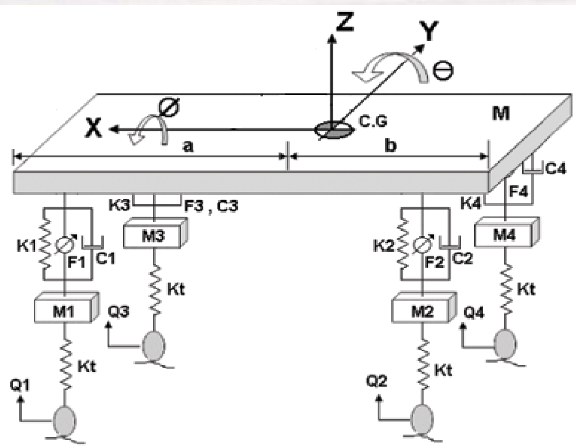
جزوه درسی کنترل اتوماتیک

بخش دوم: مدلسازی ریاضی



دکتر نیکوبین

۱- تبدیل لاپلاس

روش تبدیل لاپلاس یک روش عملیاتی است که کاربرد آن در حل معادلات دیفرانسیل خطی مزایای زیادی دارد. به کمک تبدیل لاپلاس میتوان عملیات مشتق گیری و انتگرال گیری را به عملیات جبری تبدیل نمود. به این ترتیب معادله دیفرانسیل خطی به یک معادله جبری از متغیر مختلط s تبدیل میشود. سپس میتوان با استفاده از جدول تبدیل لاپلاس یا روشهای دیگر معادلات دیفرانسیل را حل کرد.

مزایای روش تبدیل لاپلاس:

- ☐ امکان کاربرد روشهای ترسیمی برای پیش بینی عملکرد سیستم بدون نیاز به حل واقعی معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم
- ☐ با حل معادلات دیفرانسیل، مولفه های گذرا و حالت ماندگار جواب یکجا بدست می آید.

مقدمه ای بر اعداد مختلط

عدد مختلط: عدد مختلط یک بخش حقیقی دارد و یک بخش موهومی. در تبدیل لاپلاس نماد s را به عنوان متغیر مختلط به کار میبریم:

$$s = \sigma + j\omega$$

که در آن σ بخش حقیقی و ω بخش موهومی میباشد.

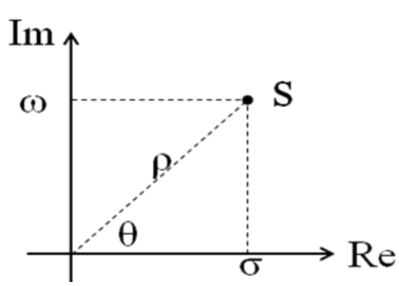
نحوه دیگر نمایش s به صورت زیر میباشد:

$$s = \rho e^{-j\theta}$$

که در آن $\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ ، $\theta = tg^{-1}\dfrac{\omega}{\sigma}$.

زاویه در جهت پادساعتگرد نسبت به بخش مثبت محور حقیقی اندازه گرفته میشود.

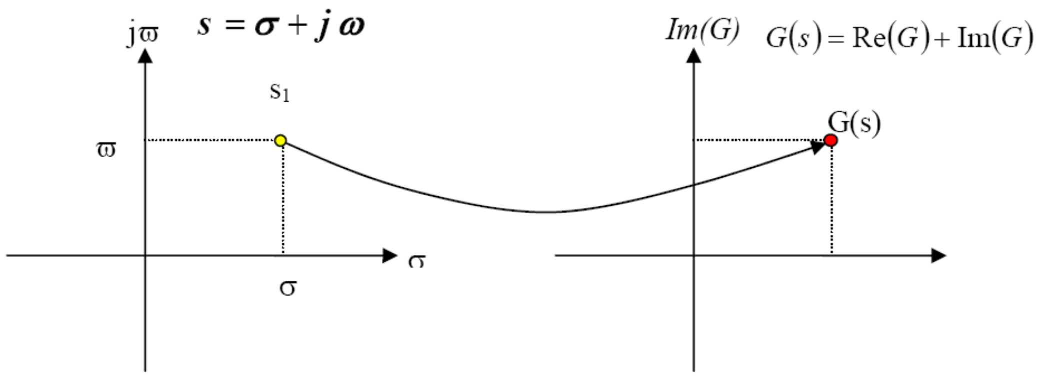
عدد مختلط s در صفحه اعداد مختلط به صورت زیر نشان داده میشود.



تابع مختلط: تابع مختلط G(s) تابعی از s است که یک بخش حقیقی و یک بخش موهومی دارد.

$$G(s) = G_x(s) + jG_y(s) = Re[G(s)] + Im[G(s)]j$$

که در آن G_x و G_y کمیات حقیقی‌اند. اندازه G(s) برابر است با $\sqrt{G_x^2+G_y^2}$ و زاویه آن برابر است با $tg^{-1}\frac{G_y}{G_x}$



تابع تحلیلی: تابع مختلط G(s) را در یک ناحیه تحلیلی می‌نامند اگر G(s) و تمام مشتقاتش در آن ناحیه وجود داشته باشند، یا شرایط کوشی –ریمان برقرار باشد.

شرایط کوشی- ریمان

$$G(s)=G_x(s)+jG_y(s),\quad s=\sigma+j\omega$$
$$\frac{\partial G_x}{\partial\sigma}=\frac{\partial G_y}{\partial\omega},\ \frac{\partial G_y}{\partial\sigma}=-\frac{\partial G_x}{\partial\omega}$$

اگر تابع G در نقطه s تحلیلی باشد، s یک نقطه عادی تابع G و اگر تحلیلی نباشد یک نقطه منفرد (singular) تابع G محسوب میشود.

صفر تابع G(s) : نقطه s=z یک صفر تابع G است اگر G(z)=0

قطب تابع G(s) : نقطه s=p یک قطب تابع G است اگر G(p)=inf

مثال: صفر و قطب تابع $G(s)=\frac{s+2}{s+1}$ را تعین کنید.

S=-2 صفر تابع G. S=-1 قطب تابع G میباشد.

قطب مرتبه n: در صورتی که شرایط زیر برقرار باشد

$$\lim_{s\to -p} G(s)(s+p)^n \neq 0,\infty$$
$$\lim_{s\to -p} G(s)=\infty$$

s=-p را قطب مرتبه n مینامند.

