



دینامیک پیشرفته

دینامیک لاگرانژین

اصل کار مجازی، اصل همیلتون، معادلات لاگرانژ

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir



Principle of virtual work

اصل کار مجازی

- اصل کار مجازی اولین بار توسط برنولی برای سیستم در تعادل استاتیکی بیان شد.

- این اصل با استفاده از اصل دالامبر (d'Alembert) - دینامیک یعاداد می شود.

- تغییر مکان مجازی $virtual\ dis.$ یک تغییر کوچک در مختصاتها است، رابعیود

بدون تغییر در زمان می باشد. $infinitesimal\ change\ in\ coordinates$

- یک نیروی سیم در یک زمان مشخص + در نقطه گرفته می شود. با فرض کردن زمان، تغییرات کوچک در مختصاتها اتفاق می افتد، بدون نقص میود.



آلتر $x_1, \dots, x_n$ بزرگی تعیین کننده سیستم انتخاب شده است

همچنین R عددی است که $P, F, E, \dots$ زیرداشته باشند

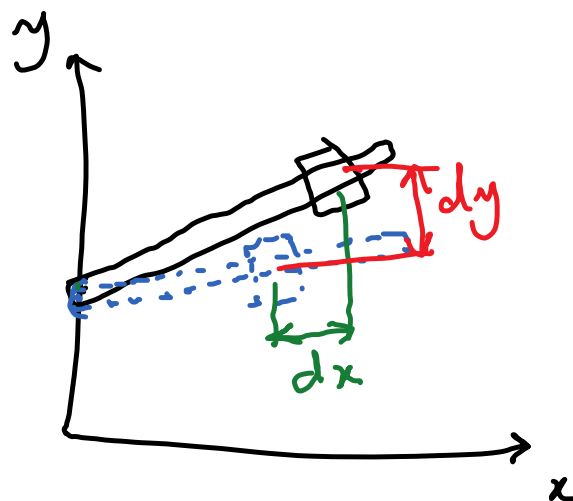
$$a_{j0} dt + \sum_{k=1}^n a_{jk} dx_k = 0, \quad j=1, \dots, R \quad (I)$$

تفسیر میل واقعی dx_k (true displacement) باید در معادله (I) صدق کند.

تفسیر میل مجازی δx_k در رابطه زیر باید صدق کند، $(\delta t = 0)$

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \delta x_k = 0$$

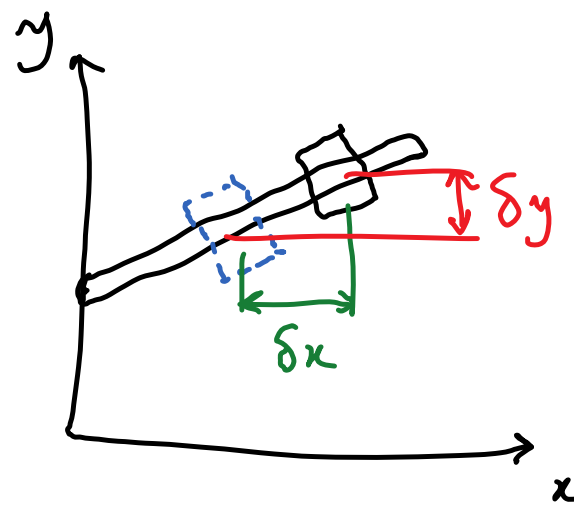
وقتی سیستم catastrophic باشد $(a_{j0} = 0)$ $\delta x_k = dx_k$



true dis.



$$\left(\frac{\omega_0 x}{\cos^2 \omega_0 t} \right) dt + (t y \omega_0 t) dx - dy = 0$$



virtual dis

$$t y (\omega, t) \delta x - \delta y = 0$$

اصل کار-جاری در استاتیستیک

فرض کنید موقعیت ذره را با بردار r نشان دهید. می‌توانیم F را به
اگر ذره یک جایابی δr داشته باشد. چون ذره در حالت تعادل
استاتیستیک است

