کنترل مدرن

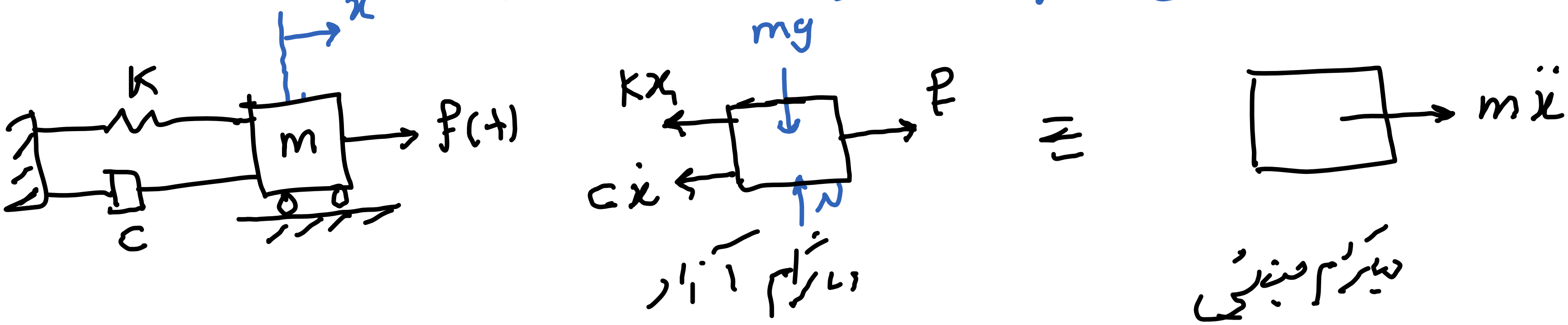
نمایش سیستمهای خطی

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

مثال ساده: سیستم جرم و فنر یک درجه آزادی



$$\sum F = ma$$

استخراج معادلات با استفاده از قانون دوم نیوتن

$$f - Kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx(t) = f(t)$$

در کنترل کلاسیک ← تابع تبدیل ← تبدیل لاپلاس

$$ms^2X(s) + CsX(s) + KX(s) = F(s)$$

$$ms^2X(s) + csX(s) + KX(s) = F(s)$$

$$\Rightarrow X(s)\left[ms^2 + cs + k\right] = F \Rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2+cs+K}$$

$$F(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{ms^2+cs+K}} \longrightarrow X(s) \quad , \quad u \longrightarrow \boxed{\text{system}} \longrightarrow y$$

$$\dot{x} = f(x, u)$$

فرم فضای حالت،

$$m\ddot{x} + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \Rightarrow \ddot{x} = \frac{1}{m}\left[f - c\dot{x} - kx\right]$$

$x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b$

با فرض دو متغیر جدید x_1 و x_2

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = f_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}\left[f - cx_2 - kx_1\right] = f_2 \end{cases}$$

$$y = x_1$$

در حالت کلی، فرم فضای حالت به صورت زیر است

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x,u) \end{cases}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

اگر سیستم خطی باشد می‌توان معادلات را به فرم خطی زیر نوشت

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{m}\left[f - c x_2 - K x_1\right] \end{cases}$$

$$y = x_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}^{B} f$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} f$$

در حالت کلی

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x,u) \end{cases}$$

state vector

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

بردار ورودی

خروجی

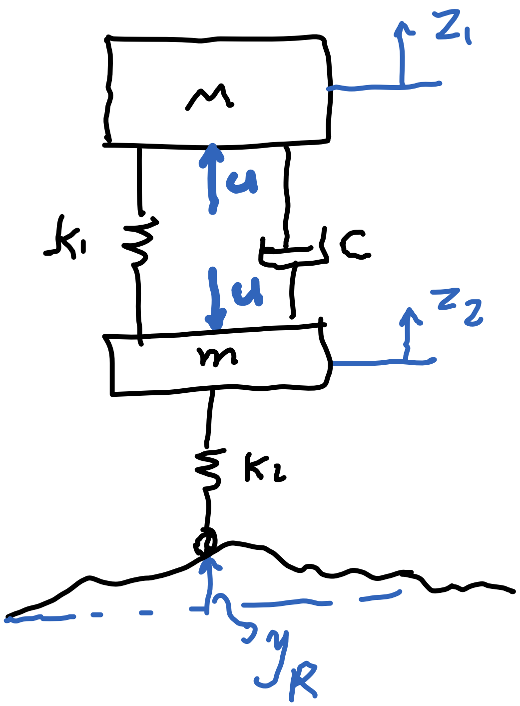
$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}$$

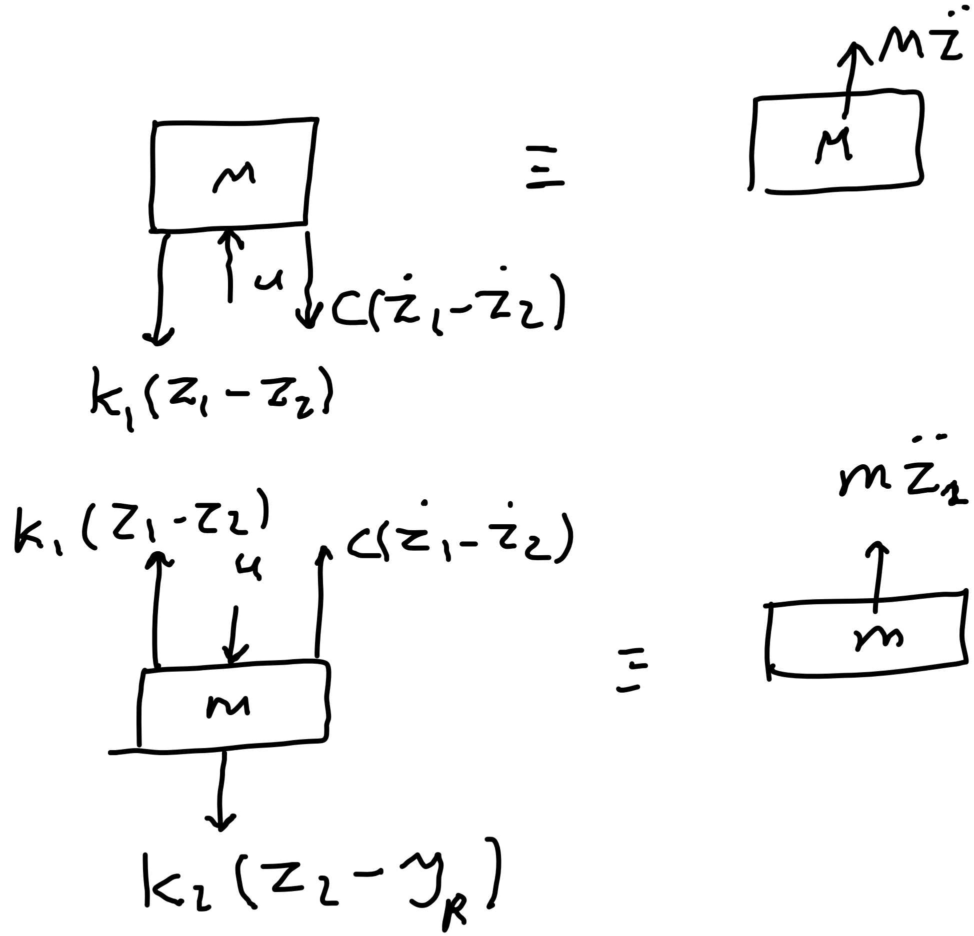
state variables ، x_i.

