دینامیک پیشرفته

دینامیک اجسام صلب

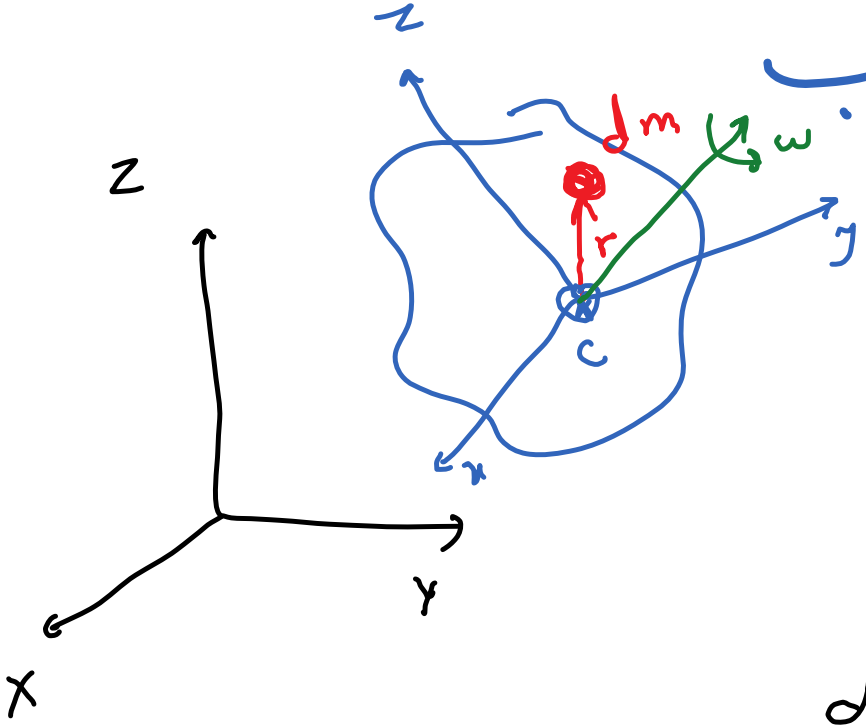
اصل کار و انرژی برای اجسام صلب

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

اصل کار و انرژی برای یک جسم صلب



اصل کار و انرژی برای یک ذره به صورت زیر بیان شد

$$\int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr = dT \quad , \quad dT = \frac{1}{2} v^2 dm$$

$$dT = \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}\, dm \quad , \quad v = v_c + \omega \times r$$

$$\Rightarrow dT = \frac{1}{2} (v_c + \omega \times r) \cdot (v_c + \omega \times r)\, dm =$$

$$dT = \frac{1}{2}(v_c + \omega \times r) \cdot (v_c + \omega \times r)\, dm =$$

$$\Rightarrow dT = \frac{1}{2} v_c \cdot v_c\, dm + \frac{1}{2}(\omega \times r) \cdot (\omega \times r)\, dm + v_c \cdot (\omega \times r)\, dm$$

$$T = \int_m dT = \int_m \left[\frac{1}{2} v_c \cdot v_c\, dm + \frac{1}{2}(\omega \times r) \cdot (\omega \times r)\, dm + v_c \cdot (\omega \times r)\, dm \right]$$

از آنجایی که $v_c \cdot \omega \times \int r\, dm = 0$ ، چون میانگین در مرکز جرم صفر است.

$$T = \frac{1}{2} m (v_c \cdot v_c) + \frac{1}{2} \int (\omega \times r) \cdot (\omega \times r)\, dm$$

T_t ناشی از انتقال

T_r ناشی از دوران

$T = T_t + T_r$

T_r : انرژی جنبشی ناشی از دوران سرعت زاویه‌ای ω

T_t : ~ ~ ~ انتقال ~ خطی v_c

$$T_r = \frac{1}{2}\int (\omega \times r)\cdot(\omega \times r)\, dm$$

از قبل داشتیم که، ممان مومنتم زاویه‌ای برای جسم صلب

$$H_c = \int r \times (\omega \times r)\, dm = I_c \omega$$

پس داریم

$$\omega \cdot H_c = \int \omega \cdot [r \times (\omega \times r)]\, dm = \int (\omega \times r)\cdot(\omega \times r)\, dm = 2T_r$$

$$\Rightarrow T_r = \frac{1}{2}\omega \cdot H_c = \frac{1}{2}\omega \cdot I_c \omega = \frac{1}{2}\omega^T I_c \omega$$

$$I_C = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ \vdots & \ddots & \\ & & I_{zz} \end{bmatrix}$$

