



مکاترونیک

مروری بر دینامیک و مدلسازی دینامیکی

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

حل معادلات دینامیکی، شبیه سازی

حل معادلات دینامیک معکوس
.....
منتیج

در حالت کلی معادلات دینامیکی سیستم های مکانیکی

$$M(q) \ddot{q} + H(q, \dot{q}) + G(q) = T, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

$$M(q) \ddot{q} + H(q, \dot{q}) + G(q) = T, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

$$M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$H \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$G \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

ماتریس اینرسی،

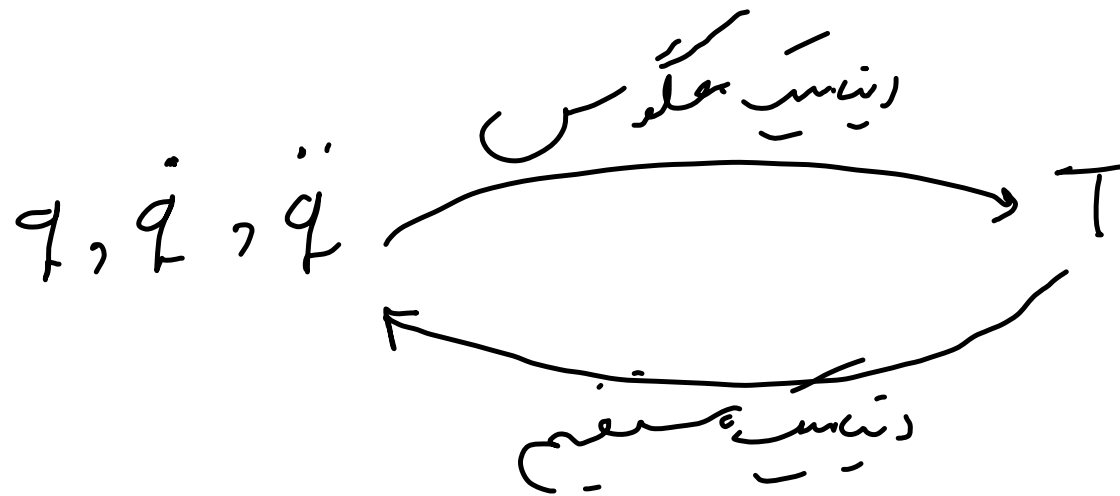
بدون اندیشه‌های کمپولس و جانب مرکز

~ ~ ~ ناشی از جاذبه

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix}$$

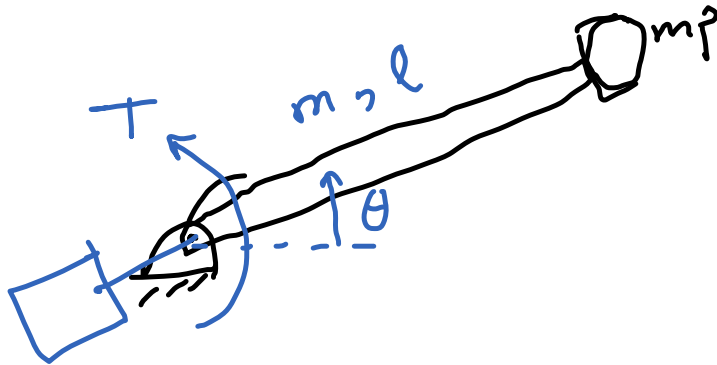
نیروها / گشتاورهای وارد بر سیستم

$$M(q) \ddot{q} + H(q, \dot{q}) + G(q) = T$$



دینامیک معکوس

مثال: ربات تک لیگی

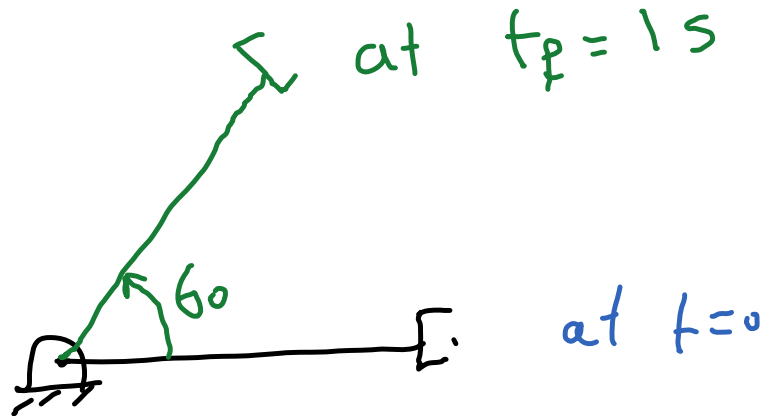