مثال: صفر و قطب تابع $G(s)=\frac{(s+2)^2}{s(s+1)^3(s+5)}$ را تعین کنید.

s=-2 صفر مرتبه دو

s=0 قطب مرتبه یک

s=-1 قطب مرتبه سه

s=5 قطب مرتبه یک

قضیه اویلر: بسط $\cos\theta$ و $\sin\theta$ به صورت سری توانی

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$

$$\cos\theta=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2},\ \sin\theta=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$

تبدیل لاپلاس

f(t): تابعی از زمان به نحوی که برای t<0 ، f(t)=0

s: یک متغیر مختلط

L: نماد تبدیل لاپلاس، L^{-1} نماد عکس تبدیل لاپلاس

F(s): تبدیل لاپلاس f(t)

بنابراین داریم:

$$f(t)\xrightarrow{L}F(s)$$

$$F(s)\xrightarrow{L^{-1}}f(t)$$

تبدیل لاپلاس تابع f(t) به صورت زیر تعریف میشود:

$$L\left[f(t)\right]=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

و عکس تبدیل لاپلاس تابع f(t) از رابطه زیر محاسبه میگردد:

$$L^{-1}\left[F(s)\right]=f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

که در آن c طول همگرایی، ثابتی حقیقی است که بزرگتر از بخش حقیقی تمام نقاط تکین F(s) انتخاب میشود. بنابراین مسیر انتگرال‌گیری با محور $j\omega$ موازی است و به فاصله c از آن قرار دارد. این مسیر سمت راست تمام نقاط تکین قرار دارد.

محاسبه عکس تبدیل لاپلاس از این انتگرال کار پیچیده ای است و در عمل از این رابطه استفاده نمیشود.

مثال: تبدیل لاپلاس توابع زیر را حساب کنید.

- تابع پله

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ A & t\geq 0\end{cases}\Rightarrow L\left[f(t)\right]=\int_0^\infty Ae^{-st}dt=\frac{A}{s}$$

- تابع نمایی

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ Ae^{-at} & t\geq 0\end{cases}\Rightarrow L\left[f(t)\right]=\int_0^\infty Ae^{-at}e^{-st}dt=A\int_0^\infty e^{-(a+s)t}dt=\frac{A}{s+a}$$

- تابع شیب

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ At & t\geq 0\end{cases}\Rightarrow L\left[f(t)\right]=\int_0^\infty Ate^{-st}dt=At\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty-\int_0^\infty\frac{Ae^{-st}}{-s}dt=\frac{A}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{A}{s^2}$$

برای محاسبه تبدیل لاپلاس تابع شیب، از انتگرال جزئ به جزئ طبق رابطه زیر استفاده شده است.

$$\frac{d(uv)}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$$

$$\int_a^b u\frac{dv}{dx}dx=\left[uv\right]_a^b-\int_a^b v\frac{du}{dx}dx$$

- تابع سینوسی

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ A\sin\omega & t\geq 0\end{cases}$$

که در آن A و ω ثابت هستند. بنابراین طبق قضیه اویلر داریم

$$L\left[f(t)\right]=\int_0^\infty A\sin\omega te^{-st}dt=\frac{A}{2j}\int_0^\infty\left(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right)e^{-st}dt$$

$$=\frac{A}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

به طور مشابه داریم:

$$L\left[A\cos\omega t\right]=\frac{As}{s^2+\omega^2}$$

قضایا و خواص تبدیل لاپلاس

۱- تبدیل لاپلاس حاصلضرب یک عدد ثابت در یک تابع

$$L\left[Af(t)\right]=AL\left[f(t)\right],\ A=cte$$

۲- تبدیل لاپلاس مجموع یا تفاضل چند تابع

$$L\left[f_1(t)+f_2(t)\right]=L\left[f_1(t)\right]+L\left[f_2(t)\right]$$

۳- تبدیل لاپلاس مشتق یک تابع

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0)$$

$$L\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right]=s^2F(s)-sf(0)-\dot{f}(0)$$

$$L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}\dot{f}(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

اثبات:

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=f(t)\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty-\int_0^\infty\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)\frac{e^{-st}}{-s}dt$$

$$F(s)=\frac{f(0)}{s}+\frac{1}{s}L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]\Rightarrow L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0)$$

و اگر از رابطه بدست آمده تبدیل لاپلاس بگیریم، داریم

$$L\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right]=L\left[\frac{d}{dt}g(t)\right]=sL\left[g(t)\right]-g(0)$$

$$=sL\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]-\dot{f}(t)=s^2F(s)-sf(0)-\dot{f}(0)$$

و به همین طریق روابط دیگر نیز اثبات میشود.

۴- تبدیل لاپلاس انتگرال

$$L\left[\int f(t)dt\right]=\int_0^\infty\left[\int f(t)dt\right]s^{-st}dt=\left[\int f(t)dt\right]\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty-\int_0^\infty f(t)\frac{e^{-st}}{-s}dt$$

$$=\frac{1}{s}\int f(t)dt\bigg|_{t=0}+\frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)s^{-st}dt=\frac{F(s)}{s}+\frac{1}{s}\int f(t)dt\bigg|_{t=0}$$

اگر شرایط اولیه انتگرال برابر صفر باشد، داریم

$$L\left[\int f(t)dt\right]=\frac{F(s)}{s},\ L\left[\int\int f(t)dt\right]=\frac{F(s)}{s^2},\ L\left[\int\int\int f(t)dt\right]=\frac{F(s)}{s^3}$$

۵- قضیه مقدار اولیه

$$\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{t\to 0}f(t)=f(0^+)$$

با استفاده از این قضیه میتوان مقدار $f(0^+)$ را مستقیما از تابع $F(s)$ محاسبه نمود.

۶- قضیه مقدار نهایی

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

این قضیه در صورتی برقرار است که $sF(s)$ هیچ قطبی روی محور موهومی یا سمت راست صفحه s نداشته باشد.