که در آن

اگر محورهای مختصات بر محورهای اصلی باشند

$$T_V = \frac{1}{2}\omega^T I_C \omega = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 \right)$$

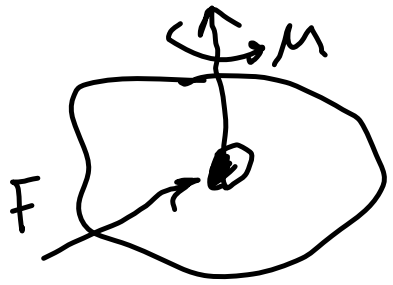
اگر CS متصل به مرکز جرم باشد

$$T_r = \frac{1}{2}\left(I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2\right) + I_{xy}\omega_x\omega_y + I_{xz}\omega_x\omega_z + I_{yz}\omega_y\omega_z$$

$$T = \frac{1}{2} m v_c^T v_c + \frac{1}{2} \omega^T I_c \omega$$

برای یک ذره نیرو را فکر کنید.

$\int F \cdot dr$



کار انجام شده برای یک جسم صلب به صورت زیر خواهد

$$W_{1-2} = \int F \cdot dr + \int M \cdot d\theta$$

از قبل دانستیم که

$$\int F \cdot dr = \Delta T_t$$

$$W_{1-2} = \Delta T \Rightarrow \int F \cdot dr + \int M \cdot d\theta = \Delta T_t + \Delta T_r$$

بنابراین داریم

$$\int M \cdot d\theta = \Delta T_r$$

$$\int F \cdot dr = \Delta T_t$$

کار انجام شده توسط نیروهای خارجی، انرژی جنبشی کل سیستم را تغییر می‌دهد

اگر همه نیروهای اعمالی پایستار باشند، اصل بقای انرژی را داریم

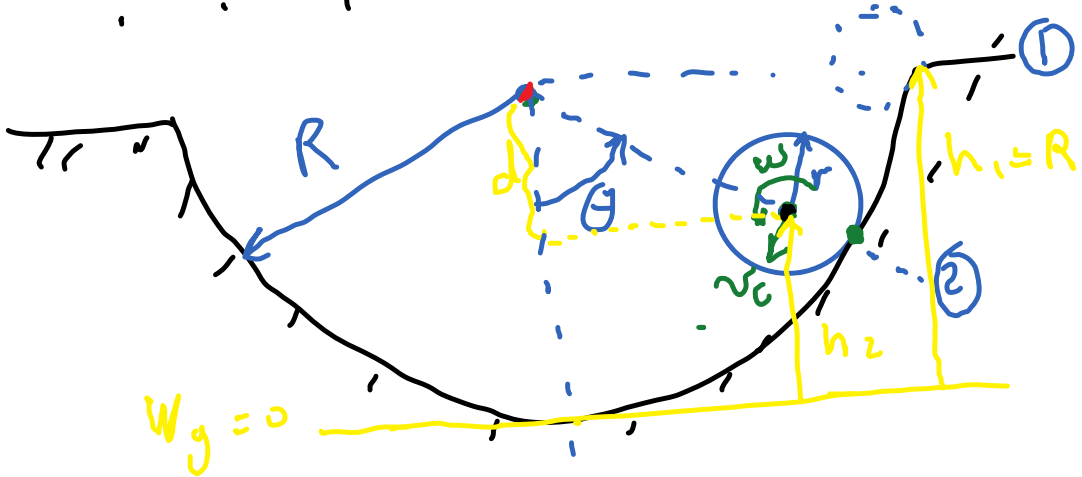
$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = E = \text{ثابت}$$

در حالت کلی، (کار انجام شده توسط نیروهای پایستار $-\Delta U$)

$$W_{1-2} = \Delta T + \Delta U = \Delta T + \Delta W_g + \Delta W_e$$

$$\Delta T = T_2 - T_1, \quad \Delta W_g = mg(h_2 - h_1), \quad \Delta W_e = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

