$ if $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$, non redundant

حل این مسئله هم با کدهای MATLAB و با کدهای سارتر

$$\Rightarrow \frac{q(t_{k+1}) - q(t_k)}{\Delta t} = J^{-1}(q(t_k)) v_e(t_k)$$

$$\Rightarrow q(t_{k+1}) = q(t_k) + \Delta t \left[J^{-1}(q(t_k)) v_e(t_k) \right]$$

$$\Delta t = t_{k+1} - t_k$$

برای ربات / Redundant

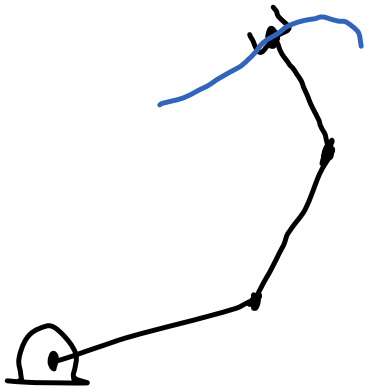
$$v_e = J(q) \dot{q}, \quad q \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad v_e \in \mathbb{R}^{m \times 1},$$

نسبت $m = r$

$$\Rightarrow J \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m < n,$$

در صورت بنهایت جواب برای این معادله را هم به دلیل وجود درجات آزادی می توان جواب برای متعددی را به دست آورد.

در صورت انتخاب بیشتری، پس می توان یک تابع پالیسی مورد نظر را بهینه کرد.





تاج هدف به انتفا کنیم که آزا کمینه آریم

$$g(\dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T W \dot{q}$$

W کاتیندیس منت معین است

$$\text{Ex. , } g(\dot{q}) = \frac{1}{2} [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3] \begin{bmatrix} w_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & w_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow g(\dot{q}) = \frac{1}{2} [w_1^2 \dot{\theta}_1^2 + w_2^2 \dot{\theta}_2^2 + w_3^2 \dot{\theta}_3^2]$$

کاتیندیس W، کاتیندیس است $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ و w_1, w_2, w_3 کاتیندیس است



$$\textcircled{I} \quad v_e = J(q) \dot{q} \quad , \quad \textcircled{II} \quad g(\dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T W \dot{q}$$

بالفرض خدایست لگرانژ

$$g(\dot{q}, \lambda) = \frac{1}{2} \dot{q}^T W \dot{q} + \lambda^T (v_e - J(q) \dot{q})$$

$$\rightarrow \lambda^T J \dot{q} \\ \dot{q}^T J^T \lambda$$

$$\frac{\partial g'}{\partial \dot{q}} = 0 \Rightarrow W \dot{q} - J^T \lambda = 0 \Rightarrow \dot{q} = W^{-1} J^T \lambda$$

$$\frac{\partial g'}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow v_e - J \dot{q} = 0 \Rightarrow v_e = J \dot{q}$$

$$\dot{q} = w^{-1} J^T \lambda, \quad v_e = J \dot{q}$$

$$v_e = (J w^{-1} J^T) \lambda \Rightarrow \lambda = (J w^{-1} J^T)^{-1} v_e$$

چون ماتریک مازیس مثبت معین است، اشیای می شود که $J w^{-1} J^T$ همواره معکوس پذیر است.

$$\Rightarrow \dot{q} = w^{-1} J^T (J w^{-1} J^T)^{-1} v_e$$



$$\dot{q} = W^{-1} J^T (J W^{-1} J^T)^{-1} v_e$$

حالت ایده‌آل $W = I$

$$\dot{q} = J^T (J J^T)^{-1} v_e$$

$$\Rightarrow \dot{q} = J^+ v_e$$

$$J^+ = J^T (J J^T)^{-1}$$

بالفرض

$$\dot{q} = J^T (J J^T)^{-1} v_e$$

$$q(t_{k+1}) = q(t_k) + \Delta t \left[J^T(t_k) (J(t_k) J^T(t_k))^{-1} v_e(t_k) \right]$$

$$\dot{q} = \dot{q}^x + P \dot{q}_0, \quad P \equiv N(J)$$

$P \dot{q}_0$ باعث این یک حرکت داخلی در مفصل می شود
بدون اینکه سرعت e را تغییر دهد.

حالت به دست آوردن مقدار مناسب $\dot{q}_0$ گونیزی که یک تابع هدف اولیه
باشد. تابع هدف جدید زیر را در نظر بگیرید.

$$g(\dot{q}, \dot{q}_0) = \frac{1}{2} (\dot{q} - \dot{q}_0)^T W (\dot{q} - \dot{q}_0) + \lambda^T (v_e - J \dot{q})$$



$$\frac{\partial g}{\partial \dot{q}} = 0 \Rightarrow \dot{q} = J^T \lambda + \dot{q}_0, \quad W = \hat{I}$$

$$v_e = J \dot{q} \Rightarrow v_e = J J^T \lambda + J \dot{q}_0$$

$$\Rightarrow \lambda = (J J^T)^{-1} [v_e - J \dot{q}_0] \quad P$$

$$\dot{q} = J^T (J J^T)^{-1} v_e + [I_n - J^T (J J^T)^{-1} J] \dot{q}_0$$

$$\Rightarrow \dot{q} = \dot{q}^* + P \dot{q}_0 \quad \left[\dot{q} = J^+ v_e + [I_n - J^+ J] \dot{q}_0 \right]$$

$$\underbrace{[I - J^T(JJ^T)^{-1}J]}_P \in \mathcal{N}(J)$$

$$Jx = 0 \rightarrow x \in \mathcal{N}(J)$$

$$\Rightarrow JP = J[I - J^T(JJ^T)^{-1}J] = J - \overbrace{(JJ^T)(JJ^T)^{-1}}^I J = 0$$

