



دینامیک پیشرفته

دینامیک اجسام صلب

ادامه سیستم‌های چند درجه آزادی

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

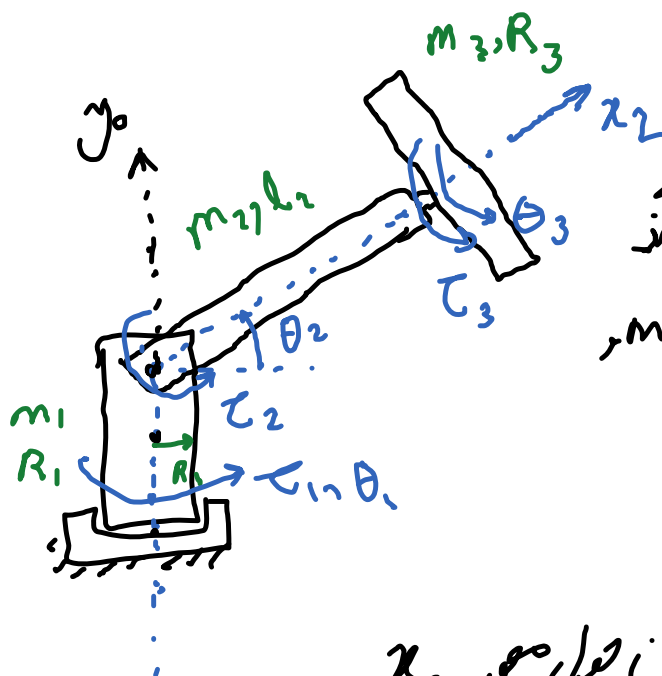
مثال: معادلات دینامیک برای ربات سه درجه آزادی

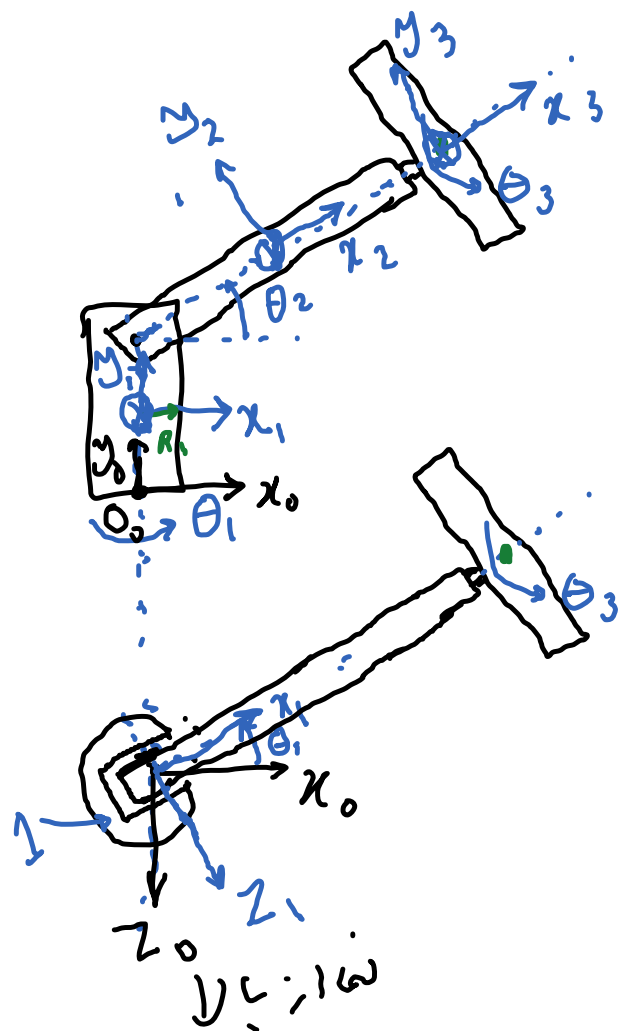
زیر استفرج کنید و سندها دگشت و رهای داخلی و مثال را بشناسید