انتخاب متغیرهای حالت یکتا نیست،

متغیرهای حالت به این صورت هستند که با معلوم بودن مقدار اولیه آنها، $x(0)$ ،
همچنین ورودی $u(t)$ برای $0 < t < T$ معلوم باشد می توان رفتار
سیستم را در زمان $0 < t < T$ بطور کامل بدست آورد.
اگر $u = 0$ با دانستن $x(0)$ می توان $x(t)$ را برای $0 < t < \infty$
بدست آورد.
متغیرهای حالت در حقیقت شرایط اولیه لازم جهت حل یک معادله دیفرانسیل است.

مدل سیستم تعلیق:





$$\begin{cases} u - K_1(z_1 - z_2) - c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = m\ddot{z}_1 \\ -u + K_1(z_1 - z_2) + c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - K_2(z_2 - Y_R) = m\ddot{z}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = x_2 \\ \dot{z}_1 = x_3 \\ \dot{z}_2 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{M}\left[u - K_1(x_1 - x_2) - c(x_3 - x_4)\right] \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{m}\left[-u + K_1(x_1 - x_2) + c(x_3 - x_4) - K_2(x_2 - Y_R)\right] \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{M}\left[u - k_1(x_1 - x_2) - c(x_3 - x_4)\right] \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{m}\left[-u + k_1(x_1 - x_2) + c(x_3 - x_4) - k_2(x_2 - y_R)\right] \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{M} & \frac{k_1}{M} & -\frac{c}{M} & \frac{c}{M} \\ \frac{k_1}{m} & \frac{-k_1-k_2}{m} & \frac{c}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 \\ -\frac{1}{m} & \frac{k_2}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y_R \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m} & \frac{k_1}{m} & -\frac{c}{m} & \frac{c}{m} \\ \frac{k_1}{m} & \frac{-k_1-k_2}{m} & \frac{c}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \overset{B}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ -\frac{1}{m} & \frac{k_2}{m} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} u \\ Y_R \end{bmatrix}$$

$$y = \underset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} X + \underset{D}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} u \\ Y_R \end{bmatrix}$$

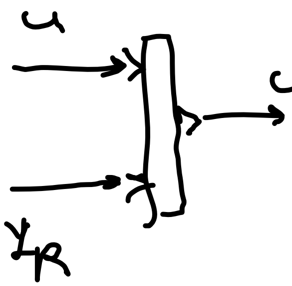
$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX + Du \end{cases}, \quad \begin{matrix} X \in R^{4\times 1}, & A \in R^{4\times 4}, & B \in R^{4\times 2} \\ u \in R^{2\times 1}, & Y \in R^{1\times 1}, & C \in R^{1\times 4}, & D \in R^{1\times 2} \end{matrix}$$

در حالت کلی اگر n متغیر حالت داشته باشیم و r تا ورودی داشته باشیم و m تا خروجی داشته باشیم

$x \in R^{n\times 1}$, $u \in R^{r\times 1}$, $y \in R^{m\times 1}$

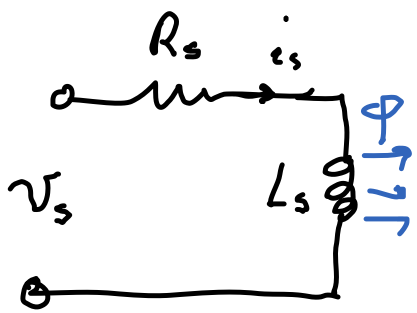
بردار حالت ، ورودی ، خروجی

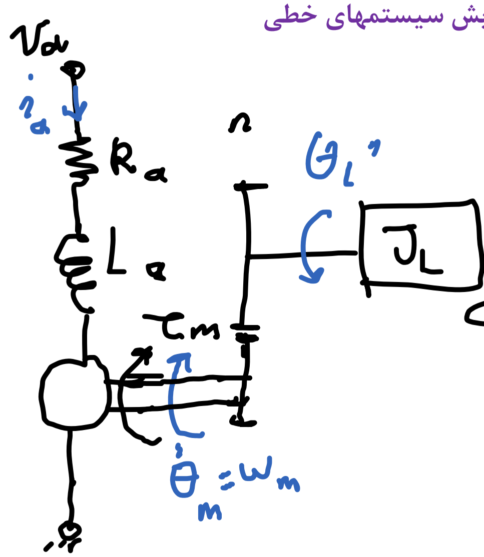
$A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times r}$, $C \in R^{m\times n}$, $D \in R^{m\times r}$



$$v = \begin{bmatrix} u \\ y_R \end{bmatrix}$$

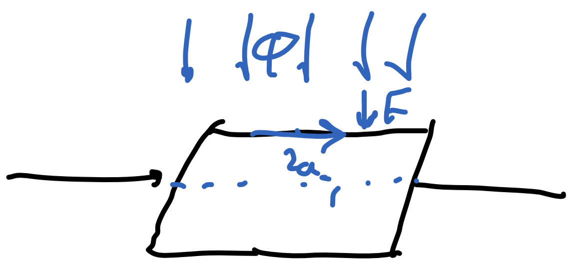
موتور DC مغناطیس دائم





$$\varphi = K_s i_s$$

$$\tau_m = K_a i_a \varphi = \underbrace{K_a K_s i_s}_{K_m} i_a = K_m i_a$$



$$v_s = cte, \quad i_s = cte, \quad \varphi = cte$$

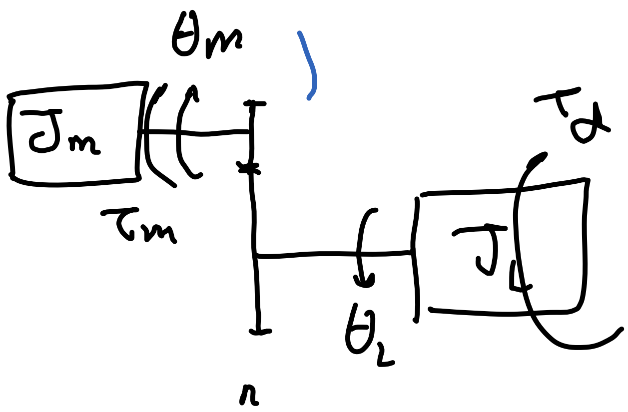
$$\Rightarrow \boxed{\tau_m = K_m i_a}$$

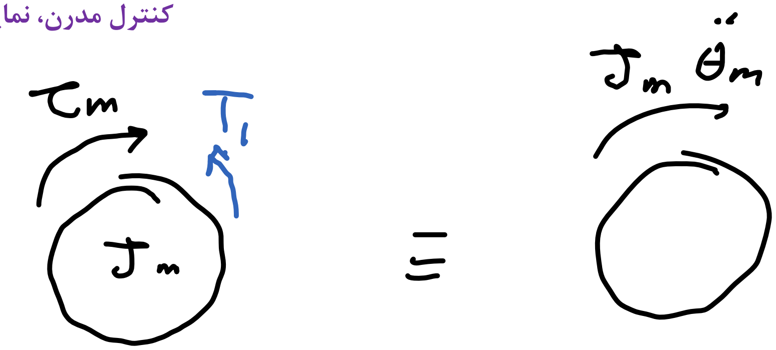
$$\frac{\dot{\theta}_m}{\dot{\theta}_L} = \frac{\omega_m}{\omega_L} = n$$

$$\boxed{v_a - v_{emf} = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt}} \quad , \quad v_{emf} = K_b \omega_m$$