$$\left(\frac{m_l l^2}{3} + m_p l^2 \right) \ddot{\theta} + \left(\frac{m}{2} + m_p \right) g \cos \theta = T$$

حل دینامیک معلوم

معلوم: $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$

→ trajectory planning



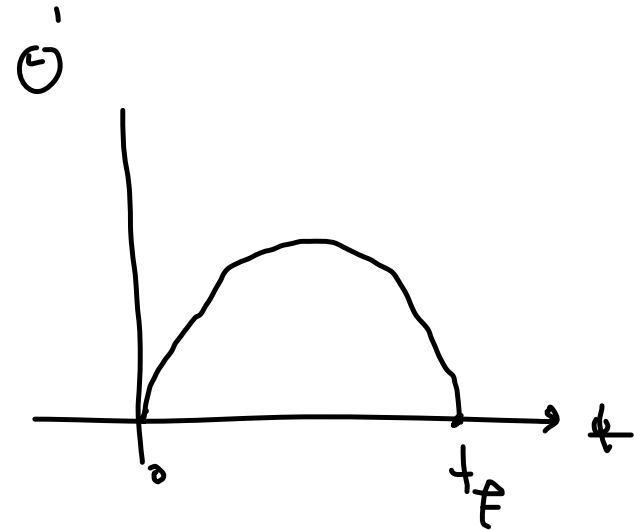
حاصل میسر

بغضن مثل

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) \neq 0$$

$$\theta(t_f) = \frac{\pi}{3}, \quad \dot{\theta}(t_f) = 0$$

$$\theta(t) = ?$$





۳.۱. فرضیه "شش برای طراحی ساده" است. از چندجمله‌ای‌ها

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad a_0 \leq a_3$$

لازمه‌ایست که از شرایط مرزی می‌توان آنرا را به گونه‌ای نوشت که
 $\dot{\theta}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

$$\theta(t_f) = \theta_f \Rightarrow a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 = \theta_f \Rightarrow -\frac{3}{2} a_3 t_f^3 + a_3 t_f^3 = \theta_f$$

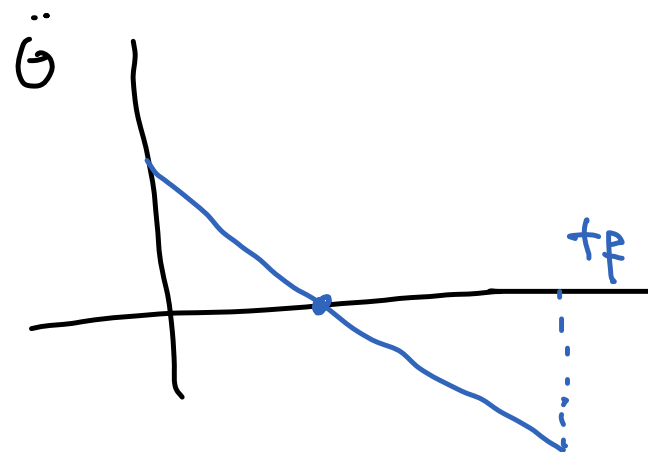
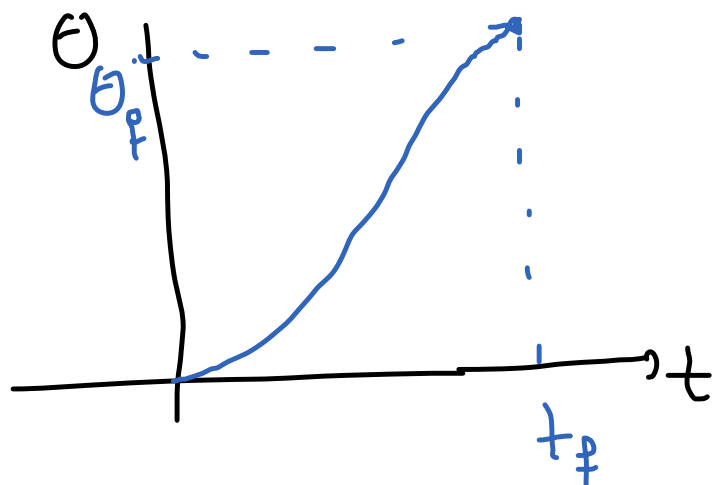
$$\dot{\theta}(t_f) = 0 \Rightarrow 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 = 0 \Rightarrow t_f (2a_2 + 3a_3 t_f) = 0$$