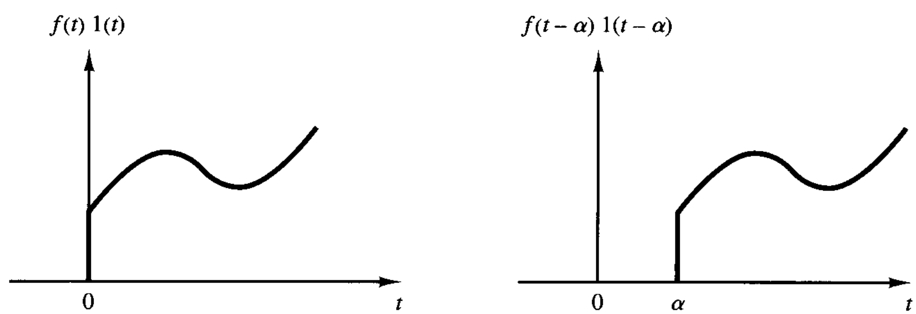
با استفاده از این قضیه میتوان مقدار نهایی یک تابع (مقدار حالت ماندگار) را مستقیما از تابع تبدیل لاپلاس آن ($F(s)$) محاسبه نمود بدون نیاز به محاسبه $f(t)$.

۷- جابجایی تبدیل لاپلاس در صفحه s

$$L\left[e^{-at}f(t)\right] = L\left[f(t)\right]_{s=s+a} = F(s+a)$$

۸- تبدیل لاپلاس تابع تاخیر داده شده

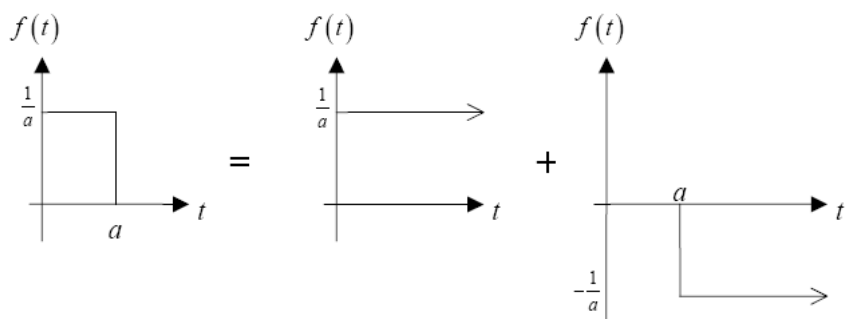
$$L\left[f(t-\alpha)1(t-\alpha)\right] = e^{-\alpha s}F(s) \quad \text{For}\ \alpha \ge 0$$



مثال: تبدیل لاپلاس تابع پالس زیر را محاسبه کنید.

$$f(t) = \begin{cases} 1/a & 0<t<a \\ 0 & t<0, t>a \end{cases}$$

تابع پالس را میتوان به صورت مجموع دو تابع به صورت زیر نوشت:



بنابراین داریم $f(t) = \frac{1}{a}1(t) - \frac{1}{a}1(t-a)$

$$L\left[f(t)\right] = L\left[\frac{1}{a}1(t)\right] - L\left[\frac{1}{a}1(t-a)\right] = \frac{1}{as} - \frac{1}{as}e^{-as} = \frac{1}{as}\left(1-e^{-as}\right)$$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع ضربه را محاسبه کنید.

$$g(t) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{a} \quad 0 < t < a$$

$$L\left[g(t)\right] = \lim_{a\to 0} \frac{1}{as}\left(1 - e^{-as}\right) = 1$$

تمرین: تبدیل لاپلاس توابع ضربه، پله و شیب را محاسبه کنید. چه نتیجه ای میگیرید.

عکس تبدیل لاپلاس

تابع زیر را در نظر بگیرید

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{k\left(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0\right)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

اگر m>n بود با تقسیم A(s) بر B(s) چند جملهای بر حسب s و باقیمانده آن بدست می‌آید.

بسط به کسرهای جزئی در حالتی که F(s) تنها قطبهای مجزا دارد.

F(s) را به صورت زیر می‌نویسیم (ریشه های B(s) را محاسبه کرده و آنرا به صورت حاصلضرب مینویسیم.)

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{k\left(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0\right)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

حال F(s) به صورت حاصل جمع نوشته میشود با فرض m<n:

$$F(s) = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_{21}} + \cdots \frac{a_n}{s+p_n}$$

که در آن a_iها به صورت زیر محاسبه میشوند

$$a_i = \lim_{s\to -p_i}\left[(s+p_i)F(s)\right]$$

بسط به کسرهای جزئی در حالتی که F(s) قطب مکرر داشته باشد.

در این حالت F(s) به صورت زیر نوشته میشود

$$F(s) = \frac{a_1}{s+p_1} + \cdots + \frac{c_1}{s+p_k} + \frac{c_2}{(s+p_k)^2} + \cdots + \frac{c_r}{(s+p_k)^r} + \cdots \frac{a_n}{s+p_n}$$

که در آن a_iها از همان رابطه قبلی محاسبه میشوند، و c_iها طبق رابطه زیر بدست می‌آیند

$$c_{r-J}=\frac{1}{J!}\frac{d^J}{ds^J}\left[(s+p_k)^r F(s)\right]_{s=-p_k} \quad J=0,1,\cdots r-1$$

مثال: عکس تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

$$F(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

$$F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{a_1}{s+1}+\frac{a_2}{s+2} \quad ، \quad \begin{aligned}a_1&=\left[(s+1)F(s)\right]_{s=-1}=2\\ a_2&=\left[(s+2)F(s)\right]_{s=-2}=-1\end{aligned}$$

$$F(s)=\frac{2}{s+1}+\frac{-1}{s+2}\Rightarrow f(t)=2e^{-t}-e^{-2t}$$

$$F(s)=\frac{1}{s(s+2)(s+1)^3}$$

$$F(s)=\frac{K_\circ}{s}+\frac{K_1}{s+2}+\frac{A_1}{s+1}+\frac{A_2}{(s+1)^2}+\frac{A_3}{(s+1)^3}$$

$$K_\circ=\left[sF(s)\right]_{s=0}=\frac{1}{2}$$

$$K_1=\left[(s+2)F(s)\right]_{s=-2}=\frac{1}{2}$$

$$A_3=\left[(s+1)^3F(s)\right]_{s=-1}=-1$$

$$A_2=\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3F(s)\right]_{s=-1}=\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s(s+2)}\right]_{s=-1}=\frac{-2s-2}{s^2(s+2)^2}=0$$

$$A_1=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3F(s)\right]_{s=-1}=-\frac{d}{ds}\left[\frac{s+1}{s^2(s+2)^2}\right]_{s=-1}=-1$$

$$F(s)=\frac{1}{2s}+\frac{1}{2(s+2)}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^3}$$

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-t}-\frac{t^2e^{-t}}{2} \quad , \quad t>0$$

$$F(s)=\frac{2s+12}{s^2+2s+5} \quad \Rightarrow \quad F(s)=\frac{2s+12}{(s+1+2j)(s+1-2j)}$$

همانطور که دیده میشود در این مثال تابع دو قطب مختلط مزدوج دارد. برای حل این مثال دو روش میتوان به کار برد.