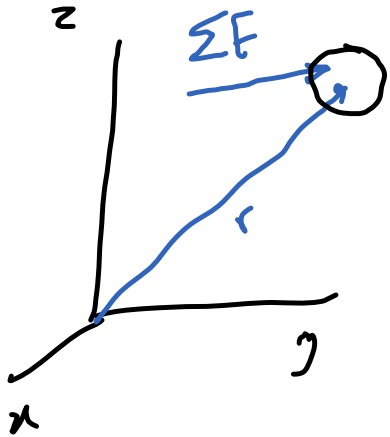
$$\delta \bar{W} = F \cdot \delta r = 0$$

$$F = F^* + R$$

R : نیروهای قید

F^* : نیروهای اعمالی

$$\delta \bar{W} = F^* \cdot \delta r + R \cdot \delta r = 0$$





از آنجاکه جابجایی مجازی δr ، فیدر را نقض نمی‌کند،
 $R. \delta r = 0$

$$\Rightarrow \delta \bar{w} = F^* \cdot \delta r = 0$$

$$\Rightarrow \delta \bar{w} = F_x^* \delta x + F_y^* \delta y + F_z^* \delta z = 0$$

δx ، δy ، δz را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد.

$$\delta x = \delta y = 0 \Rightarrow F_z^* = 0 \text{، و بطور مشابه } F_x^* = 0 \text{ و } F_y^* = 0$$

برای سیستم‌های N (ذره)

$$\delta \bar{w} = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i = 0$$

$$\delta \bar{w} = \sum F_i^* \cdot \delta r_i = 0$$



اصل کار مجازی در دینامیک



نمونه ذره از یک سیستم N ذره‌ای را در نظر بگیرید. با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم

$$F_i = \frac{d}{dt}(m_i \dot{r}_i) \Rightarrow F_i^* + R_i - \frac{d}{dt}(m_i \dot{r}_i) = 0$$

کار مجازی بر اثر جابجایی δr

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \left[F_i^* - \frac{d}{dt}(m_i \dot{r}_i) \right] \cdot \delta r_i = 0$$

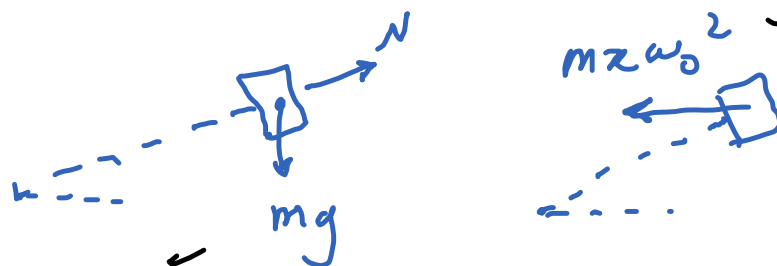
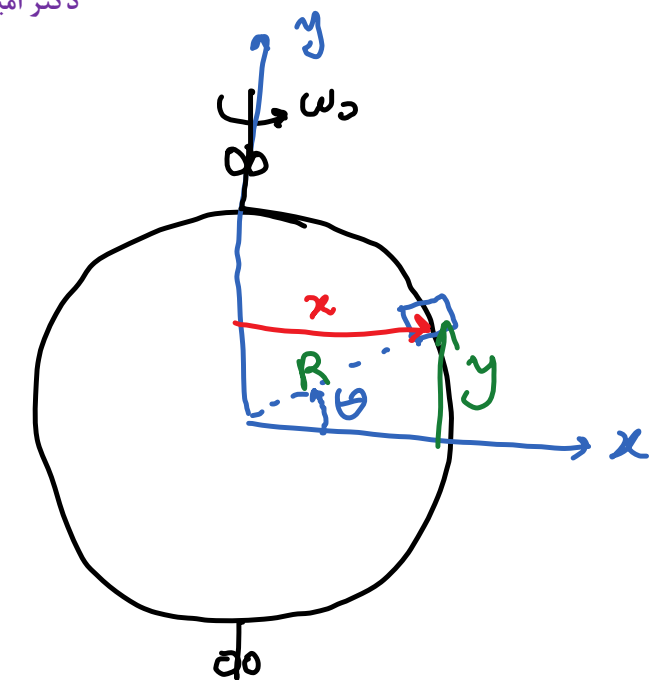
برای یک سیستم scleronomous (هولونومیک بدون زنجیر) $\delta r_i = dr_i$ اصل کار مجازی