$$\Rightarrow a_2 = -\frac{3}{2} a_3 t_f$$

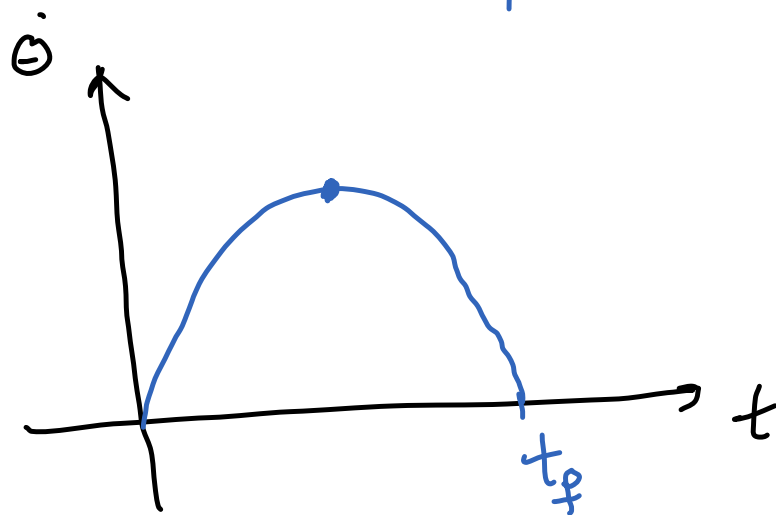
$$-\frac{3}{2}a_3 t_f^3 + a_3 t_f^3 = \theta_f \Rightarrow -a_3 t_f^3 = \theta_f \Rightarrow a_3 = -\frac{\theta_f}{t_f^3}$$

$$a_2 = -\frac{3}{2}a_3 t_f \Rightarrow a_2 = \frac{3}{2} \frac{\theta_f}{t_f^2}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \frac{3}{2} \frac{\theta_f}{t_f^2} t^2 + \left(\frac{-\theta_f}{t_f^3} \right) t^3$$

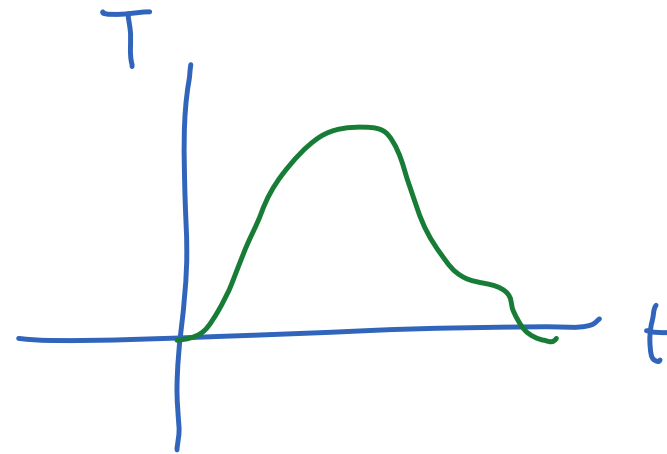


$$\ddot{\theta} = t^2 a_2 + 6a_3 t$$



$$\left(\frac{ml^2}{3} + m_p l^2 \right) \ddot{\theta} + \left(\frac{m}{2} + m_p \right) l \omega \dot{\theta} = T$$