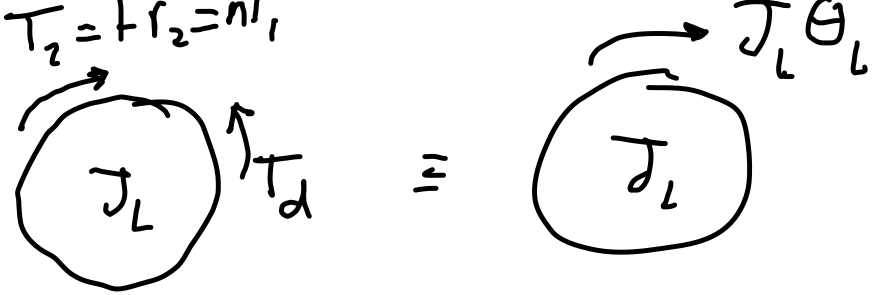
برگشتی

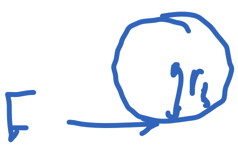
el



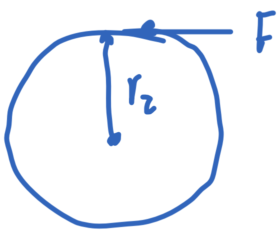


$$T_2 = Fr_2 = nT_1$$





$$T_1 = Fr_1$$



$$\frac{r_2}{r_1} = n$$

$$\begin{cases} \tau_m - T_1 = J_m\ddot{\theta}_m \\ nT_1 - T_d = J_L\ddot{\theta}_L \Rightarrow T_1 = \dfrac{T_d}{n} + \dfrac{J_L\ddot{\theta}_L}{n} \end{cases}$$

$$\frac{\ddot{\theta}_m}{\ddot{\theta}_L} = \frac{\theta_m}{\theta_L} = n \Rightarrow \ddot{\theta}_L = \frac{\ddot{\theta}_m}{n} \longrightarrow T_1 = \frac{T_d}{n} + \frac{J_L\ddot{\theta}_m}{n^2}$$

$$\tau_m - T_l = J_m \ddot{\theta}_m \Rightarrow \tau_m - \left(\frac{T_d}{n} + \frac{J_L \ddot{\theta}_m}{n^2}\right) = J_m \ddot{\theta}_m$$

$$\Rightarrow \left(J_m + \frac{J_L}{n^2}\right) \ddot{\theta}_m = \tau_m - \frac{T_d}{n}$$

اگر معادله برحسب θ_L نوشته شود

$$\boxed{\left(J_L + n^2 J_m\right) \ddot{\theta}_L = n\tau_m - T_d}$$

متغیرهای حالت

$$v_{emf} = k_b \dot{\theta}_m = k_b n \dot{\theta}_L$$

$$\begin{cases} \tau_m = k_m i_a \\ v_a - v_{emf} = R_a i_a + L_a \dfrac{di_a}{dt} \\ \underbrace{(J_L + n^2 J_m)}_{J_e} \ddot{\theta}_L = n\tau_m - T_d \end{cases}
\quad , \quad
\begin{cases} \theta_L = x_1 \\ \dot{\theta}_L = x_2 \\ i_a = x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_L = \frac{1}{J_e}(n\tau_m - T_d)$$

$$\dot{i}_a = \frac{1}{L_a}(v_a - v_{emf} - R_a i_a)$$

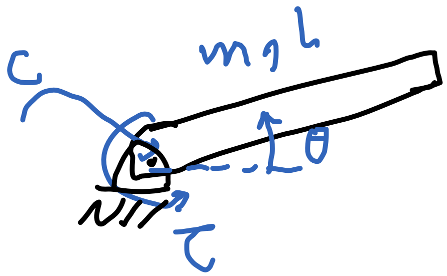
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{J_e}(n k_m x_3) - \dfrac{T_d}{J_e} \\ \dot{x}_3 = \dfrac{-R_a}{L_a} x_3 - \dfrac{k_b n x_2}{L_a} + \dfrac{v_a}{L_a} \end{cases}$$

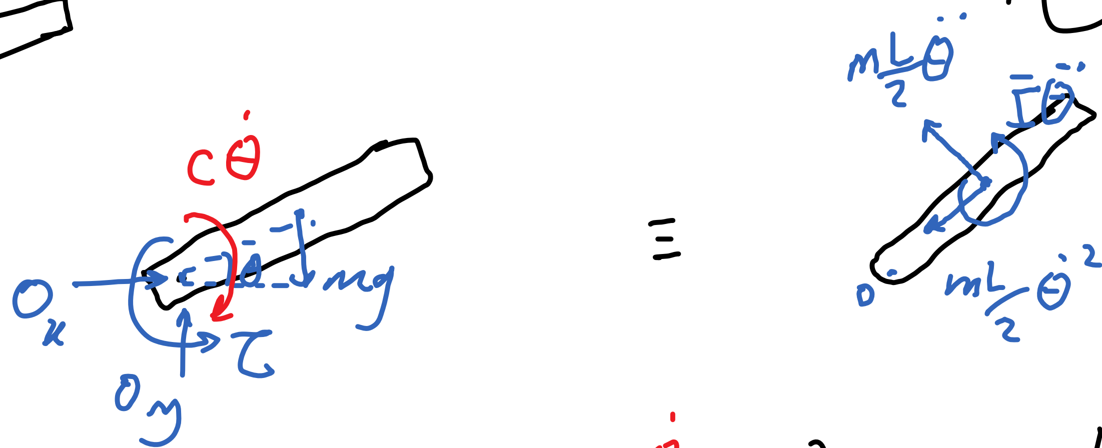
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{J_e}(n K_m x_3) - \dfrac{T_d}{J_e} \\ \dot{x}_3 = \dfrac{-R_a}{L_a} x_3 - \dfrac{k_b n x_2}{L_a} + \dfrac{v_a}{L_a} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{nK_m}{J_e} \\ 0 & \dfrac{-nk_b}{L_a} & \dfrac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/J_e \\ \dfrac{1}{L_a} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ T_d \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ T_d \end{bmatrix}$$

ربات تک لینکی :





$$\bar{I} = \frac{mL^2}{12}$$

$$\sum M_o = \dot{H}_o \Rightarrow \tau - mg\frac{l}{2}\cos\theta - c\dot{\theta} = \frac{mL^2}{4}\ddot{\theta} + \frac{ml^2}{12}\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = mg\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + c\dot{\theta}}$$

$$\tau = mg\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + c\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{3}{ml^2}\left[\tau - mg\frac{l}{2}\cos\theta - c\dot{\theta}\right]$$

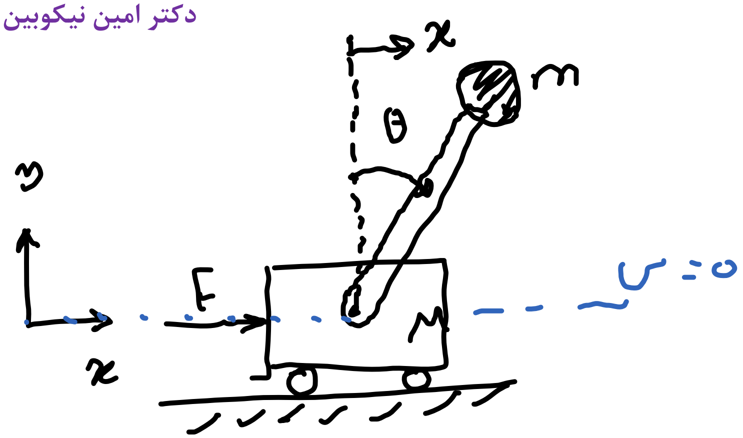
فرم معادلات حالت (غیرخطی) است

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{3}{ml^2}\left[\tau - mg\frac{l}{2}\underline{\cos x_1} - c x_2\right] \end{cases}$$

این معادلات را نمی‌توان به فرم $Ax+Bu$ نوشت، معادلات خطی نیستند

$$\dot{x} = f(x, u)$$

پاندول معکوس



ازجرم میله صرفنظر شده است .