روش اول:

$$F(s)=\frac{2s+12}{(s+1+2j)(s+1-2j)}=\frac{a_1}{(s+1+2j)}+\frac{a_2}{(s+1-2j)}$$

$$a_1=\left[(s+1+2j)F(s)\right]_{s=-1-2j}=1+2.5j$$

$$a_2=\left[(s+1-2j)F(s)\right]_{s=-1+2j}=1-2.5j \quad \Rightarrow \quad f(t)=(1+2.5j)e^{(-1-2j)t}+(1-2.5j)e^{(-1+2j)t}$$

روش دوم: تابع را به صورت تبدیل لاپلاس توابع سینوسی و کسینوسی در آوریم.

$$L\left[e^{-at}\sin\omega t\right]=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\ ,\ L\left[e^{-at}\cos\omega t\right]=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$F(s)=\frac{2s+12}{s^2+2s+5}=\frac{2(s+1)+10}{(s+1)^2+2^2}=2\frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2}+5\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

$$\Rightarrow f(t)=2e^{-t}\cos 2t+5e^{-t}\sin 2t$$

تمرین: تبدیل لاپلاس تابع زیر را به دو روش بالا محاسبه کنید.

$$F(s)=\frac{13}{s(s^2+4s+13)}$$

بسط به کسرهای جزئی

نحوه استفاده از دستور Residue و مثالهای مربوطه را از کتاب Ogata بخوانید.

حل معادلات دیفرانسیل خطی با استفاده از MATLAB

معادله خطی مستقل از زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$a_n x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{x}+a_0x=u(t)$$

با شرایط اولیه $x^{(n-1)}(0)=c_n, x^{(n-2)}(0)=c_{n-1},\cdots,\dot{x}(0)=c_2, x(0)=c_1$ و ورودی $u(t)$.

با گرفتن تبدیل لاپلاس از هر از مولفه های معادله بالا داریم:

$$L\left[x(t)\right]=X(s)$$

$$L\left[\dot{x}(t)\right]=sX(s)-c_1$$

$$L\left[\ddot{x}(t)\right]=s^2X(s)-sc_1-c_2$$

$$\vdots$$

$$L\left[x^{(n)}(t)\right]=s^nX(s)-s^{n-1}c_1-\cdots-c_n$$

بنابراین معادله دیفرانسیل را میتوان به صورت زیر نوشت:

$$X(s)\left(a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0\right)=U(s)+C(s)$$

که در آن $U(s)$ تبدیل لاپلاس $u(t)$، و $C(s)$ تابعی از متغیر s میباشد که ضرایب آن تابعی از c_i ها و a_i ها میباشد. بنابراین داریم

$$X(s)=\frac{U(s)}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}+\frac{C(s)}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

با در نظر گرفتن $D=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0$ داریم: $x(t)=L^{-1}\left[\frac{U}{D}\right]+L^{-1}\left[\frac{C}{D}\right]$

به قسمت اول جواب، پاسخ zero-state میگویند و به قسمت دوم zero-input

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\ddot{x}+3\dot{x}+2x=u(t)$$
$$u(t)=5\delta(t),x(0)=a,\ \dot{x}(0)=b$$

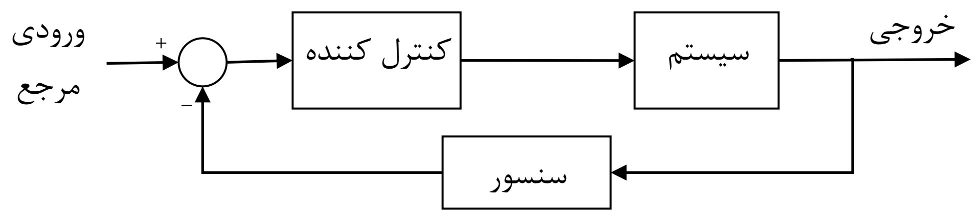
$$\Rightarrow s^2X-as-b+3(sX-a)+2X=U\Rightarrow X=\frac{U(s)}{s^2+3s+2}+\frac{as+b+3a}{s^2+3s+2}$$
$$x_{zs}=L^{-1}\frac{5}{s^2+3s+2}=L^{-1}\left[\frac{5}{s+1}-\frac{5}{s+2}\right]=5(e^{-t}-e^{-2t})$$
$$x_{zi}=L^{-1}\frac{as+b+3a}{s^2+3s+2}=L^{-1}\left[\frac{2a+b}{s+1}-\frac{a+b}{s+2}\right]=(2a+b)e^{-t}-(a+b)e^{-2t})$$
$$x=x_{zs}+x_{zi}$$

۲- مدلسازی ریاضی

۲-۱- مقدمه

۲-۱-۱- هدف از مدلسازی ریاضی

همانطور که قبلا ذکر شد دیاگرام بلوکی یک سیستم کنترل را میتوان طبق شکل ۱ نشان داد. قسمت بسیار مهم از این دیاگرام بلوکی سیستم آن است. یعنی برای طراحی کنترل کننده باید سیستم مورد نظر (مثلا ربات، رادار، ماهواره، اتاق و غیره) در دسترس باشد تا بتوان از طریق سنسور، خروجی مورد نظر را اندازه گرفت، با ورودی مرجع مقایسه کرد، سیگنال خطا را به کنترل کننده داد و سپس سیگنال کنترلی را به سیستم اعمال نمود، رفتار سیستم را تحلیل کرده و کنترلر مناسب را طراحی نمود.