$$\Rightarrow T(t)$$



$$H(t) = T(t) \dot{\theta}(t) \quad \text{سمت راست}$$

$$\underbrace{\left(\frac{m l^2}{3} + m_p l^2 \right)}_{I_e} \ddot{\theta} + \left(\frac{m}{2} + m_p \right) l \cos \theta = T$$

$T = \checkmark \longrightarrow$

$\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ ✓ $\begin{pmatrix} \text{cris} \\ \text{mi} \end{pmatrix}$
non linear ode $\rightarrow$ ode45

ode45 ✓
کد نویسی ✓
نسبت ری، ج، و ص ✓
~ ~ - ?
MATLAB

(simmechanic) Simscape

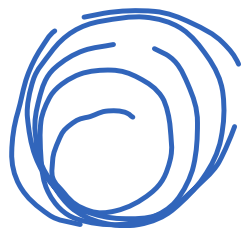
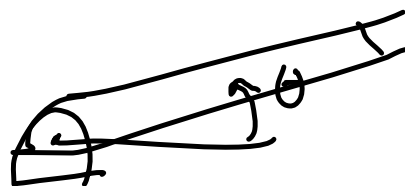
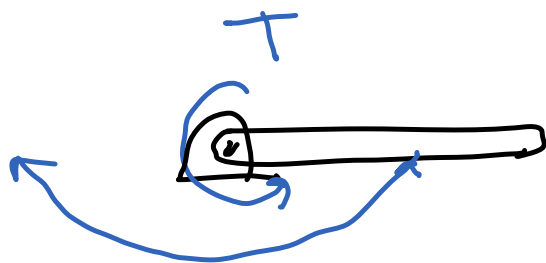


$$I_e \ddot{\theta} + \left(\frac{m}{2} + m_p \right) g l \cos \theta = T$$

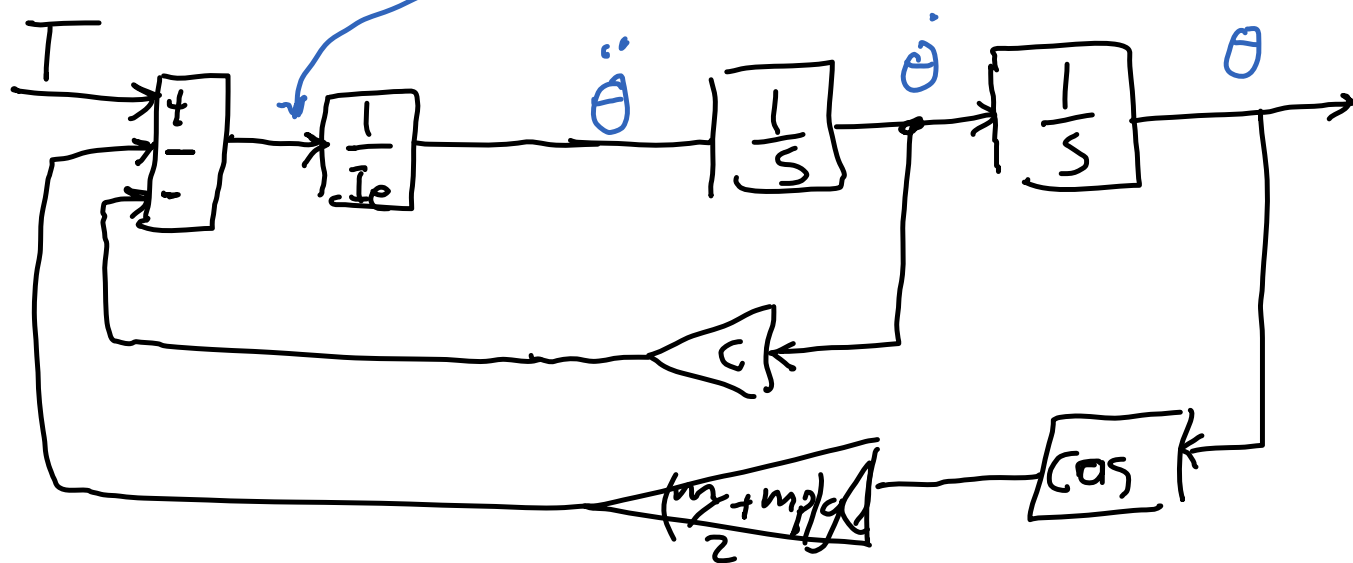
$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_e} \left[T - \left(\frac{m}{2} + m_p \right) g l \cos \theta - c \dot{x} \right], \quad \dot{x} = f(x, t)$$