از روش لاگرانژ ،

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \,, \quad T_2 = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2)$$

$$U = mgl\cos\theta$$

برای m

$$\begin{cases} x_m = x + l\sin\theta \\ y_m = l\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_m = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_m = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m \left[(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (l\dot{\theta}\sin\theta)^2 \right]$$

$$L = T - U \longrightarrow L(\theta, \dot{x}, \dot{\theta})$$

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left[(\dot{x} + l \dot{\theta} \cos\theta)^2 + (l \dot{\theta} \sin\theta)^2 \right] - mgl\cos\theta$$

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + 2 l \dot{\theta} \dot{x} \cos\theta + l^2 \dot{\theta}^2 \right] - mgl\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad , \quad \begin{array}{ll} q_1 = x , & Q_1 = F \\ q_2 = \theta , & Q_2 = 0 \end{array}$$

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + 2 l \dot{\theta} \dot{x} \cos\theta + l^2 \dot{\theta}^2 \right] - m g l \cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m\dot{x} + m l \dot{\theta} \cos\theta \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + m l \ddot{\theta} \cos\theta - m l \dot{\theta}^2 \sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{(M+m)\ddot{x} + m l \ddot{\theta} \cos\theta - m l \dot{\theta}^2 \sin\theta = F}$$

معادله دوم

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x}\cos\theta + ml\ddot{\theta} - mg\sin\theta = 0}$$

معادلات سیستم

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F \\ m\ddot{x}\cos\theta + ml\ddot{\theta} - mg\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F \\ m\ddot{x}\cos\theta + ml\ddot{\theta} - mg\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} M+m & ml\cos\theta \\ m\cos\theta & ml \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F + ml\dot{\theta}^2\sin\theta \\ mg\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M+m & ml\cos\theta \\ m\cos\theta & ml \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F + ml\dot{\theta}^2\sin\theta \\ mg\sin\theta \end{bmatrix}$$

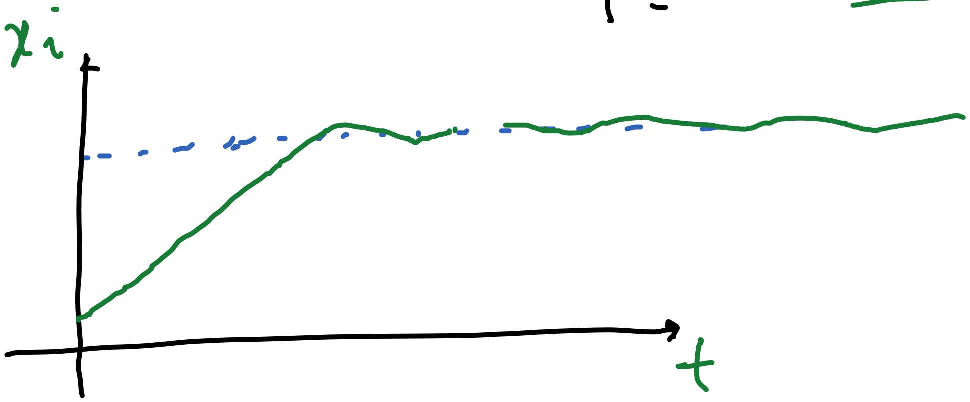
غیرخطی،

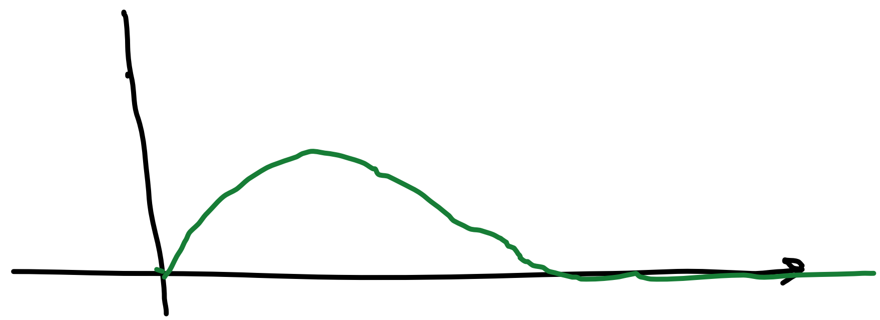
$$\left\{\begin{array}{l} x = x_1 \\ \theta = x_2 \\ \dot{x} = x_3 \\ \dot{\theta} = x_4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \dot{x}_4 = f_2(\quad '' \quad) \end{array}\right.$$

ربات دو لینکی به مطالعه شود.

خطی سازی

- بسیاری از سیستم ها حول نقطه تعادلشان یا حول یک نقطه کاری، باید ثابت باقی بمانند.
- در این صورت اگر سیستم تقریبا خطی باشد، می توان آن را حول نقطه مورد نظر خطی کرد.
- یکی از هدفهای کنترل سیستم را به مقدار مطلوب برسانیم.



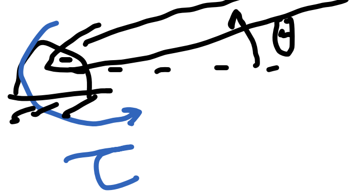


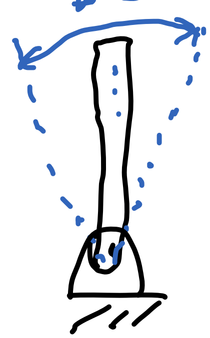
- بعد از خطی کردن می‌توان از بسیاری از تئوری‌های موجود برای سیستم‌های خطی جهت طراحی کنترلر هم استفاده کرد.

- برای سیستم‌های غیرخطی، روشهای کنترل غیرخطی نیز توسعه یافته است، sliding Mode, Feedback linearization, Adaptive, ...

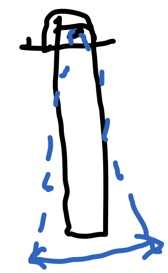
- فعلاً تا روشهای توسعه یافته برای سیستم‌های خطی بسیار دقیق‌تر و راحت‌تر هستند.

-

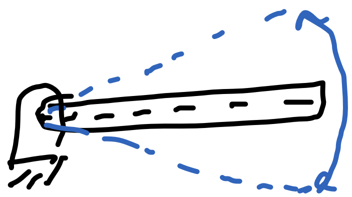




می‌توان معادلات را حول $\theta = 90^\circ$ خطی کنیم



$\theta = -90$ خطی کنیم



$\theta = 0^\circ$ خطی کنیم

اگر $-180 < \theta < +180$ ، نمی‌توان حول یک نقطه خطی کرد.

برای این حالت، می‌توان معادلات را حول چندین نقطه خطی کرد (سامانه تکه‌ای کرد) چندین معادله خواهیم (A_1, B_1) ، (A_2, B_2) ، ...