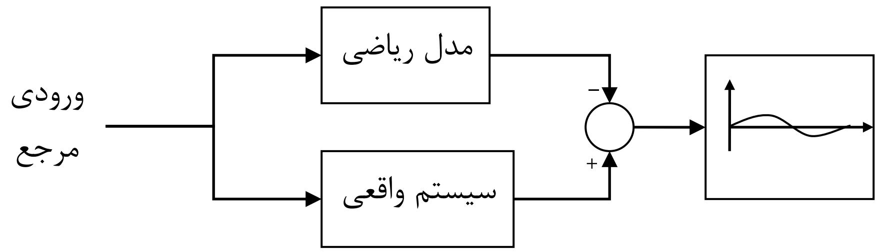


شکل ۱- سیستم کنترل حلقه بسته

اما مشکلی که در اینجا وجود دارد این است که در اغلب موارد سیستمی که قصد کنترل آنرا داریم در دسترس نیست. یعنی ممکن است ساخت سیستم مورد نظر (که مثلا یک رادار است) هنوز به اتمام نرسیده باشد، یا اینکه میخواهیم قبل از راه اندازی سیستم در شرایط واقعی از عملکرد درست کنترلر آن اطمینان حاصل کنیم مثلا برای یک ماهواره. بهترین راه حل برای این مشکل این است که قبل از پیاده سازی کنترلر روی سیستم واقعی، از طریق تحلیل ریاضی و شبیه سازی از عملکرد درست کنترلر مطمئن شویم. بنابراین

به منظور طراحی کنترلر برای یک سیستم دینامیکی در قدم اول باید یک مدل ریاضی مناسب از سیستم بدست آوریم. مدل ریاضی سیستم دینامیکی، یک مجموعه معادله است که رفتار دینامیکی سیستم را دقیقا، یا حداقل به خوبی نمایش دهد. باید توجه کرد که مدل ریاضی برای یک سیستم معین یکتا نیست. یک سیستم را میتوان به صورتهای مختلف نمایش داد، بنابراین بسته به دیدگاه شخص مدلهای ریاضی متفاوتی برای یک سیستم وجود دارد.

همانطور که در شکل ۲ نشان داده شده است، هر چه قدر خطای بین پاسخ مدل ریاضی و سیستم واقعی به ازای یک ورودی به صفر نزدیک تر باشد، مدل ریاضی بهتر و مطلوب تر میباشد. مدل ریاضی بدست آمده باید بتواند رفتار سیستم واقعی را به ازای ورودیهای مختلف مدل کند. مدل ریاضی ایده آل، مدلی است که رفتار سیستم را به ازای هر ورودی مدل کند.



شکل ۲- مدل ریاضی مطلوب

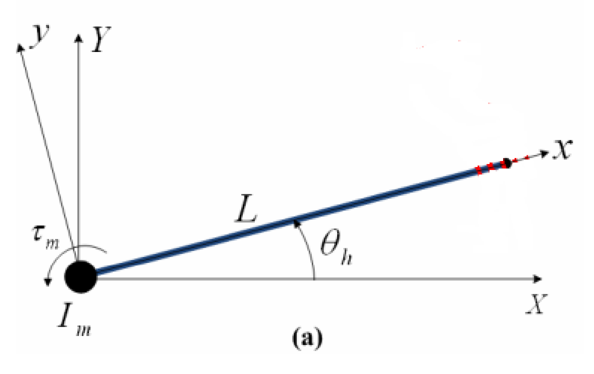
بدست آوردن یک مدل ریاضی ایده آل کار بسیار مشکل و پرهزینه‌ای است. اغلب بدست آوردن یک مدل ریاضی که بتواند رفتار سیستم را به ازای ورودی‌های شبیه به ورودی‌های واقعی مدل کند، کافی است.

۲-۱-۲- سادگی در برابر دقت

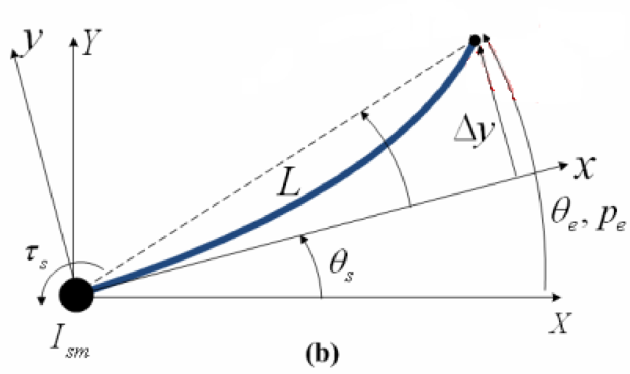
در یافتن مدل ریاضی باید مصالحه‌ای بین سادگی مدل و دقت نتایج تحلیل صورت دهیم. برای بدست آوردن یک مدل ریاضی ساده قابل قبول، اغلب از بعضی ویژگیهای ذاتی فیزیکی سیستم صرف نظر میکنیم. وقتی به دنبال یک مدل خطی با پارامترهای مجزا هستیم باید از بعضی ویژگیهای غیرخطی و پارامترهای توزیع شده موجود در سیستم که منجر به معادلات PDE میشود صرف نظر کنیم. باید به این نکته کاملا آگاه باشیم که یک مدل خطی با عناصر فشرده، که در فرکانس پایین معتبر است میتواند در فرکانسهای بالا معتبر نباشد، زیرا در این فرکانسها ویژگیهای چشم پوشی شده عناصر توضیع شده، عامل مهمی در رفتار دینامیکی سیستم است.

نکته کلیدی و اساسی در مدلسازی این است که از ساده ترین مدل ممکن شروع کنیم و در مراحل بعدی با توجه به نیاز و خواسته ها مدل را دقیق تر کنیم.

مثال ۱- منیپولاتور تک لینکی



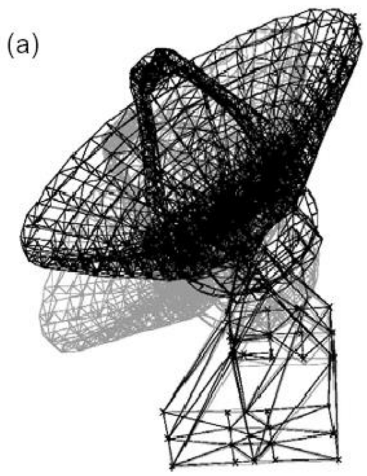
شکل ۳- ربات تک لینکی با فرض صلب بودن لینک