اصل کار و انرژی مکانیکی می‌باشد:

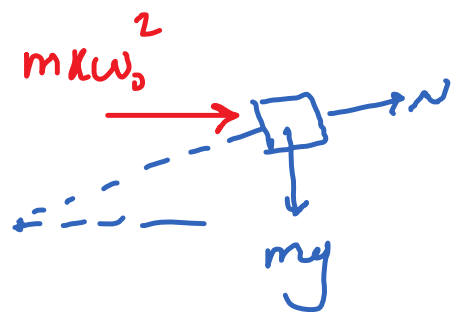
$$\left(\begin{aligned} dW &= F \cdot dr = m \dot{r} \cdot dr = m \dot{r} \cdot d\dot{r} \\ &= \frac{1}{2} m d(\dot{r} \cdot \dot{r}) = dT, \quad T = \frac{1}{2} m \dot{r} \cdot \dot{r} \rightarrow \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr = T_2 - T_1 \end{aligned} \right)$$



EX. 5.6 حلقه با سرعت ثابت ω می‌چرخد.
موقعیت θ را که لغزنده در حالت تعادل است را
به دست آورید (از اصل کمترین عمل می‌کنیم)



جایابی معباری $\delta \kappa$ برای لغزنده در معباری می‌گیریم
تا معباری حاصل از این جایابی را معبار می‌کنیم



$$\delta \bar{w} = m\kappa\omega^2 \delta \kappa - mg \delta y = 0$$



$$\delta \bar{w} = m R \omega_0^2 \delta x - m g \delta y = 0$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{محدود کننده}$$

$$x = R \cos \theta \Rightarrow \delta x = -R \sin \theta \delta \theta$$

$$y = R \sin \theta \Rightarrow \delta y = R \cos \theta \delta \theta$$

$$\Rightarrow \delta \bar{w} = (-m R \omega_0^2 \cos \theta \sin \theta - m g R \cos \theta) \delta \theta = 0$$

$$\cos \theta (m R \omega_0^2 \sin \theta + m g R) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = 0 \\ \sin \theta = \frac{-g}{R \omega_0^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \theta = \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$\rightarrow \theta = -\sin^{-1} \frac{g}{R \omega_0^2} + 2n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

δx و δy مستقل نیستند.

$$g < R \omega_0^2$$



اصل همیلتون

Hamilton's principle

- اصل همیلتون یکی از بهترین اصل تغییرات شناخته شده در مکانیک است.

- این یک اصل انتگرالی است و یکدنبندی بسط را در بازه زمانی (t_1, t_2) در نظر می‌گیرد.

یک سیستم ذرات شامل N ذره را در نظر بگیرید. با استفاده از اصل دالامبر و تار مجازی داریم:

$$\sum_{i=1}^N \left[\underbrace{F_i}_{(2)} - \underbrace{\frac{d}{dt}(m_i \dot{r}_i)}_{(1)} \right] \cdot \delta r_i = 0 \quad (a)$$



داریم

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \dot{r}_i \cdot \delta r_i) = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \dot{r}_i) \cdot \delta r_i + \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \cdot \delta \dot{r}_i$$

($\frac{d}{dt} \delta r_i = \delta \dot{r}_i$)

①

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \dot{r}_i) \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \dot{r}_i \cdot \delta r_i) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \cdot \delta \dot{r}_i$$

از تعریف انرژی جنبشی داریم

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i \xrightarrow[\partial T]{\text{Variation}} \delta T = \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \cdot \delta \dot{r}_i$$

② برای مقایسه

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \dot{r}_i) \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \dot{r}_i \cdot \delta r_i) - \delta T$$