لینک اول دوران حول محور z_0 ، θ_1 و τ_1 ، استوانه جرم m_1 و شعاع R_1

لینک دوم دوران θ_2 حول محور عمود بر صفحه، τ_2

لینک سوم (دیسک دوار) جرم m_3 و شعاع R_3 ، دوران حول محور x_2





- معرفی اسناد صحیح و ضوابط مناسب

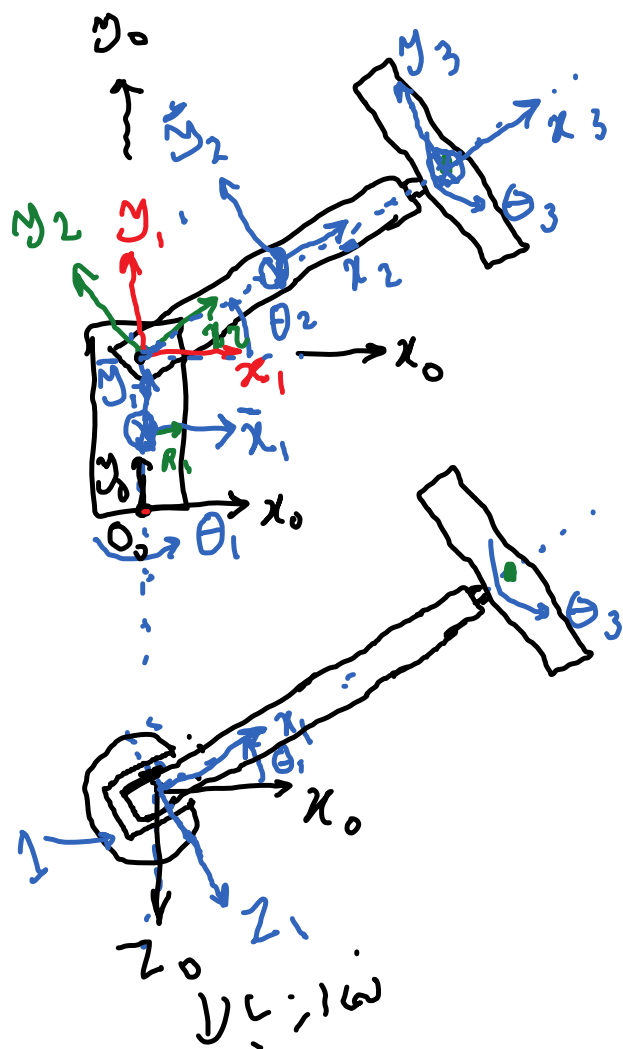
- بهیتر است BCS ها روی سوزنیم جدول
و منطبق به صورت های اصلی باشد

- دوران نسبی حول محور z_0 است

- می توان میدانیم 5 را مکان به 1 یا 2 در نظر گرفت

- فریم 5 به زمین منطبق است

- فریم 1 به فریم 1 منطبق است

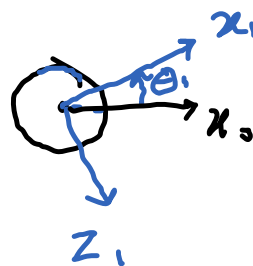
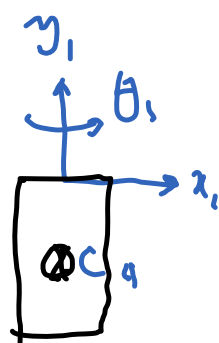
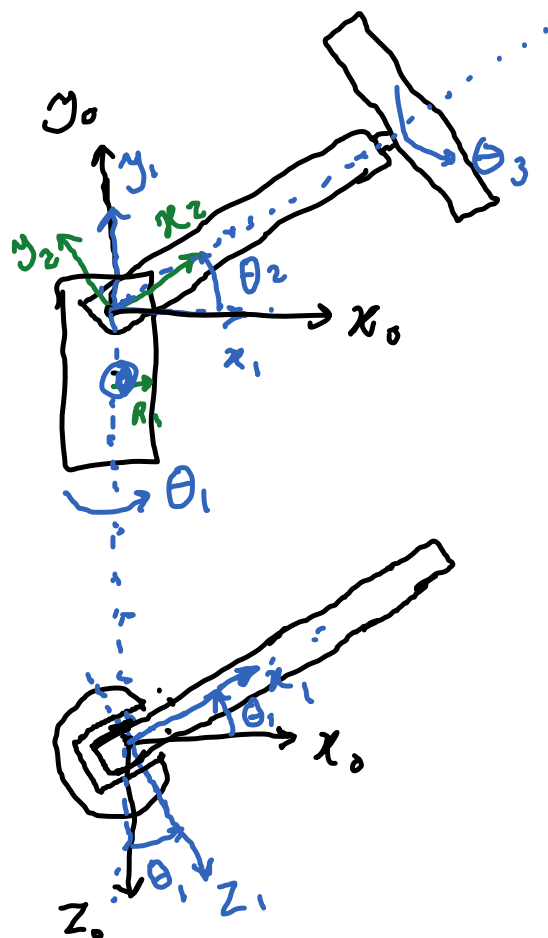