Ex. کره‌ای به جرم m و شعاع r داخل یک سطح استوانه‌ای بدون لغزش نوسان می‌کند. اگر کره از $\theta = \frac{\pi}{2}$ از حالت سکون رها شود، عبارتی برای سرعت مرکز جرم آن برحسب θ به دست آورید.



$$W_{1-2} = \Delta T + \Delta W_g + \Delta W_e$$

$$\Delta T = \Delta T_t + \Delta T_r$$

$$\Delta T_t = T_{t2} - T_{t1} = \frac{1}{2} m v_c^2$$

$$\Delta T_r = T_{r2} - T_{r1} = \frac{1}{2} I_c \omega^2$$

$$v_c = r\omega = -(R-r)\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow v_c = -(R-r)\dot{\theta}$$

$$\omega = -\frac{(R-r)}{r}\dot{\theta}$$

$$\Delta W_g = mg(h_2 - h_1) = mg(R - d - R)$$

$$= -mg(R - r)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \Delta T + \Delta W_g = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{2}{5}mr^2\right)}_{I}\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot{\theta}^2$$

$$- mg(R - r)\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{10}{7}\frac{g}{R-r}\cos\theta, \quad v_c = -(R-r)\dot{\theta} = -\left[\frac{10}{7}g(R-r)\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}}$$

مثال: انرژی جنبشی را برای مخروط غلطان مثال 4.2 محاسبه کنید.

$$\Omega = \left(\omega_0 \sin\alpha - \frac{\omega_0}{\sin\alpha}\right) i + \omega_0 \cos\alpha\, k \;, \qquad v_c = \frac{3}{4} m h \omega_0 \cos\alpha\, j$$

$$T = \frac{1}{2} m v_c^T v_c + \frac{1}{2} \Omega^T I_c \Omega \;, \qquad I_c = \begin{bmatrix} & & \\ & a & \\ & & \alpha \end{bmatrix}$$

می‌توان انرژی جنبشی را به صورت زیر هم نوشت

$$T = \frac{1}{2} \Omega^T I_0 \Omega$$

اصل ضربه و مومنتوم برای یک جسم صلب

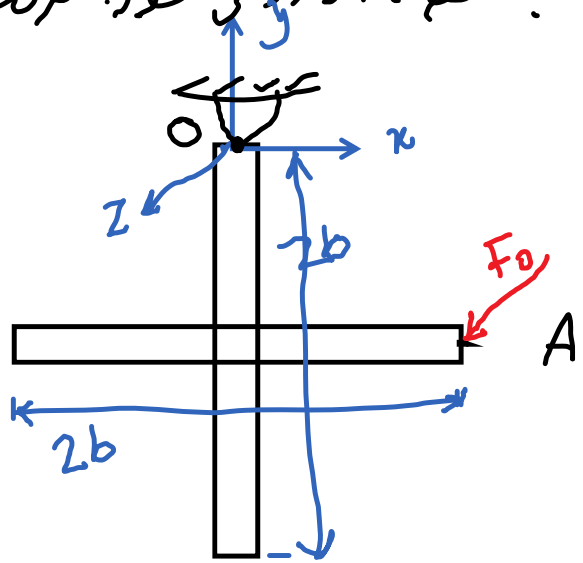
$$\int_{t_1}^{t_2} F\,dt = m v_c(t_2) - m v_c(t_1) = G_2 - G_1$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M_c\,dt = H_c(t_2) - H_c(t_1) = H_{c2} - H_{c1} \quad , \quad H_c = I_c \omega$$

$$\int M_o\,dt = H_{o2} - H_{o1} \qquad H_o = I_o \omega$$

Ex-12 یک صلیب به جرم m مطابق شکل زیر از یک مفصل کروی آویزان شده است.