شکل ۴- در نظر گرفتن خاصیت انعطاف پذیری ربات

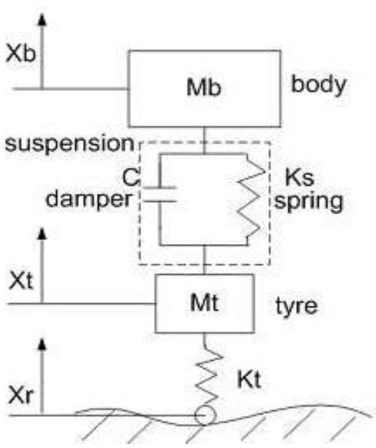
مثال۲- آنتن

شکل ۵- The deep space network antenna

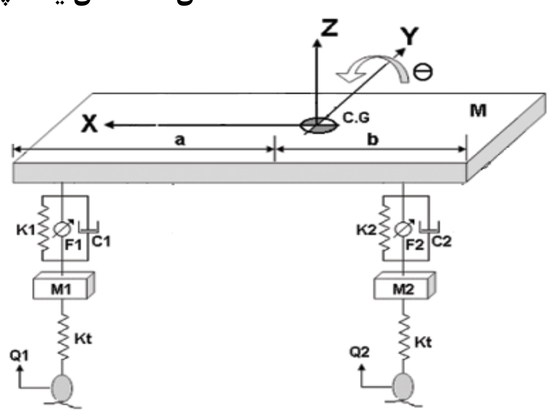


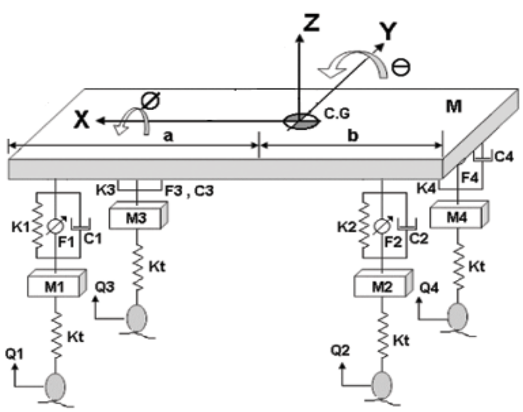
شکل ۶- مد ارتعاشی اول آنتن

مثال ۳- سیستم تعلیق خودرو



شکل ۷- مدل یک چهارم سیستم تعلیق خودرو

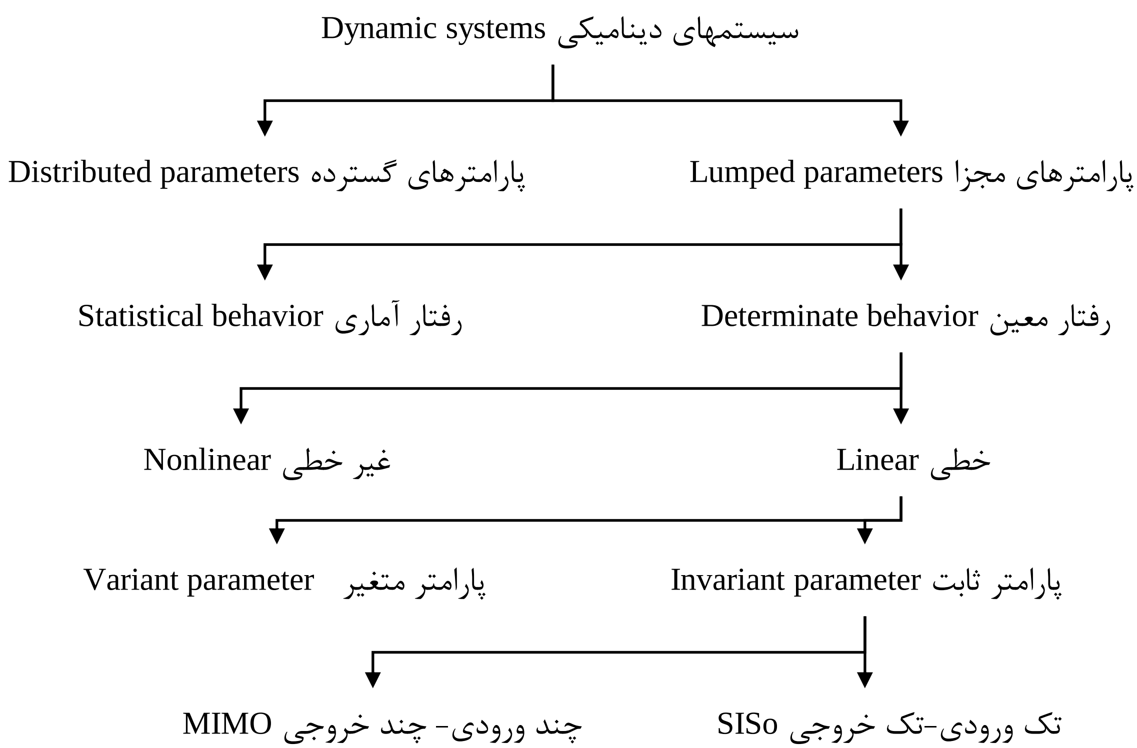




شکل ۸- مدل یک دوم و مدل کامل سیستم تعلیق خودرو

۲-۲- تقسیم بندی سیستمهای دینامیکی

سیستمهای دینامیکی را میتوان از جنبه های مختلف تقسیم بندی نمود. در شکل زیر این تقسیم بندی نشان داده شده است.



شکل ۹- تقسیم بندی سیستم‌های دینامیکی

۲-۳- نحوه نمایش مدل ریاضی سیستم

۲-۱-۱- مقایسه نظریه نوین و نظریه کلاسیک کنترل

در علم کنترل دو روش (نظریه) برای تحلیل سیستمهای کنترلی وجود دارد. نظریه کنترل کلاسیک و نظریه کنترل مدرن. نظریه کنترل کلاسیک که قدمت بیشتری دارد تنها به سیتمهای خطی، مستقل از زمان و تک ورودی-تک خروجی قابل اعمال است. حال آنکه نظریه نوین کنترل را میتوان به سیستمهای چند ورودی-چند خروجی، خطی یا غیر خطی، مستقل از زمان یا متغیر با زمان اعمال کرد. نظریه نوین کنترل یک رهیافت حوزه زمان است، حال آنکه نظریه کلاسیک رهیافت حوزه فرکانس دارد. بنابراین در هر یک از این نظریه ها مدل ریاضی سیستم باید متناسب با آن نمایش داده شود. در نظریه کنترل کلاسیک مدل ریاضی به صورت تابع تبدیل در حوزه فرکانس نمایش داده میشود، حال آنکه در نظریه کنترل مدرن مدل ریاضی سیستم به فرم

فضای حالت در حوزه زمان نمایش داده میشود. نحوه بدست آوردن تابع تبدیل یک سیستم در حوزه فرکانس در بخش مربوط به تبدیل لاپلاس توضیح داده شد. در اینجا نمایش فضای حالت مورد توجه قرار میگیرد.