از معادله a



از طریق ^{مجازی} انتگرال‌ها توسط نبردهای احتمالی می‌شود

$$\delta W^* = \sum_{i=1}^n F_i^* \cdot \delta r_i \quad (2)$$

①، ②
(a) $\Rightarrow$

$$\delta W^* + \delta T = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \cdot \dot{r}_i \cdot \delta r_i)$$

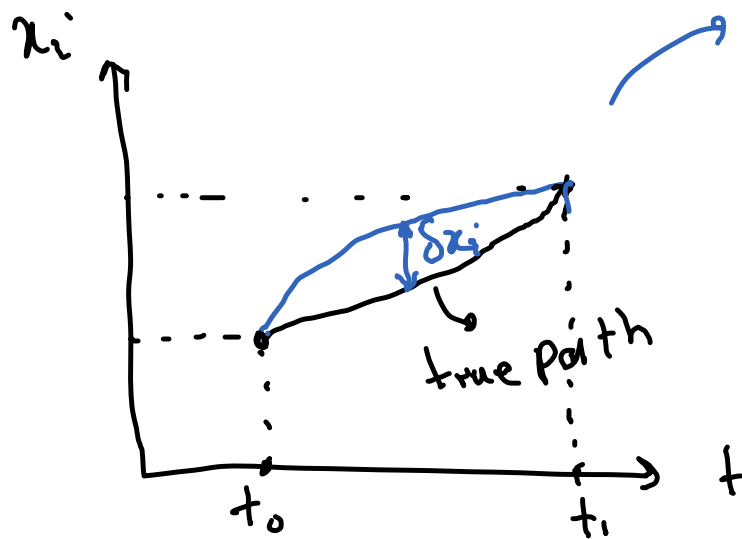
$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta W^* + \delta T) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (m_i \cdot \dot{r}_i \cdot \delta r_i) dt$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} (\delta W^* + \delta T) = \left[m_i \cdot \dot{r}_i \cdot \delta r_i \right]_{t_0}^{t_1}$$



$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta W^* + \delta T) dt = \left[m_i \dot{r}_i \cdot \delta r_i \right]_{t_0}^{t_1} = m_i \dot{r}_i \cdot [\delta r_i(t_1) - \delta r_i(t_0)] = 0$$

$$\delta r_i = \delta x_i e_1 + \delta y_i e_2 + \delta z_i e_3$$



$$\delta r_i(t_0) = \delta r_i(t_1) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} (\delta W^* + \delta T) dt = 0$$



این رابطه بیان می‌کند که میدان واقعی دنبال شد توسط سیستم مکانیکی برای رفتن از $r(t_0)$ به $r(t_1)$ چگونه است که انتقال زمانی صحیح تغییرات انرژی جنبشی مکانیکی و کارهای W به سومی رسد، وقتی تحت تغییر مکان مجازی از میدان واقعی مکرر می‌گیرد.

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta W + \delta T) dt = 0 \quad \text{اصل هیلبرت دوم لایب}$$



دفعتی کلیه نیروهای خارجی پایداری باشد $\delta W = -\delta U$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} (-\delta U + \delta T) dt = 0$$

بالتبع $L = T - U$ لاگرانژین

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0$$

اگر سیستم هولوномیک باشد

این رابطه میان می‌لند که مسیر واقعی دنبال کند، توسط

سیستم هولوномیک پایداری از $r(t_0)$ تا $r(t_1)$ ، گویاست که انتگرال زمانی $\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt$ اکسترمم می‌باشد



معادلات لاگرانژ Lagrange Eq. of Motion

I- با استفاده از اصل دالامبر و کار مجازی
II- با استفاده از اصل همبستگی

I- استخراج معادلات لاگرانژ با استفاده از اصل دالامبر و کار مجازی برای سیستم هولونومیک

$$\sum_{i=1}^N [F_i^* - \frac{d}{dt}(m_i \dot{r}_i)] \cdot \delta r_i = 0 \quad (a)$$

برای سیستم هولونومیک تعداد مختصاتی که تمام درجات آزادی را در نظر می‌گیرد
n = N



با انتخاب $q_1, q_2, \dots, q_n$ مختصات کلی تعمیم یافته داریم

مردصیت هر ذره را می‌توان به این شکل نوشت:

$$r_i = r_i(q_1, \dots, q_n, t)$$

$$\Rightarrow \dot{r}_i = \frac{\partial r_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial r_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial r_i}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \dot{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t}$$