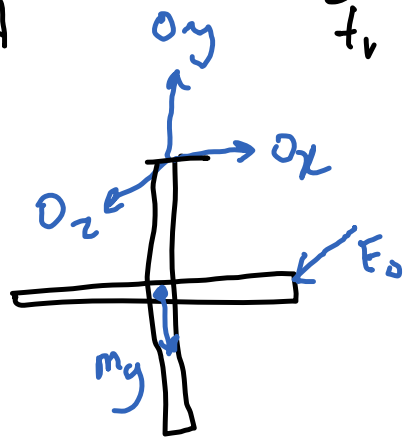
نیروی ثابت F_0 در راستای محور z در مدت زمان Δt به نقطه A وارد می‌شود. سرعت زاویه‌ای جسم را بلافاصله بعد از ضربه به دست آورید.



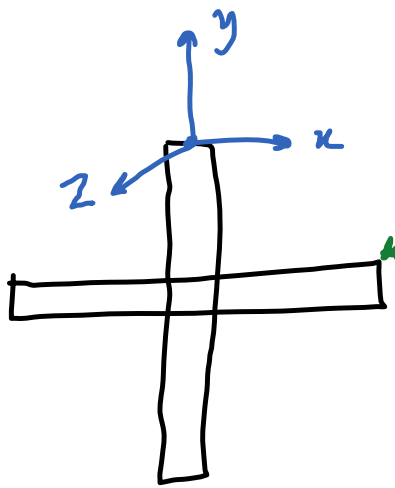
$$\int_{t_1}^{t_2} M_O\,dt = H_{O_2} - H_{O_1}$$

$$\int M_O\,dt = \int_0^{\Delta t} (b\,i - b\,j) \times (F_0\,k)\,dt$$

$$= -bF_0\Delta t\,j - bF_0\Delta t\,i$$



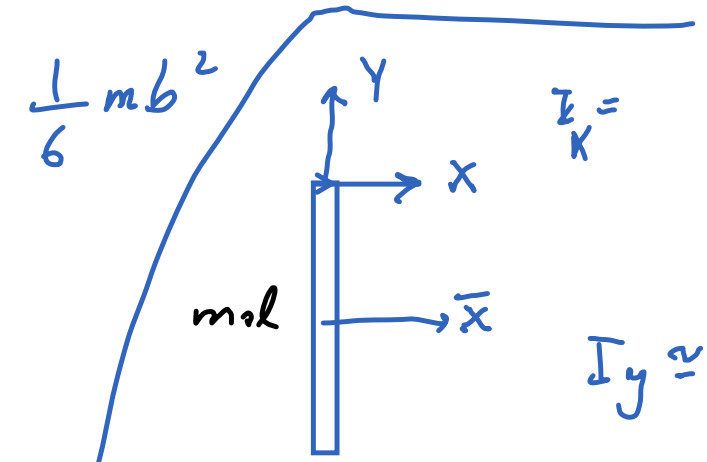
$$\vec{H}_{o2} = I_o \omega = I_x \omega_x i + I_y \omega_y j + I_z \omega_z K$$



$$I_x = \frac{\frac{m}{2}(2b)^2}{3} + \frac{m}{2} b^2 = \frac{7}{6} m b^2$$

$$I_y = \frac{\frac{m}{2}(2b)^2}{12} = \frac{1}{6} m b^2$$

$$\int M_o dt = H_{o2} \Rightarrow \begin{cases} \omega_x = -\frac{6}{7} \frac{F_o \Delta t}{mb} \\ \omega_y = -6 \frac{F_o \Delta t}{mb} \\ \omega_z = 0 \end{cases}$$