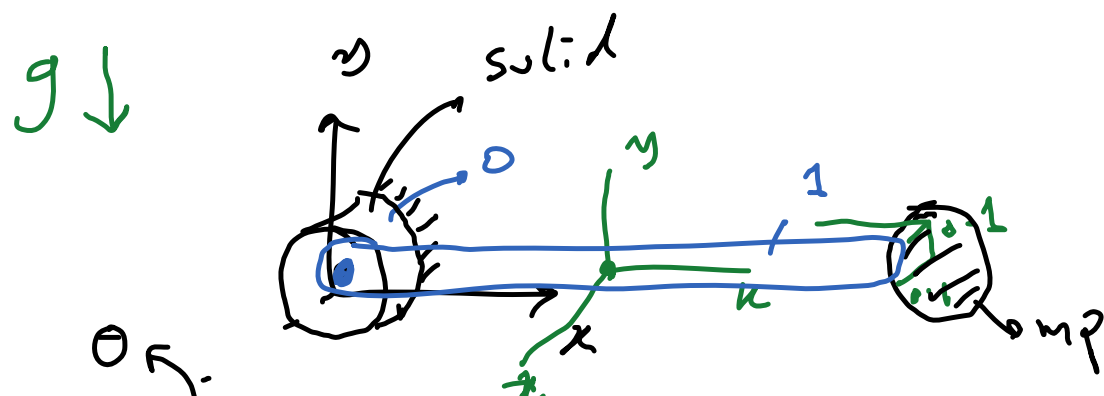
$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{I_e} \left[T - \left(\frac{m}{2} + m_p \right) g l \cos x_1 - c x_2 \right] \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \theta(0) \\ x_1(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \longrightarrow y_0$$



$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J_e} \left[T - \left(\frac{m}{2} + m_p \right) g l \cos \theta - c \dot{\theta} \right]$$

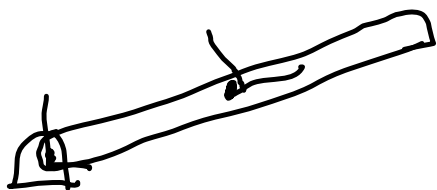




$$[L, 0.1, 0.1]$$

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{L}{2} \cos \theta & \frac{L}{2} \sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$