محاسبه نقطه تعادل یا نقطه کاری

فرم کلی معادلات حالت

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x,u) \end{cases} \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} , \quad u \in R^r , \quad y \in R^m ,$$

- سیستم در نقطه تعادل ثابت باقی می ماند

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ u = 0 \end{cases} \Leftarrow$$

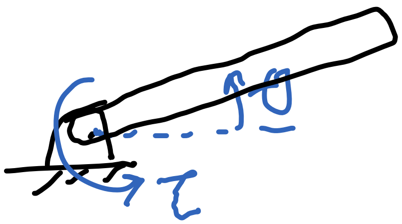
برای نقطه تعادل ورودی به سیستم اعمال نمی شود

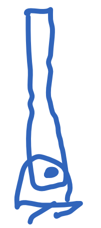
$$\begin{cases} 0 = f(x,0) \Rightarrow x^* \\ y = h(x,0) \end{cases}$$

برای نقطه‌ی کاری فرض می‌شود که می‌خواهیم سیستم را حول یک نقطه‌ی کار، مثلاً x^* خطی کنیم.

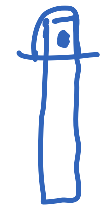
$$\dot{x} = f(x,u) \Rightarrow 0 = f(x^*,u) \Rightarrow u^* =$$

مثال، نقاط تعادل سیستم زیر را بدست آورید.





$\theta_1 = \pi/2$



$x_1 = -\pi/2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{3}{ml^2}\left[\tau - mg\,\dfrac{l}{2}\cos x_1 - c\,x_2\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2 = 0$$

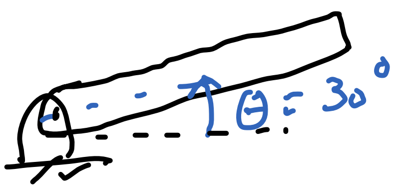
$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = \dfrac{3}{ml^2}\left[\overset{0}{\tau} - mg\,\dfrac{l}{2}\cos x_1 - c\,x_2\right] \end{cases} \Rightarrow \cos x_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{2} \\ x_1 = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} \pm k\pi, \quad k = 1, 2, \dots$$

پس دو نقطه تعادل داریم

$$x_1^* = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad x_2^* = \begin{bmatrix} -\pi/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ادامه، معادلات سیستم را حول نقطه $\theta = \pi/6$ خطی کنید

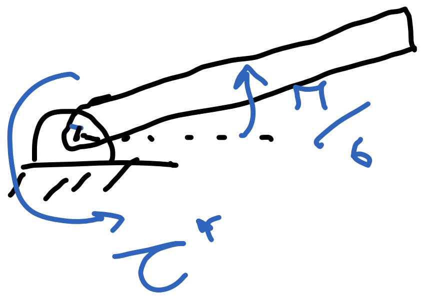


$$x_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x_2 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{3}{ml^2}\left[\tau - mg\frac{l}{2}\cos x_1 - c x_2\right] = 0 \end{cases} \Rightarrow \tau - mg\frac{l}{2}\cos\frac{\pi}{6} = 0$$

$$\Rightarrow \tau^* = u^* = mg\frac{l}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{mgl\sqrt{3}}{4}$$

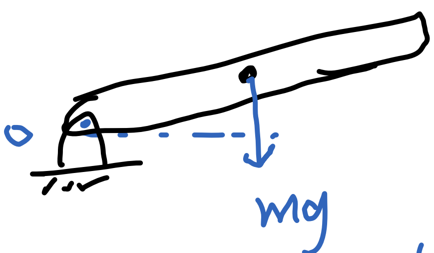


$$\tau^* = \frac{\sqrt{3}\, mgl}{4}$$

$$\tau = \tau^* + \Delta\tau$$

$$u = u^* + \Delta u$$

جبران خطاهای کوچک
جبران اغتشاشات



$$mg \times \frac{l}{2} \times \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}\, mgl}{4}$$

گشتاور mg حول نقطه O

u^* سیستم را در حالت تعادل استاتیکی نگه می دارد.

متغیرهای تفاضلی Δx و Δu و Δy را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

incremental variables

$$\begin{cases} \Delta x = x - x^* \\ \Delta u = u - u^* \\ \Delta y = y - y^* \end{cases}$$

در حقیقت تغییرات متغیرها نسبت به نقطه تعادل در نظر گرفته می‌شود.

u^* سیستم را به حوالی نقطه کاری می‌برد.

Δu خطاهای کوچک را جبران می‌کند یا اغتشاشات وارد بر سیستم را دفع می‌کند.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x^* + \Delta x \\ u = u^* + \Delta u \\ y = y^* + \Delta y \end{cases}$$

$$\left\{\begin{aligned} x &= x^* + \Delta x \\ u &= u^* + \Delta u \\ y &= y^* + \Delta y \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) \\ y &= h(x,u) \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \cancelto{0}{\dot{x}^*} + \Delta\dot{x} &= f(x^* + \Delta x,\ u^* + \Delta u) \\ y^* + \Delta y &= h(x^* + \Delta x,\ u^* + \Delta u) \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} \Delta\dot{x} &= f(x^* + \Delta x,\ u^* + \Delta u) \\ \Delta y &= h(x^* + \Delta x,\ u^* + \Delta u) - y^* \end{aligned}\right.$$

$$\Delta\dot{x} = f(x^* + \Delta x, u^* + \Delta u)$$

$$\Rightarrow \Delta\dot{x}_i = f_i(x^* + \Delta x, u^* + \Delta u) \qquad i = 1, \dots, n$$

با نوشتن سری تیلور f_i حول x^* و u^* داریم

$$f_i(x^* + \Delta x, u^* + \Delta u) = f_i(x^*, u^*) + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right|_{x^*, u^*} \Delta x_1 + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right|_{*} \Delta x_2$$

$$+ \dots + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right|_{*} \Delta x_n + \left.\frac{\partial f_i}{\partial u_1}\right|_{*} \Delta u_1 + \dots \left.\frac{\partial f_i}{\partial u_r}\right|_{*} \Delta u_r + O(\Delta x)^2 + O(\Delta u)^2$$

$$+ \dots$$

به صورت کوچک بودن Δx و Δu از مرتبه های بالاتر صرف نظر می کنیم.

$$\Delta \dot{x}_i = f_i(x^*+\Delta x, u^*+\Delta u) = \cancelto{0}{f_i(x^*, u^*)} + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\Big|_{x^*, u^*}\Delta x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\Big|_{*}\Delta x_2$$

$$+ \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\Big|_{*}\Delta x_n + \frac{\partial f_i}{\partial u_1}\Big|_{*}\Delta u_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_r}\Big|_{*}\Delta u_r$$

از تعریف نقطه تعادل $f_i(x^*, u^*) = 0$

برای ... تا ... تا ... بنویسیم.