۲-۱-۲- تعریف مفاهیم اولیه

در ابتدا یک سری مفاهیم اولیه تعریف میشود.

- حالت (State): منظور از حالت یک سیستم دینامیکی، کوچکترین مجموعه متغیرها (موسوم به متغیرهای حالت) است که اگر در $t = t_0$ معلوم باشند، همچنین ورودی سیستم نیز در $t \ge t_0$ مشخص باشد، رفتار سیستم را در $t \ge t_0$ به طور کامل مشخص کنند.
- بردار حالت (State Vector): اگر برای توصیف کامل رفتار یک سیستم n متغیر حالت لازم باشد، این n متغیر حالت را میتوان n درایه بردار X در نظر گرفت، این بردار را بردار حالت می نامند.
- فضای حالت (State space): فضای n بعدی که محورهای مختصات آن محور x_1، محور x_2 و ... محور x_n باشد. هر حالت را میتوان با یک نقطه در فضای حالت مشخص کرد.
- معادلات فضای حالت (Sate space equation): در تحلیل فضای حالت با سه نوع متغیر که در مدل کردن رفتار دینامیکی سیستم دخیل اند سرو کار داریم: متغیرهای ورودی، متغیرهای خروجی و متغیرهای حالت. معادلاتی که رابطه بین این سه دسته متغیر را نشان میدهد، معادلات فضای حالت گفته میشود.

۳-۱-۲-نمایش فضای حالت معادلات دینامیکی

در حالت کلی، سیستم میتواند چند ورودی-چند خروجی باشد. فرض کنید که سیستم

- r ورودی u_1، u_2، ....، u_r
- m خروجی y_1، y_2، ....، y_m
- n متغیر حالت x_1، x_2، ....، x_n

داشته باشد. پس سیستم و خروجیهای سیستم را میتوان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\
\dot{x}_2(t) &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r; t)
\end{aligned}
\quad , \quad
\begin{aligned}
y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\
y_2(t) &= g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\
&\vdots \\
y_m(t) &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_r; t)
\end{aligned}$$

با تعریف بردار های زیر

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ Y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \ U(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}, \ f(x,u,t) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \ g(x,u,t) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}$$

معادلات سیستم در حالت کلی میشود:

$$\dot{X}(t) = f(X, U, t)$$
$$Y(t) = g(X, U, t)$$

با خطی کردن این معادلات حول نقطه کار، معادله حالت و خروجی خطی شده زیر حاصل میشود:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t)$$
$$Y(t) = C(t)X(t) + D(t)U(t)$$

که در آن $A(t)$ ماتریس حالت، $B(t)$ ماتریس ورودی، $C(t)$ ماتریس خروجی و $D(t)$ ماتریس انتقال مستقیم گفته میشود. اگر در توابع f و g زمان t به طور صریح وارد نشود، سیستم خطی مستقل از زمان میشود:

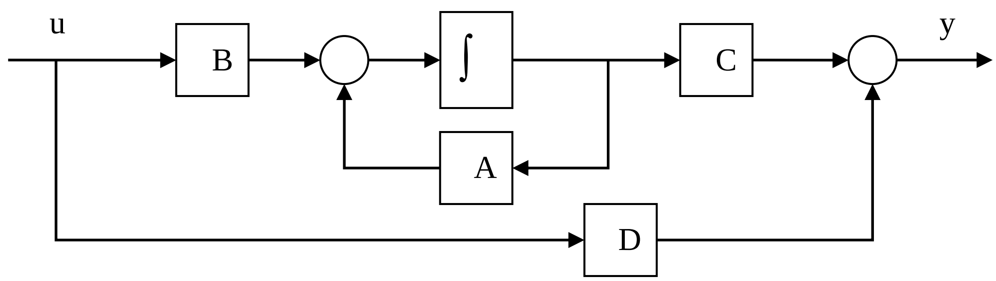
$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$
$$Y(t) = CX(t) + DU(t)$$

ماتریس $A \in R^{n \times m}$ به ورودی و خروجی وابسته نیست و نشان دهنده درون سیستم میباشد.

ماتریس $B \in R^{n \times r}$ رابطه بین متغیرها و ورودی را نشان میدهد.

ماتریس $C \in R^{m \times n}$ رابطه بین متغیرها و خروجی را نشان میدهد.

دیاگرام بلوکی یک سیستم کنترل خطی، توصیف شده با معادلات حالت را طبق شکل ۱۰ میتوان نمایش داد.



شکل ۱۰- دیاگرام بلوکی سیستم در فرم فضای حالت

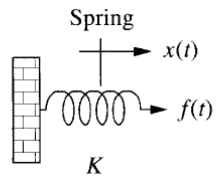
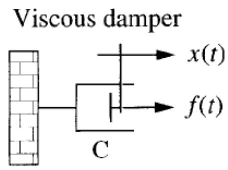
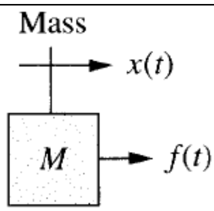
۲-۱-۴- نمایش تابع تبدیل معادلات دینامیکی

نحوه دیگر نمایش یک سیستم، استخراج تابع تبدیل آن میباشد. برای استخراج تابع تبدیل یک سیستم باید پس از بدست آوردن معادلات دینامیکی آن، از معادلات تبدیل لاپلاس گرفته و نسبت خروجی به ورودی را به صورت یک تابع $G(s)$ بدست آوریم. در مثالهای بعدی نحوه انجام این کار آورده میشود.