با تغییر مختصات زمان برای تعمیم‌یافته مجازی داریم

$$\delta r_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (b)$$



نمایش برای نظم اول معادله (a) داریم

$$\sum_{i=1}^N F_i^* \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n F_i^* \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \quad (c)$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N F_i^* \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$$

که در آن

Q_k نیروی تعمیم یافته درجه کمالین مختلف تعمیم یافته.

generalized force

برای تست درم معادله (a) داریم

(b)

$$-\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i = -\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$\Rightarrow -\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) - m_i \dot{r}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \right\}$$

از طرفی داریم

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$$

$$-\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} (m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_k}) - m_i \dot{r}_i \left(\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_k} \right) \right\}$$

$$-\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot \delta r_i = -\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n m_i \ddot{r}_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$= -\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} (m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_k}) - m_i \dot{r}_i \left(\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_k} \right) \right\} \delta q_k$$

$$= -\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i \right) \right\} \delta q_k$$



$$= - \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) \right\} \delta q_k$$

$$= - \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right\} \delta q_k$$

(d)

با استفاده از c, d, و a

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right] \delta q_k = 0$$

برای سیستم‌های عمومی $q_1, q_2, \dots, q_n$ مستقل هستند.



می‌توان δq_1 را به صورت
در برداخته بزرگ
 $\delta q_1 \neq 0, \quad \delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_n = 0$

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right] \delta q_k = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} - Q_1 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} - Q_1 = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} - Q_2 = 0 \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_n} - Q_n = 0 \end{cases}$$

مطابق با: $\delta q_2 \neq 0$, $\delta q_1 = 0$

که متغیر n صافه دخیال
برای سیم n در هر آگاهی می شود.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

معادلات لاگرانژ

$$Q_k = \sum_{i=1}^N F_i^* \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$$

اسم جامع معادلات لاگرانژ: اصل کمترین

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta W) dt = 0$$

نیروی اعمال شده

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$$

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

$$\Rightarrow \delta T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$$



$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \right) \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt = 0$$

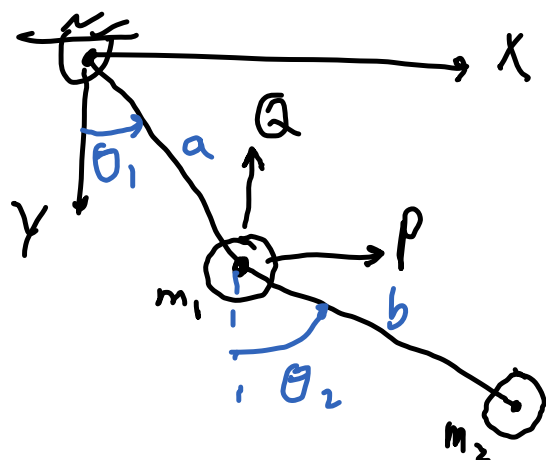
استرال جزیره

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i \right] \delta q_i dt = 0$$

$$\boxed{-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i = 0}$$

q_i مستقل هستند



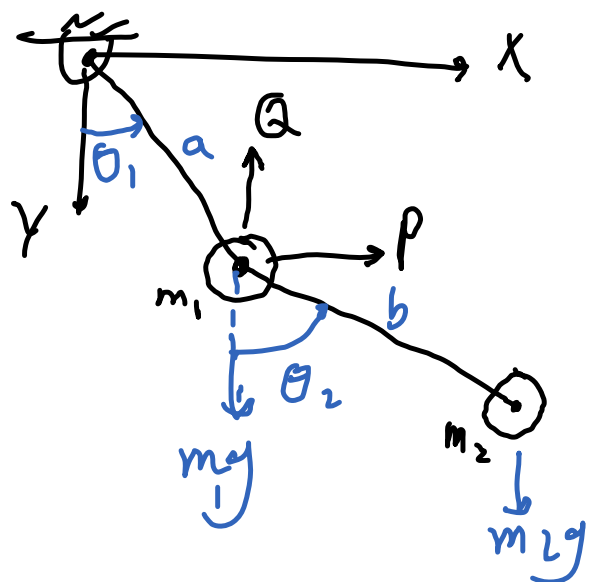
Ex. 5.7، معادلات دینامیکی را برای سیستم
دور درجه آزادی زیر استخراج کنید