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{x}_1\\ \Delta\dot{x}_2\\ \vdots\\ \Delta\dot{x}_n\end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}}^{A}\Bigg|_{x^*,u^*}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \vdots\\ \Delta x_n\end{bmatrix}$$

$$+\overbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r}\\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r}\end{bmatrix}}^{B}\Bigg|_{*}\begin{bmatrix}\Delta u_1\\ \vdots\\ \Delta u_r\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$$

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u$$

پس: بطور مشابه برای معادله خروجی هم داریم

$$\Delta y = h(x^* + \Delta x, u^* + \Delta u) - y^*$$

$$\Delta y = \cancel{h(x^*, u^*)} + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial h}{\partial u} \Delta u - \cancel{y^*}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{*} = A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & - - \cdot - & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$A \in R^{n \times n}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{*} = B = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix}\right|_{*}$$

$$B \in R^{n \times r}$$

$$\Delta y = \frac{\partial h}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial h}{\partial u}\Delta u = C\Delta x + D\Delta u$$

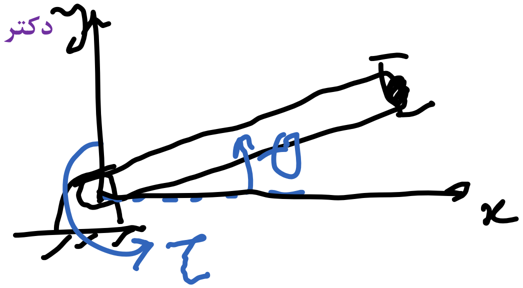
$$C = \frac{\partial h}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{*} \qquad C \in R^{m\times n}$$

$$D = \frac{\partial h}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_r} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial h_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial u_r} \end{bmatrix}_{*} \qquad D \in R^{m\times r}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases}$$

حول نقطه x^* و u^* آن را خطی کرده و به فرم زیر میرسیم

$$\begin{cases} \Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta y = C\Delta x + D\Delta u \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x = x^* + \Delta x \\ u = u^* + \Delta u \\ y = y^* + \Delta y \end{cases}$$



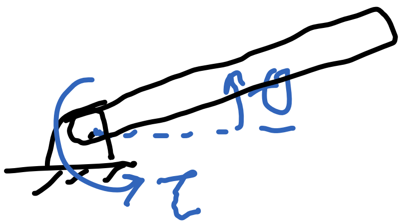
مثال: برای سیستم ربات تک لینکی زیر، فرم فضای حالت را و نقطه تعادل آن بنویسید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{3}{ml^2}\left[\tau - mg\,\dfrac{l}{2}\cos x_1 - c\,x_2\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = l\cos\theta \\ y_2 = l\sin\theta \end{cases}$$

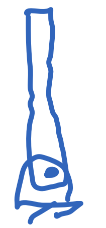
نقاط تعادل

$$x_1^* = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x_2^* = \begin{bmatrix} -\pi/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

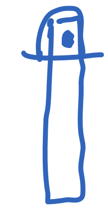


مثال، نقاط تعادل سیستم زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{3}{ml^2}\left[\tau - mg\dfrac{l}{2}\cos x_1 - c x_2\right] \end{cases}$$



$\theta_1 = \pi/2$



$x_1 = -\pi/2$

$$\Rightarrow x_2 = 0$$

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = \dfrac{3}{ml^2}\left[\overset{0}{\tau} - mg\dfrac{l}{2}\cos x_1 - c x_2\right] \end{cases} \Rightarrow \cos x_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{2} \\ x_1 = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} \pm k\pi , \quad k = 1, 2, \dots$$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 = f_1 \\
\dot{x}_2 = \dfrac{3}{ml^2}\left[\tau - mg\dfrac{l}{2}\cos x_1 - c x_2\right] = f_2 \\
y_1 = l\cos\theta = h_1 \\
y_2 = l\sin\theta = h_2
\end{cases}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\[2ex] \dfrac{3g}{2l}\sin x_1 & -\dfrac{3c}{ml^2} \end{bmatrix}
$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = f_1 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{3}{ml^2}\left[\tau - mg\,l_2 \cos x_1 - c\,x_2\right] = f_2 \\ y_1 = l\cos\theta = h_1 \\ y_2 = l\sin\theta = h_2 \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial \tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{3}{ml^2} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 = f_1 \\
\dot{x}_2 = \dfrac{3}{ml^2}\left[\tau - mg\dfrac{l}{2}\cos x_1 - c x_2\right] = f_2 \\
y_1 = l\cos x_1 = h_1 \\
y_2 = l\sin x_1 = h_2
\end{cases}
$$

$$
C = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_2} \\[2mm] \dfrac{\partial h_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l\sin x_1 & 0 \\ l\cos x_1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
D = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial \tau} \\[2mm] \dfrac{\partial h_2}{\partial \tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$x_1^* = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2^* = \begin{bmatrix} -\pi/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \left. \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3g}{2l}\sin x_1 & \frac{-3c}{ml^2} \end{bmatrix} \right|_{x^*}$$

$$\text{for } x_1^* \to A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3g}{2l} & \frac{-3c}{ml^2} \end{bmatrix}, \quad \text{for } x_2^* \to A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-3g}{2l} & \frac{-3c}{ml^2} \end{bmatrix}$$

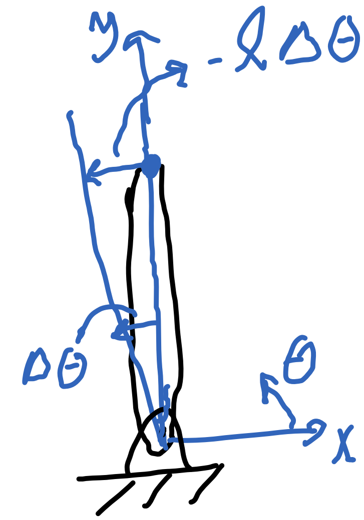
$$x^*_1 = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^*_2 = \begin{bmatrix} -\pi/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -l \sin x_1 & 0 \\ l \cos x_1 & 0 \end{bmatrix}\Bigg|_{x^*}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C_2 = \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3g}{7l} & -\frac{3c}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{ml^2} \end{bmatrix} \Delta\tau$$

x_1^*



$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta\tau$$

$x \leftarrow \Delta y_1 = -l\,\Delta x_1$

$y \leftarrow \Delta y_2 = 0$

مدل ، برای ربات تک لینکی با معادلات را حول نقطه کاری $\begin{bmatrix}\pi/6\\0\end{bmatrix}$ خطی کنید

$$x^* = \begin{bmatrix}\pi/6\\0\end{bmatrix} \longrightarrow u^* = \tau^* = \frac{\sqrt{3}\,mgl}{4}$$

$$A = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3g}{2l}\sin x_1 & -\frac{3c}{ml^2} \end{bmatrix}\right|_{u^*,\tau^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3g}{4l} & -\frac{3c}{ml^2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -l\sin x_1 & 0 \\ l\cos x_1 & 0 \end{bmatrix}\Bigg|_{*} = \begin{bmatrix} -l\sin 30 & 0 \\ l\cos 30 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l/2 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}\,l}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{ml^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3g}{4l} & -\frac{3C}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{ml^2} \end{bmatrix} \Delta\tau$$