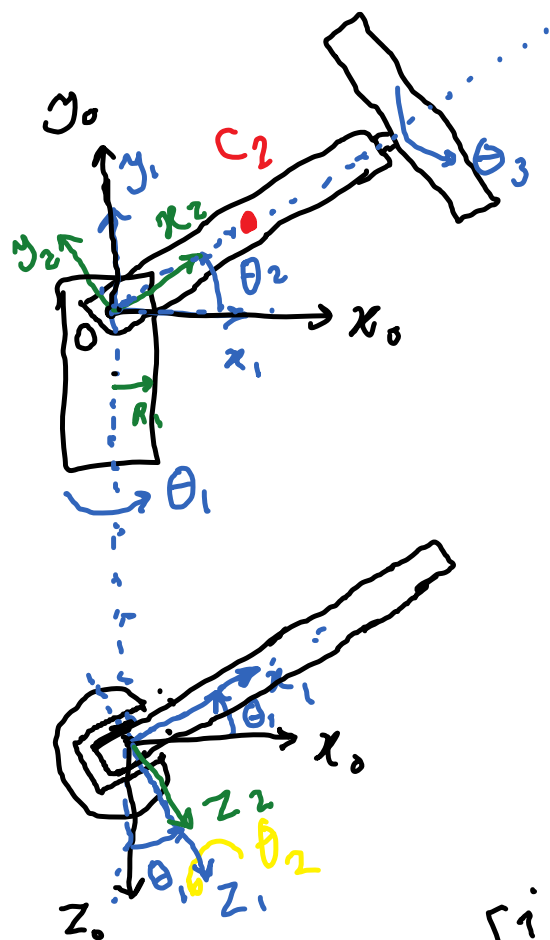
حول جسم 3 متغیر است و محور لغز آن x_2 است و دوران آن حول محور x_2 می‌باشد، می‌توان فریم 3 را تا قبل به هم متصل نکرد. یعنی جسم 3 نسبت به فریم 3 یک دورانی θ_3 داشته باشد (نسبت به فریم اولی اصطلاح شد)
 پس در این حالت فریم 3 و 2 یکی هستند و فریم 3 دورانی نسبت به فریم 2 ندارد.

سرعت صبح اول

$$v_{C_1} = 0$$

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 \hat{j}_0 = \dot{\theta}_1 \hat{j}_1$$





سرعت جمع 2

$$v_{C2} = v_0 + \dot{r} + \omega_2 \times r, \quad r = \frac{l_2}{2} i_2$$

$\dot{r} = 0$

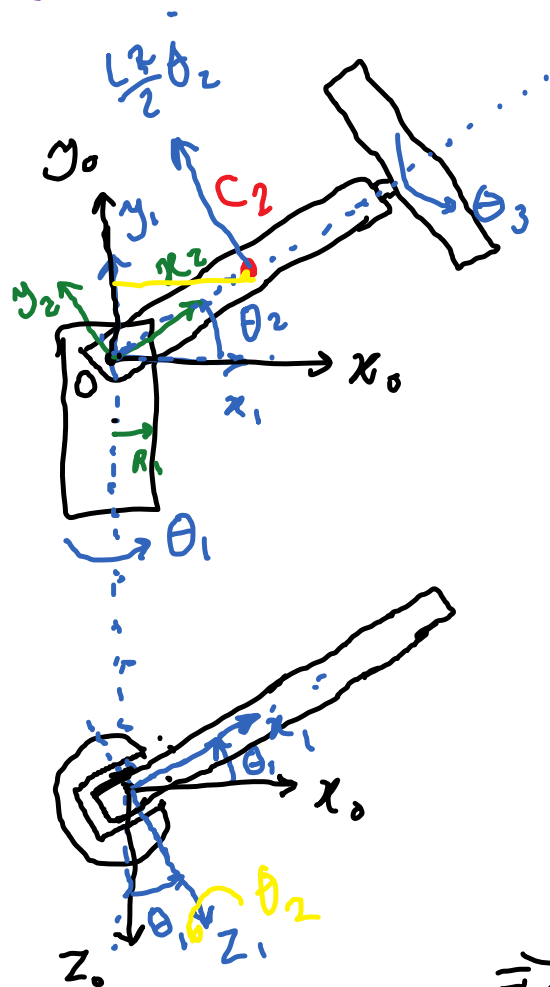
$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_{2/1}$$

$$\omega_2 = \dot{\theta}_1 j_1 + \dot{\theta}_2 k_1 = \dot{\theta}_1 j_1 + \dot{\theta}_2 k_2$$

$$j_1 = \cos \theta_2 j_2 + \sin \theta_2 i_2$$

$$R_2' = R_2(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = R_2' \begin{bmatrix} i_2 \\ j_2 \\ k_2 \end{bmatrix}$$