$$\begin{cases} r_1 = a \sin \theta_1 i + a \cos \theta_1 j \\ r_2 = (a \sin \theta_1 + b \sin \theta_2) i + (a \cos \theta_1 + b \cos \theta_2) j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{r}_1 = a \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 i - a \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 j \\ \dot{r}_2 = (a \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + b \dot{\theta}_2 \cos \theta_2) i + (-a \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - b \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) j \end{cases}$$



$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1 \cdot \dot{r}_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2 \cdot \dot{r}_2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left[(a \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (a \dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 \left[(a \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + b \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (-a \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - b \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 \right] \end{aligned}$$



$$Q_i = \sum_{k=1}^N F_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_i}$$

$N=2$ تعداد درجه ها

$$i=1 \Rightarrow F_1 \cdot \frac{\partial r_1}{\partial q_1} + F_2 \cdot \frac{\partial r_2}{\partial q_1} = Q_1$$

$$i=2 \rightarrow Q_2 = F_1 \frac{\partial r_1}{\partial q_2} + F_2 \frac{\partial r_2}{\partial q_2}$$

نیروی خارجی
و نه برهم آ

$$F_1 = P i + (m_1 g - Q) j$$

$$F_2 = m_2 g j$$



$$Q_1 = F_1 \cdot \frac{\partial r_1}{\partial q_1} + F_2 \cdot \frac{\partial r_2}{\partial q_1}$$

$$F_1 = P i + (m_1 g - Q) j$$

$$F_2 = m_2 g j$$

$$\begin{cases} r_1 = a \sin \theta_1 i + a \cos \theta_1 j \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_2 = (a \sin \theta_1 + b \sin \theta_2) i + (a \cos \theta_1 + b \cos \theta_2) j \end{cases}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial \theta_1} = a \cos \theta_1 i - a \sin \theta_1 j$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial \theta_1} = a \cos \theta_1 i - a \sin \theta_1 j$$

$$F_1 \cdot \frac{\partial r_1}{\partial q_1} = P a \cos \theta_1 - a(m_1 g - Q) \sin \theta_1$$

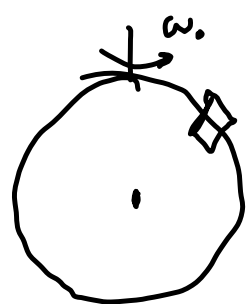
$$F_2 \cdot \frac{\partial r_2}{\partial q_1} = -a m_2 g \sin \theta_1$$

$$Q_1 = P a \cos \theta_1 - a(m_1 g - Q) \sin \theta_1 - a m_2 g \sin \theta_1$$

$$Q_2 = -m_2 g b \sin \theta_2$$

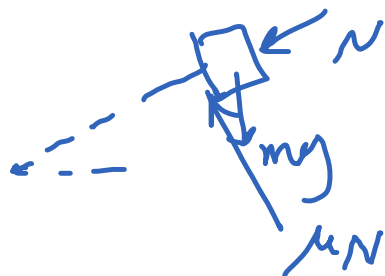
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} = Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} = Q_2 \end{cases}$$

تمرین اندام سود 136



معدلات 5.68, 5.69 برسد
محل 5.8 ضمیمه مطالعه کنید
با صفحات - (لاگرانژ + سین اویلر)

$$Q_1 = \dots \mu N \dots$$



در نیروی سطح غده Q_1 ظاهر می شود

معمولاً به ازادش سوزن اولیه اسف از کس و μ را به آب آوریم.



دینامیک پیشرفته، دینامیک لاگرانژین

دکتر امین نیکوبین