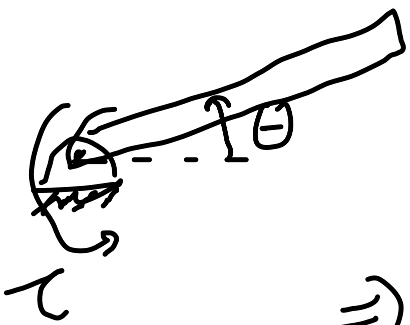
$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l/2 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}l}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta\tau$$

$$x_1 = x^*_1 + \Delta x$$

$$x_2$$

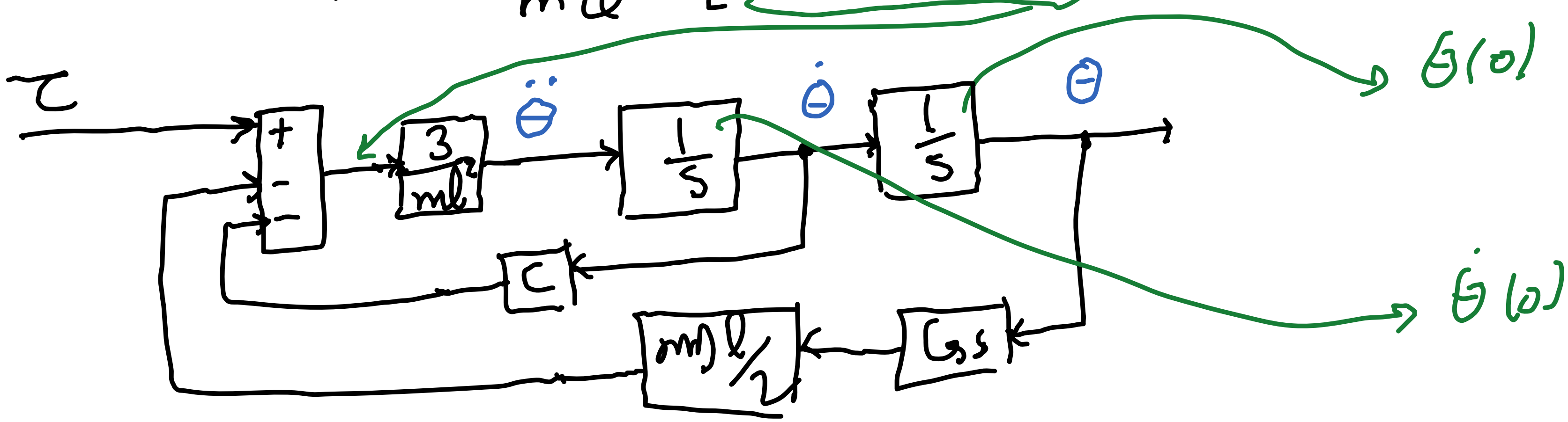
$$
\begin{cases}
x_1 = x_1^* + \Delta x_1 = \dfrac{\pi}{6} + \Delta x_1 \\[2ex]
x_2 = x_2^* + \Delta x_2 = \Delta x_2 \\[2ex]
\tau = \tau^* + \Delta \tau = \dfrac{\sqrt{3}\, mgl}{4} + \Delta \tau
\end{cases}
$$

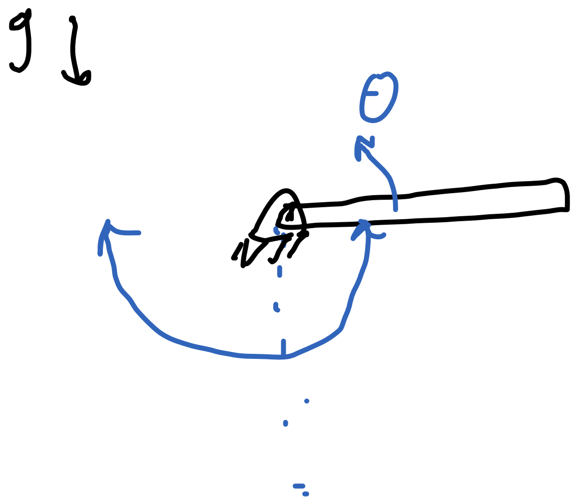
مدل سازی و شبیه سازی ربات تک لینکی در MATLAB

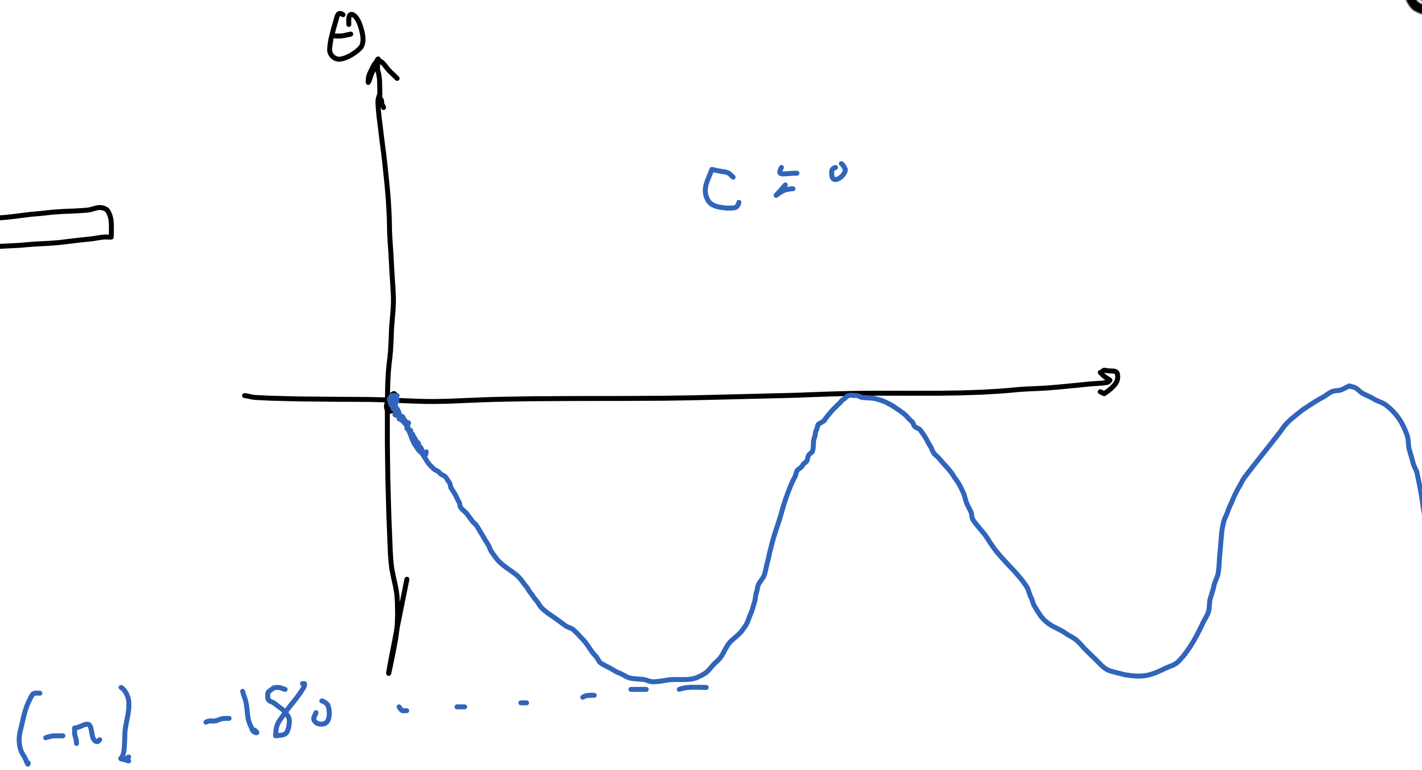


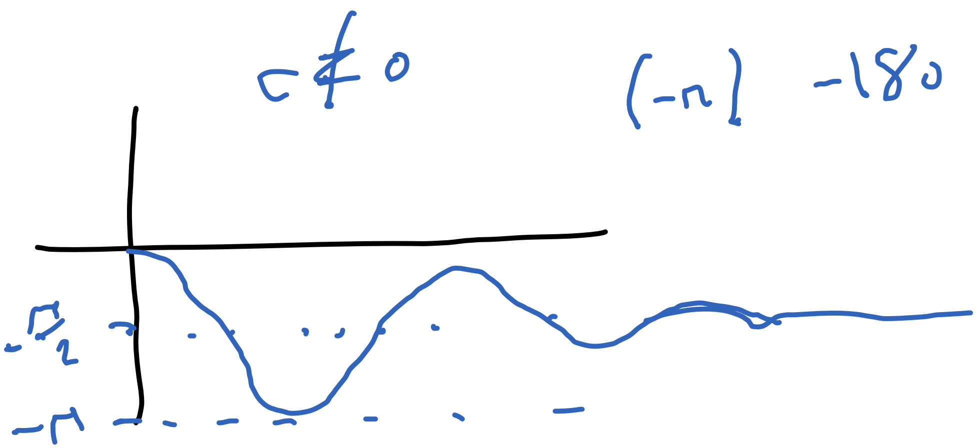
$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + \frac{mgl}{2}\cos\theta + c\dot{\theta} = \tau$$