سرعت جمع 2

$${}^2v_{C2} = v_0 + \dot{x} + \omega \times r, \quad r = \frac{L_2}{2} i_2$$

$$\omega_2 = \dot{\theta}_1 j_1 + \dot{\theta}_2 k_1 = \dot{\theta}_1 j_1 + \dot{\theta}_2 k_2$$

$$j_1 = \cos \theta_2 j_2 + \sin \theta_2 i_2$$

$$\Rightarrow {}^2\omega_2 = \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 i_2 + \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 j_2 + \dot{\theta}_2 k_2 \quad (1)$$

$$\omega_2 \times r = -\frac{L_2}{2} \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 k_2 + \frac{L_2}{2} \dot{\theta}_2 j_2$$

$$\Rightarrow {}^2v_{C2} = -\frac{L_2}{2} \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 k_2 + \frac{L_2}{2} \dot{\theta}_2 j_2 \quad (2)$$



$$m_2 \frac{d}{dt} v_{c2} = m_2 \left[\dot{v}_{c2,rel} + \omega_2 \times v_{c2} \right]$$

$$H_{c2} = I_{c2} \omega_2, \quad I_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & m_2 \frac{l_2^2}{12} \\ m_2 \frac{l_2^2}{12} & m_2 \frac{l_2^2}{12} \end{bmatrix}$$

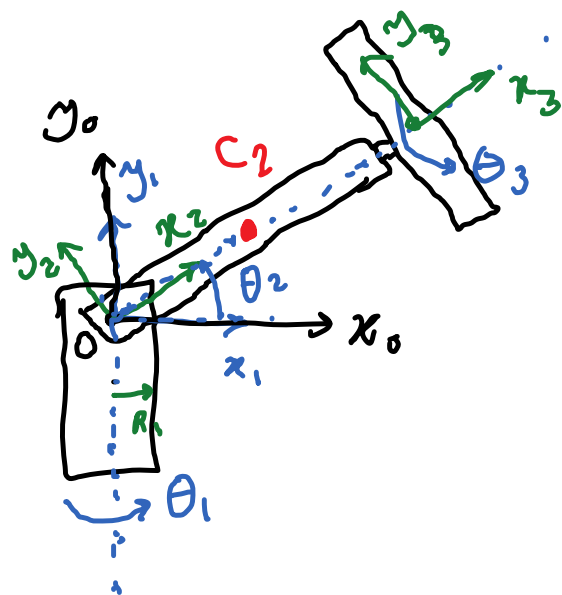
سیستم - غنیم 2 در مرکز میزنیم

$$\frac{d}{dt} H_{c2} = (\dot{H}_{c2})_{rel} + \omega_2 \times H_{c2}$$

$$\dot{v}_{c2,rel} = \left[-\frac{l_2}{2} \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \right] k_2 + \left[\frac{l_2}{2} \ddot{\theta}_2 \right] j_2$$

$$v_{c2} = -\frac{l_2}{2} \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 k_2 + \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 j_2$$