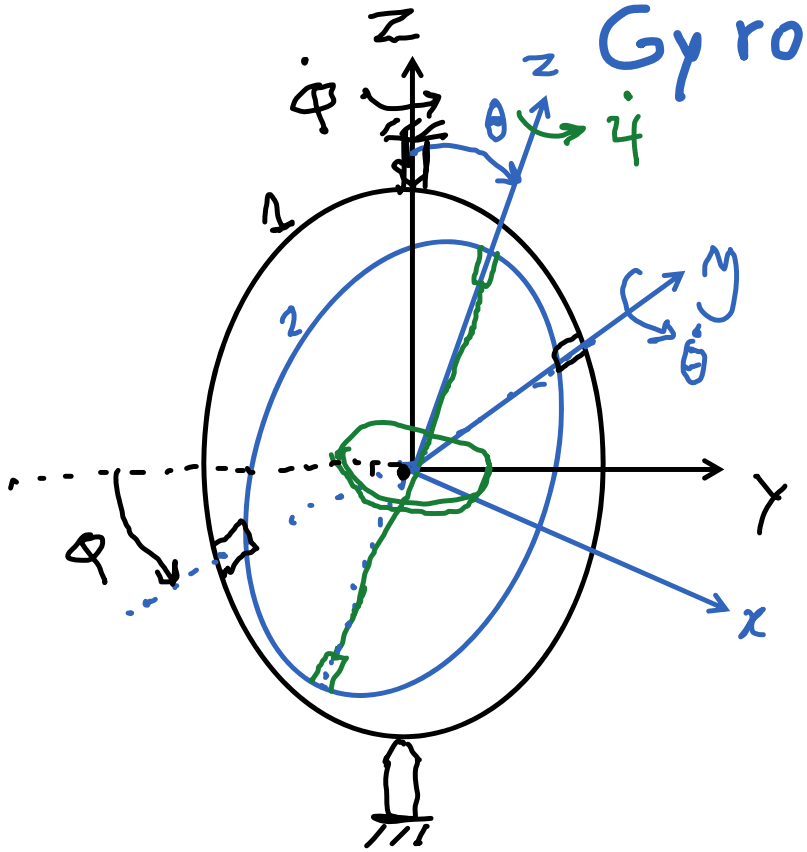


$I_K =$

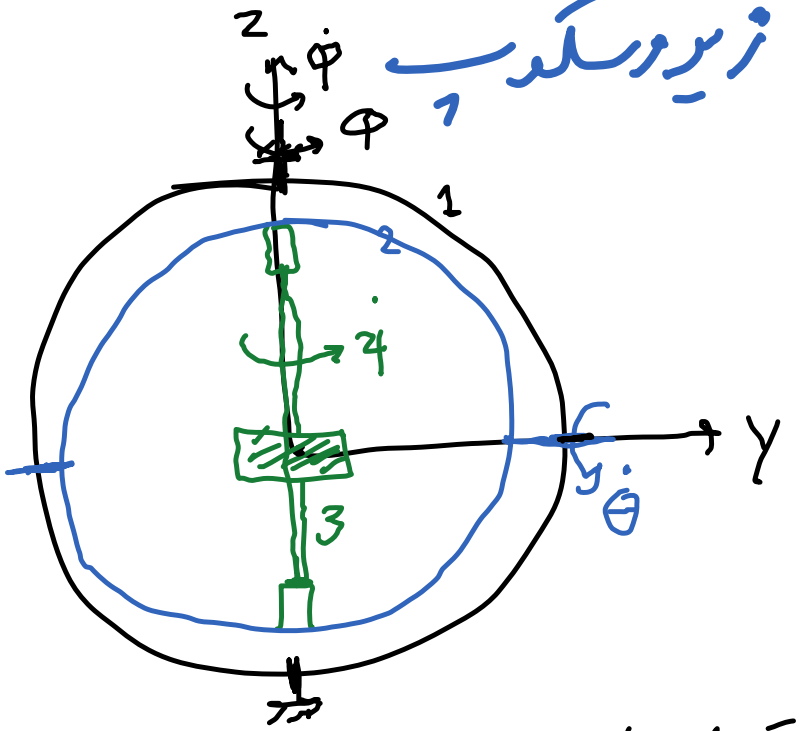
$I_y \simeq 0$

$$I_z = \frac{ml^2}{3}, \quad I_{\bar{x}} = \frac{ml^2}{12}$$

Gyroscope



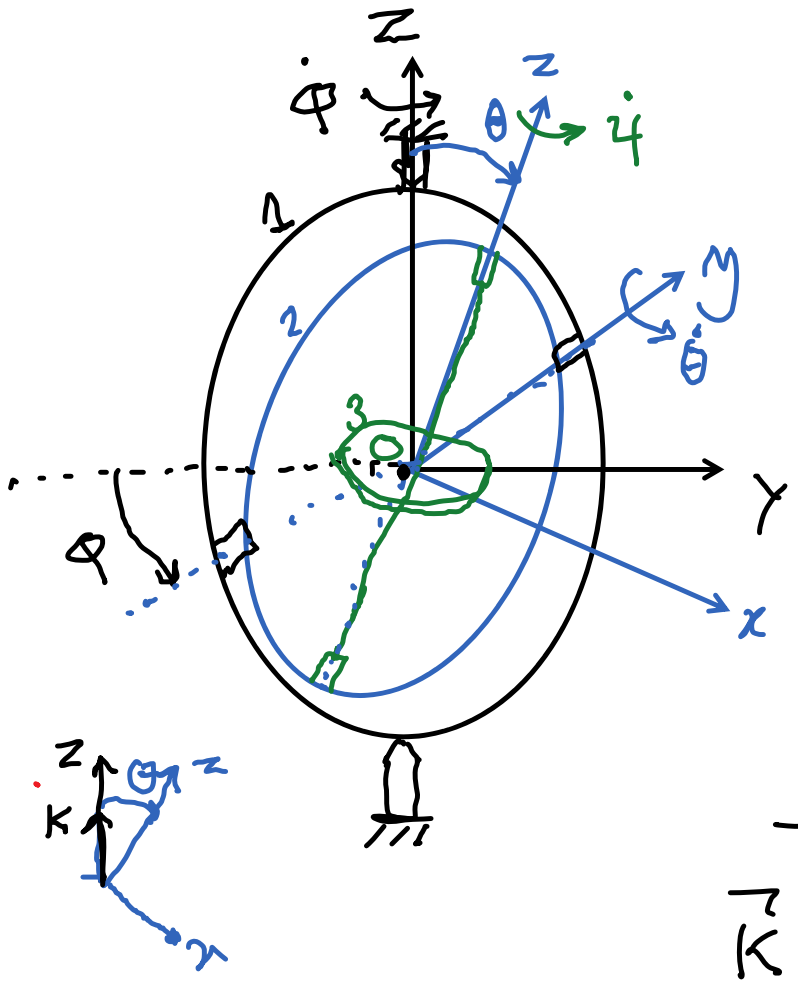
ژیروسکوپ



حلقه 1 حول محور Z با بردار $\dot{\varphi}$ دوران یافته

xyz دستگاه مرجع ثابت،

XYZ دستگاه متحرک است، وقتی $\varphi=0$ و $\theta=0$، xyz بر XYZ منطبق است



XYZ دستگاه مرجع

xyz دستگاه متصل به 2

فرض می‌شود جعبه سوم، (روتور 3 دارای جرم و ممان اینرسی است). از جرم و ممان اینرسی حلقه‌های 1 و 2 صرف نظر می‌شود.

سرعت زاویه‌ای روتور 3

$$\Omega = \dot{\varphi} K + \dot{\theta} j + \dot{\psi} k$$

$$\overrightarrow{K} = -\sin\theta i + \cos\theta k$$

$$M_o = \dot{H}_o$$

$$\dot{H}_o = I_t \dot{\Omega}_1 + I_t \dot{\Omega}_2 + I_a \dot{\Omega}_3 + \omega \times H_o$$

xyz سرعت زاویه‌ای

$$\omega = -\dot{\varphi}\sin\theta\, i + \dot{\theta} j + \dot{\varphi}\cos\theta\, k$$

$$\omega_{B/E} = \dot{\psi} k$$

اویلر اصلاح شده:

$$\Omega = \dot{\varphi} K + \dot{\theta} j + \dot{\psi} k$$

$$\overline{K} = -\sin\theta\, i + \cos\theta\, k$$

$$\Rightarrow \Omega = -\dot{\varphi}\sin\theta\, i + \dot{\theta} j + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) k$$

$$H_o = I_o \Omega = \begin{bmatrix} I_t & 0 & \\ & I_t & \\ 0 & & I_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix}$$

$$H_o = -I_t \dot{\varphi}\sin\theta\, i + I_t \dot{\theta} j + I_a (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) k$$

$$\begin{cases} M_x = -I_t(\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta) + I_a\dot{\theta}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) \\ M_y = I_t(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta) + I_a\dot{\varphi}\sin\theta(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) \\ M_z = I_a(\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta) \end{cases}$$