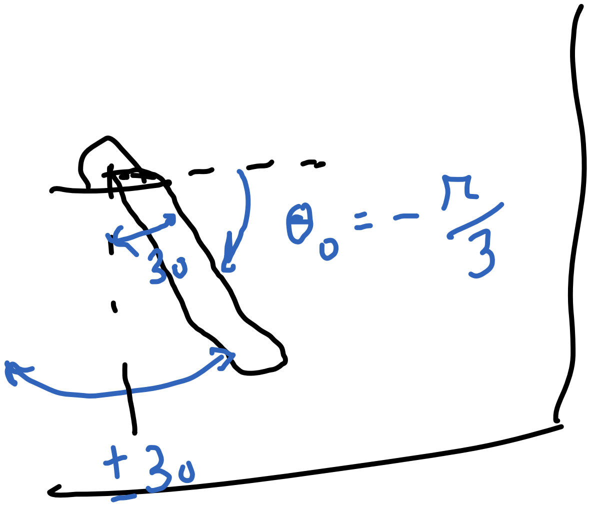
$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{3}{ml^2}\left[\tau - \frac{mgl}{2}\cos\theta - c\dot{\theta}\right]$$

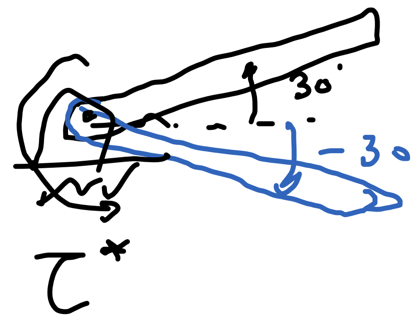



g
θ


θ
c = 0
(-π) -180


c ≠ 0
-π/2
-π





For $\theta^* = 30 \longrightarrow \tau_1^* \Rightarrow \tau_1^* = \tau_2^*$

For $\theta^* = -30 \longrightarrow \tau_2^*$

مثال: معادلات موتور DC را حول $\theta^* = \theta_d$ و $T_d = 0$ خطی کنید

خروجی هم فقط θ است.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & NK_m/J_e \\ 0 & -\frac{NK_m}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & NK_m/J_e \\ 0 & -\frac{NK_m}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v$$

v

$\theta = \theta^*$

$\dot{\omega}^* = 0 \rightarrow \omega^* = 0$

$\Rightarrow \frac{NK_m}{J_e} i^* = 0 \rightarrow i^* = 0$

$-\frac{NK_m}{L}\omega^* - \frac{R}{L} i^* + \frac{v}{L} = 0 \rightarrow v^* = 0$

$$\Delta\theta = \theta - \theta^{*} = \theta - \theta_d$$

$$\Delta\omega = \omega - \omega^{*} = \omega$$

$$\Delta i = i - i^{*} = i$$

$$\Delta v = v - v^{*} = v$$

با تعریف متغیرهای تفاضلی

$$\theta = \Delta\theta + \theta_d \Rightarrow \dot{\theta} = \Delta\dot{\theta}$$

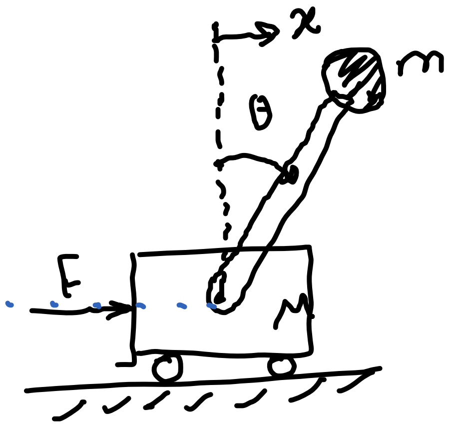
$$\dot{\omega} = \Delta\dot{\omega}$$

$$\dot{i} = \Delta\dot{i}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\theta} \\ \Delta\dot{\omega} \\ \Delta\dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & NK_m/J_e \\ 0 & -\frac{NK_m}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta\omega \\ \Delta i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \Delta V$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta\omega \\ \Delta i \end{bmatrix}$$

مثال: معادلات سیستم پاندول معکوس را حول نقطه تعادل خطی کنید.



$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F \\ m\ddot{x}\cos\theta + ml\ddot{\theta} - mg\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow \sin\theta = 0$; $\theta = 0$ ، $\theta = \pi$

$\dot{x} = 0 \longrightarrow \ddot{x} = 0$

$\dot{\theta} = 0 \longrightarrow \ddot{\theta} = 0$

$f = 0$

$$x_1^* = \begin{bmatrix} a \\ \pi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2^* = \begin{bmatrix} a \\ -\pi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بدیهی است نقطه تعادل را [illegible] $a=0$ ، برای a [illegible] هر مقدار دلخواه در نظر گرفت

$$\overbrace{\begin{bmatrix} M+m & ml\cos\theta \\ m\cos\theta & ml \end{bmatrix}}^{H}\begin{bmatrix}\ddot{x} \\ \ddot{\theta}\end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} F+ml\dot{\theta}^{2}\sin\theta \\ mg\sin\theta \end{bmatrix}}^{Y}$$

$$\Rightarrow \ddot{q} = \begin{bmatrix}\ddot{x} \\ \ddot{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M+m & ml\cos\theta \\ m\cos\theta & ml \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} F+ml\dot{\theta}^{2}\sin\theta \\ mg\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{bmatrix}\dot{x} \\ \dot{\theta}\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}\ddot{x} \\ \ddot{\theta}\end{bmatrix} = H^{-1}Y, \quad \ddot{q} = H^{-1}Y$$

$$\begin{cases} x = x_1 \\ \theta = x_2 \\ \dot{x} = x_3 \\ \dot{\theta} = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 = f_1 = \dot{x} \\ \dot{x}_2 = x_4 = f_2 = \dot{\theta} \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \dot{x}_4 = f_4(\quad \sim \quad) \end{cases}$$

غیرخطی،

F3=(L*m*sin(th)*thd^2 + F)/(M + m - m*cos(th)^2) - (g*m*cos(th)*sin(th))/(M + m - m*cos(th)^2)

F4= (g*m*sin(th)*(M + m))/(L*m^2 + L*M*m - L*m^2*cos(th)^2) - (cos(th)*(L*m*sin(th)*thd^2 + F))/(L*m + L*M - L*m*cos(th)^2)

$$A = \frac{\partial f(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})}{\partial q} \qquad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \qquad q = \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\theta}} \\ & & & \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} & \cdots & & \frac{\partial f_4}{\partial \dot{\theta}} \end{bmatrix}$$

jacobian (f , q)

برای x_1^*

A1 =

$$\begin{bmatrix} 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & -(g*m)/M, & 0, & 0 \\ 0, & -(g*(M + m))/(L*M), & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

B1 =

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1/M \\ 1/(L*M) \end{matrix}$$