معادله سرعت جمع 3



$$\Omega_3 = \omega_2 + \omega_{3/2}$$

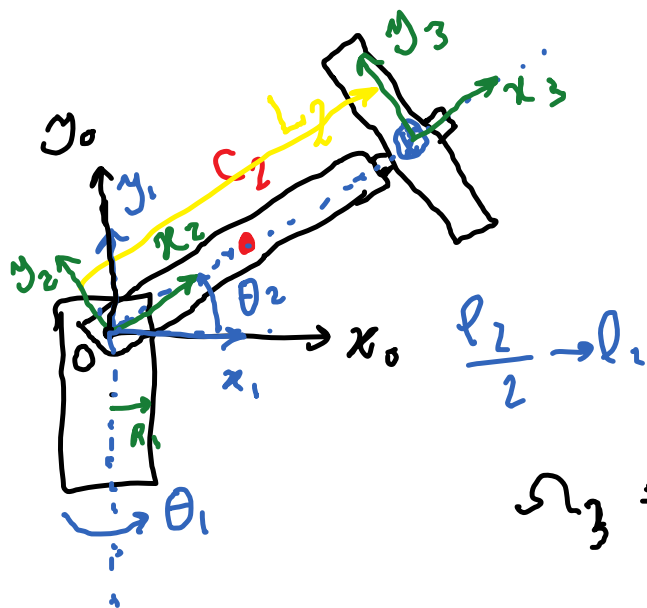
$$\omega_2 = \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \hat{i}_2 + \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \hat{j}_2 + \dot{\theta}_2 \hat{k}_2 \quad \text{از قبل}$$

$$\omega_{3/2} = \dot{\theta}_3 \hat{i}_2$$

$$\Rightarrow \Omega_3 = (\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_3) \hat{i}_2 + \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \hat{j}_2 + \dot{\theta}_2 \hat{k}_2$$

$${}^2\Omega_3 = {}^3\Omega_3$$

در اینجا نیز به تعریف فریم 3 برای جسم 3 نسبت و می توان از همان فریم 2 استفاده کرد.
چون جسم 3 دارای یک محور نفارن است و دوران آن حول محور نفارن می باشد.



$$v_{c1} = -\frac{l_1}{2} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 k_1 + \frac{l_1}{2} \dot{\theta}_1 j_1$$

$$v_{c2} = -l_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 k_2 + l_2 \dot{\theta}_2 j_2$$

$$\omega_2 = (\dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_2) i_2 + \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 j_2 + \dot{\theta}_2 k_2$$

سرعت فریم 2 و 3 $\leftarrow \omega_2$

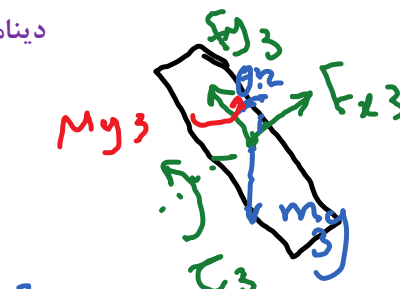
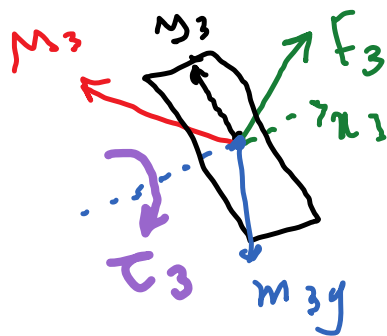
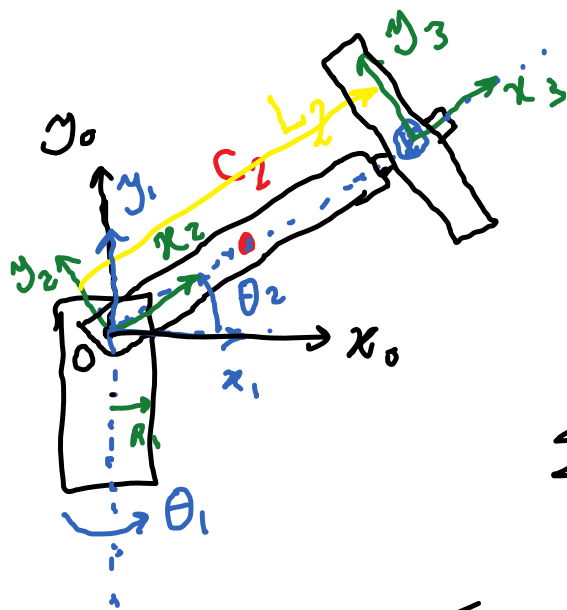
$$m_3 \frac{d}{dt} (v_{c3}) = m_3 \left[\dot{v}_{c3,rel} + \omega_2 \times v_{c3} \right]$$

$$\frac{d}{dt} H_{c3} = \dot{H}_{c3,rel} + \omega_2 \times H_{c3}, \quad H_{c3} = \bar{I}_{c3} \omega_3, \quad \bar{I}_{c3} = \begin{bmatrix} \frac{m_3 R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_3 R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3 R^2}{4} \end{bmatrix}$$