تکلیف

مکاترونیک، مروری بر دینامیک

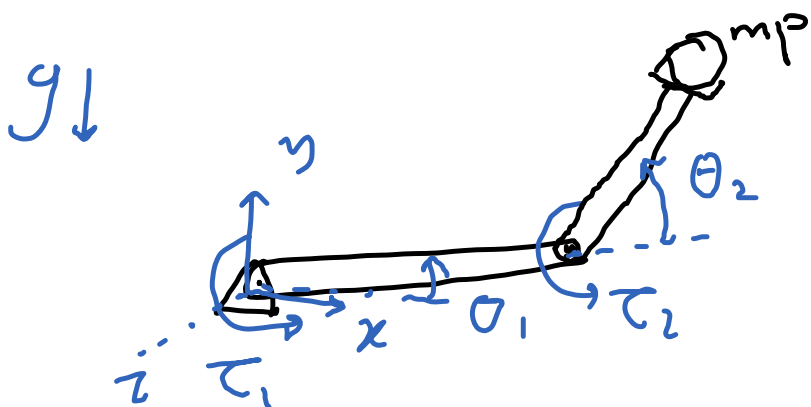
دکتر امین نیکوبین

- برای یک ربات دو لنگه .

$$m_1 = 1 \text{ kg} , \quad m_2 = 0.5 \text{ kg}$$

$$l_1 = 0.5 \text{ m} \quad l_2 = 0.25 \text{ m}$$

$$m_p = 0.2 \text{ kg}$$



(a) معادلات دینامیکی را به روش لگرانژ استخراج کنید.

(b) حل معادلات دینامیک معکوس برای مسیر زیر، انحراف کمترین انرژی مصرفی را پیدا کنید.
مسیر را در پایین مشخص می‌کنیم.

$$\theta_1(0) = 0, \quad \dot{\theta}_1(0) = 0, \quad \theta_1(t_f) = \frac{\pi}{6}, \quad \dot{\theta}_1(t_f) = 0 \rightarrow \theta_1(t)$$

$$\theta_2(0) = 0, \quad \dot{\theta}_2(0) = 0, \quad \theta_2(t_f) = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta}_2(t_f) = 0 \rightarrow \theta_2(t)$$



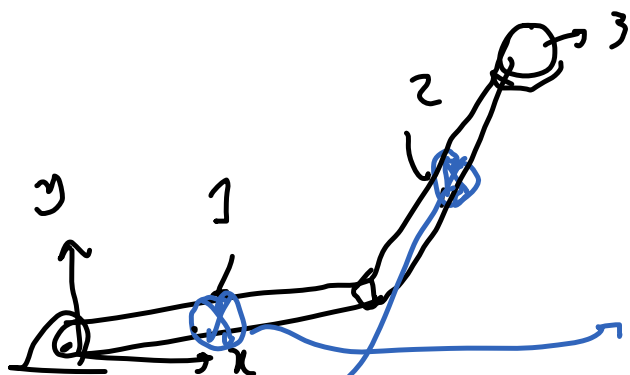
(c) - حل دینامیک منفعیه با ode45 ، τ_1 و τ_2 را محاسبه کنید.

(d) - مدلسازی و شبیه سازی با Simscape ، حل دینامیک منفعیه

(e) مفهیم جابجایی در c و d

(f) حل دینامیک منفعیه با مدل Simscape و منفعیه جابجایی با (g)

$$\theta_1, \theta_2 \xrightarrow{(b)} T, H$$



$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 \rightarrow \dot{x}_1 = \checkmark \\ y_1 = \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \rightarrow \dot{y}_1 = \checkmark \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \rightarrow \dot{x}_2 \\ y_2 = l_1 \sin \theta_1 + \frac{l_2}{2} \sin (\theta_1 + \theta_2) \rightarrow \dot{y}_2 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} x_p = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \rightarrow \dot{x}_p \\ y_p = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \rightarrow \dot{y}_p \end{cases}$$



$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ + \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} \bar{I}_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \bar{I}_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

$$\bar{I}_1 = \frac{m_1 l_1^2}{12}, \quad \bar{I}_2 = \frac{m_2 l_2^2}{12}$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = m_1 g \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 + m_2 g \left(l_1 \cos \theta_1 + \frac{l_2}{2} \cos (\theta_1 + \theta_2) \right) \\ + m_p g \left(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \right)$$

$$L = T - U$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \tau_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \tau_2 \end{cases}$$



مکاترونیک، مروری بر دینامیک

دکتر امین نیکوبین