دینامیک آزارج 3

دینامیک پیشرفته، دینامیک اجسام صلب



$${}^3F_3 = F_{x3}i_3 + F_{y3}j_3 + F_{z3}k_3$$

$${}^3M_3 = M_{x3}i_3 + M_{y3}j_3 + M_{z3}k_3$$

$$\Sigma M_{c3} = \tau_3 i_3 + M_{y3} j_3 + M_{z3} k_3$$

$$\Sigma F = (F_{x3} - m_3 g \sin \theta_2) i_3 + (F_{y3} - m_3 g \cos \theta_2) j_3 + F_{z3} k_3$$

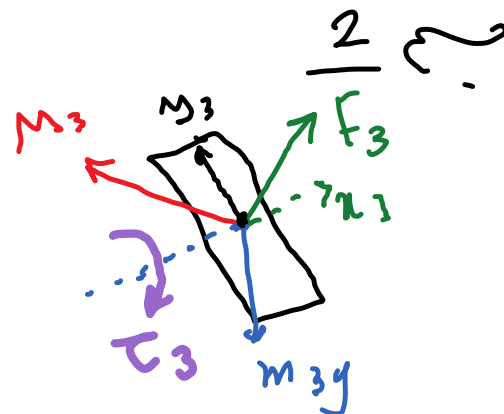
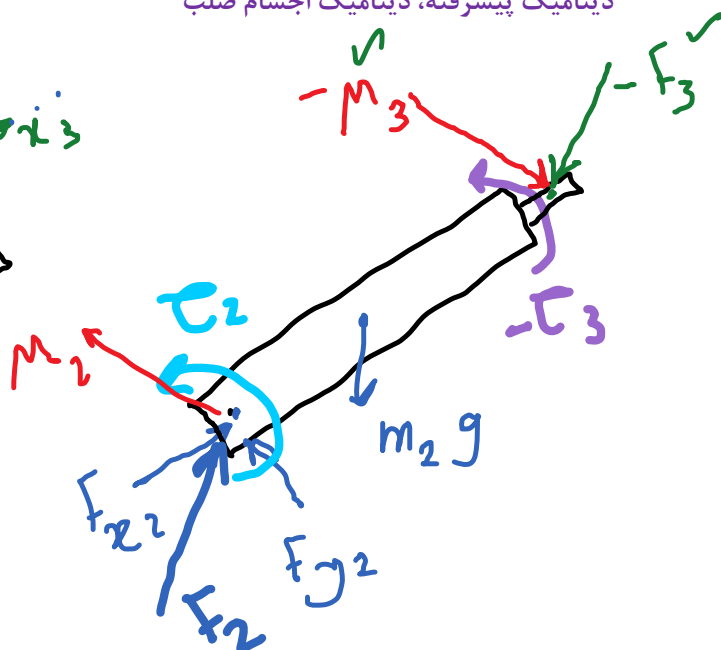
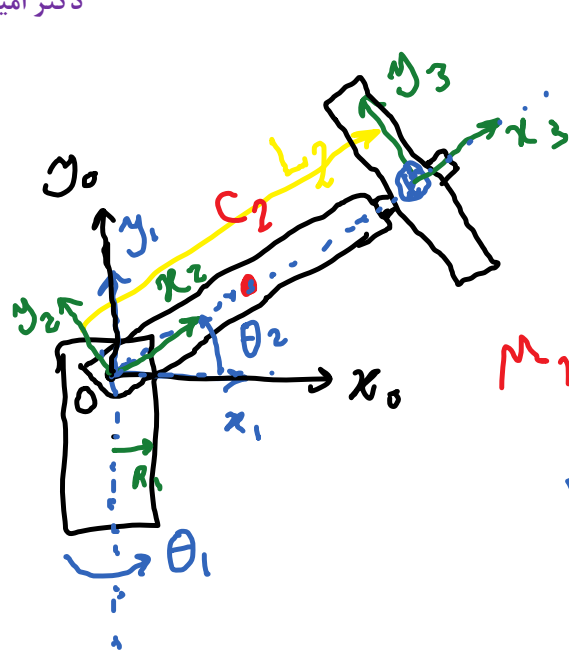
$$\Rightarrow \Sigma F = \frac{d}{dt}(m_3 v_c) \Rightarrow$$

$$F_{x3} = \checkmark, \quad F_{y3} = \checkmark, \quad F_{z3} = \checkmark$$

$$\Sigma M_c = \dot{H}_c \Rightarrow$$

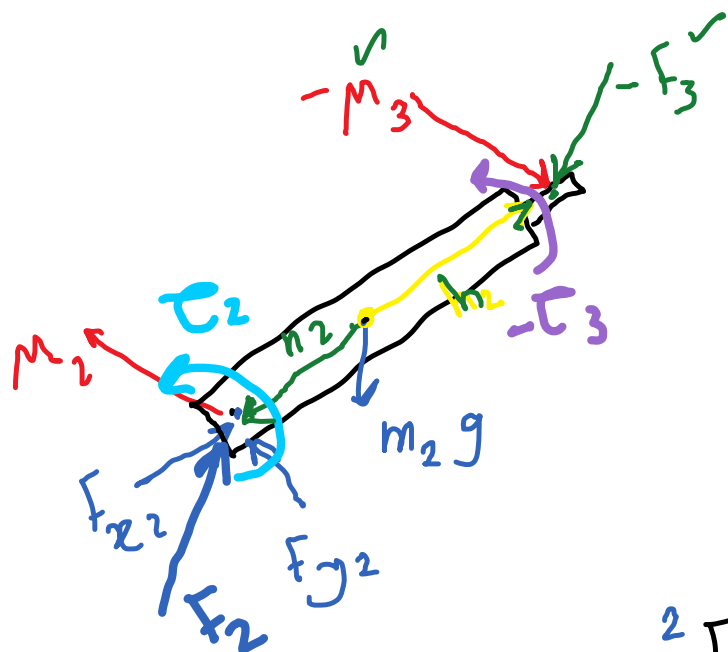
$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_3 = \dots \\ M_{y3} = \dots \\ M_{z3} = \dots \end{array} \right.$$

با حاشیه‌نویسی صحت‌نویس‌های داخلی، مدار به دست می‌آید.
اول سربرد را به یک فرم کلی می‌نویسند



$$\sum F = (F_{x2} - F_{x3} - m_2 g \sin \theta_2) i_2 + (F_{y2} - F_{y3} - m_2 g \cos \theta_2) j_2 + (F_{z2} - F_{z3}) k_2$$

$$\sum F = m_2 \frac{d}{dt} (v_{c2}) \Rightarrow \begin{matrix} {}^2F_{x2} = \checkmark \\ {}^2F_{y2} = \checkmark \\ {}^2F_{z2} = \checkmark \end{matrix} \Rightarrow {}^2F_2 = \checkmark$$



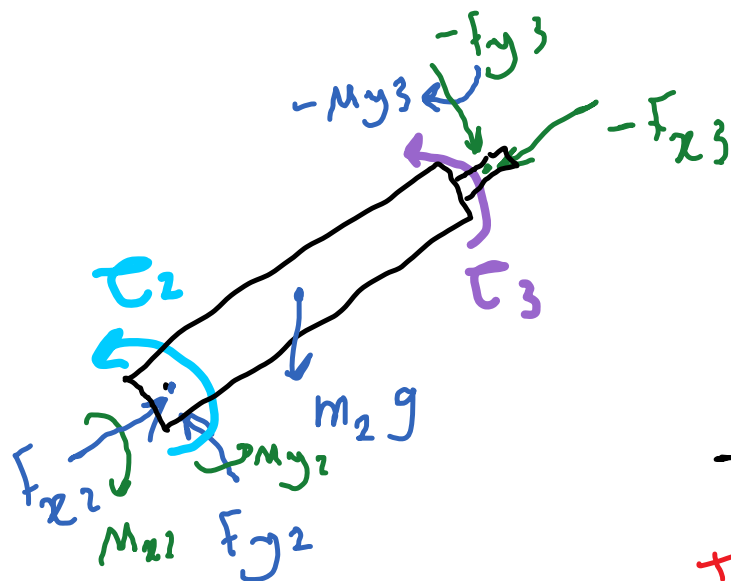
$${}^3M_3 = {}^2M_3$$

$$\sum M_{c_2} = \tau_2 k_2 - \tau_3 i_2 - \overline{{}^2M_3} \\ + \overline{{}^2M_2} + n_2 \times F_2 - h_2 \times F_3$$

$${}^2F_2 = \begin{bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \end{bmatrix} \quad F_3 = \begin{bmatrix} F_{a3} \\ F_{y3} \\ F_{s2} \end{bmatrix}$$

$$h_2 = \frac{l_2}{2} i_2', \quad n_2 = -\frac{l_2}{2} i_2'$$

$${}^2M_2 = \checkmark$$



$$\Sigma M_{C_1} = \tau_2 k_2 + \dot{M}_{z_2} i_2 + \dot{M}_{y_2} j_2 - \tau_3 i_2$$

$$-F_{y_2} \frac{l_2}{2} k_2 - F_{y_3} \frac{l_1}{2} k_2 - M_{y_3} j_2 - M_{z_3} k_2$$

$$+ F_{z_2} \frac{l_2}{2} j_2 + F_{z_3} \frac{l_2}{2} j_2$$

$$\Sigma M_{C_2} = \frac{d}{dt} (H_{C_2})$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} M_{x_1} = \checkmark \\ M_{y_2} = \checkmark \\ \tau_2 = \dots \checkmark \end{cases}$$

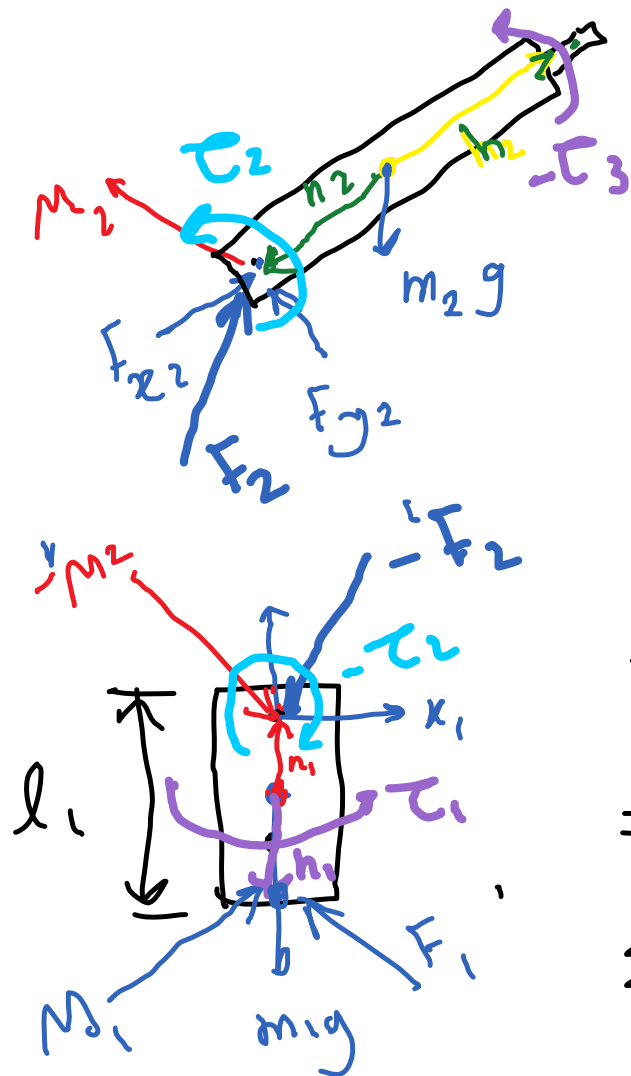
$$M_{z_2} = 0$$

$$M_2$$



رجع اول

$$R_2' = R_2(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$${}^1F_2 = R_2'^2 F_2, \quad {}^1M_2 = R_2'^2 M_2$$

$$n_1 = \frac{l_1}{2} j_1$$

$$h_1 = -\frac{l_1}{2} j_1$$

$$\Rightarrow {}^1F_2 = {}^1F_{x2} i_1 + {}^1F_{y2} j_1 + {}^1F_{z2} k_1$$

$$\Rightarrow \Sigma F = -{}^1F_2 + {}^1F_1 - m_1 g j_1$$

$$\Sigma M_{c_1} = \tau_1 j_1 - \tau_2 k_1 - {}^1M_2 - n_1 \times {}^1F_2 + h_1 \times {}^1F_1 + {}^1M_1$$

$$\sum F = m_i \frac{dv_{c_i}}{dt} \Rightarrow F_i = \checkmark$$

$$\sum m_{c_i} = \frac{d}{dt} \vec{H}_{c_i} \Rightarrow \begin{cases} \tau_i = \checkmark \\ m_i = \checkmark \end{cases}$$

$$M_i = M_x \dot{i}_i + \cancel{M_y \dot{j}_i} + M_z \dot{k}_i$$



مسئله فصل ۴-۳

4.2

4.3

4.4

4.5

4.8

4.9



دینامیک پیشرفته، دینامیک اجسام صلب

دکتر امین نیکوبین