۲-۴- مدلسازی سیستمهای مکانیکی

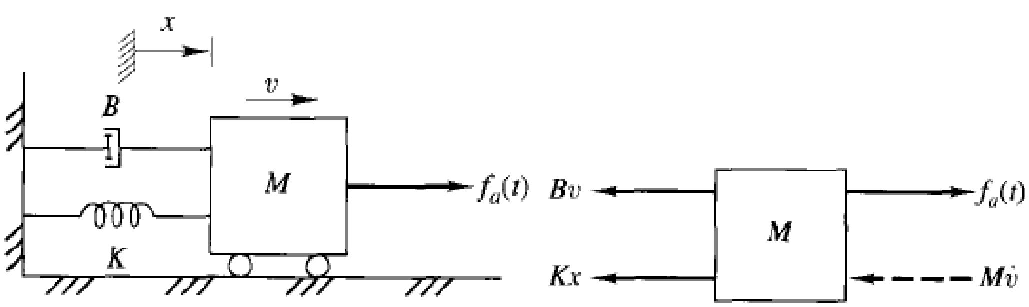
۲-۱-۵- سیستم های مکانیکی با حرکت خطی

المانهای متداول در سیستمهای مکانیکی با حرکت خطی در شکل ۱۱ نشان داده شده است.

	$f(t) = Kx(t)$
	$f(t) = C\dot{x}(t)$
	$f(t) = M\ddot{x}(t)$

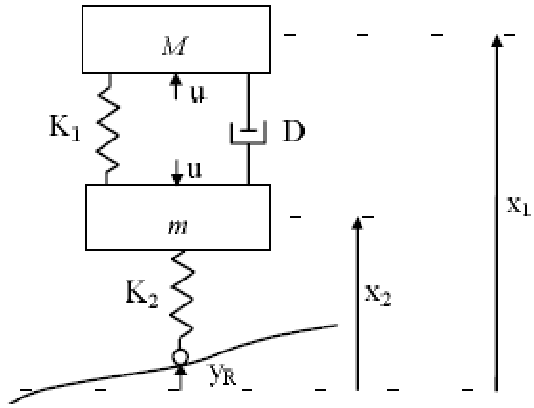
شکل ۱۱- المانهای مکانیکی با حرکت خطی و روابط آنها

مثال ۱- مدل جرم و فنر یک درجه آزادی



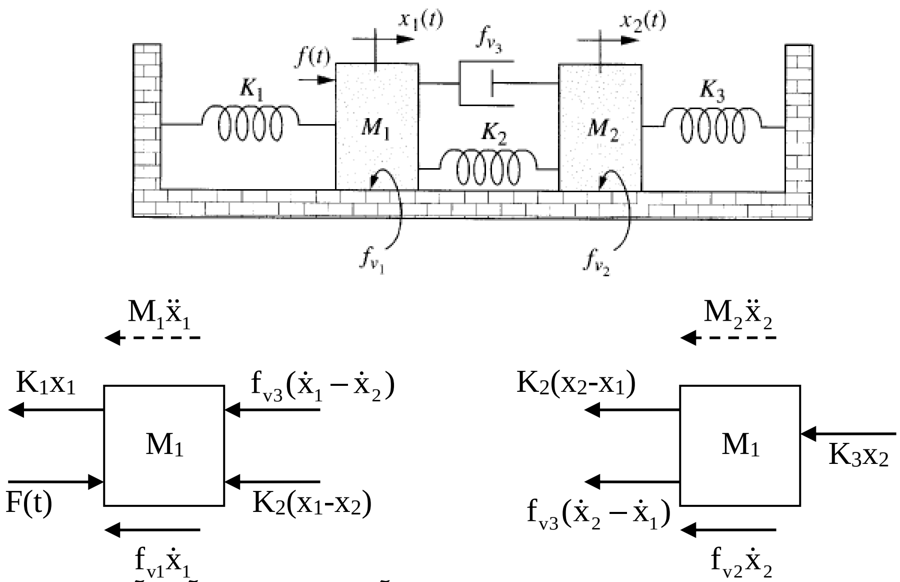
شکل ۱۲- مدل و دیاگرام آزاد سیستم جرم و فنر یک درجه آزادی

مثال ۲- مدل یک چهارم سیستم تعلیق خودرو



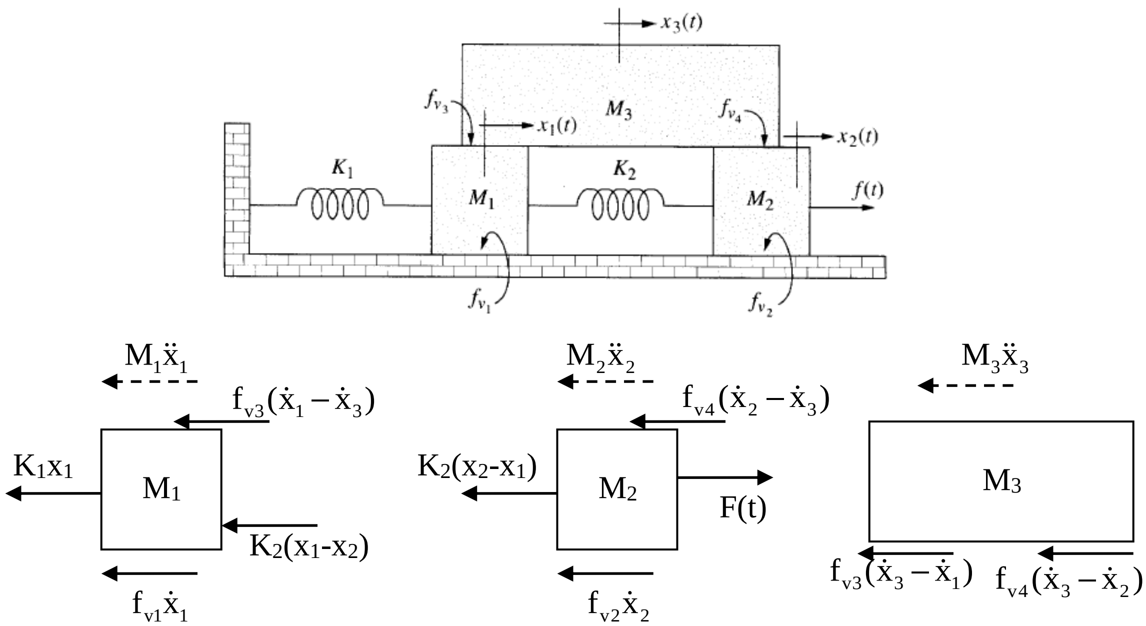
شکل ۱۳- مدل یک چهارم خودرو با سیستم تعلیق فعال

مثال ۳- سیستم جرم و فنر دو درجه آزادی با اصطکاک ویسکوز



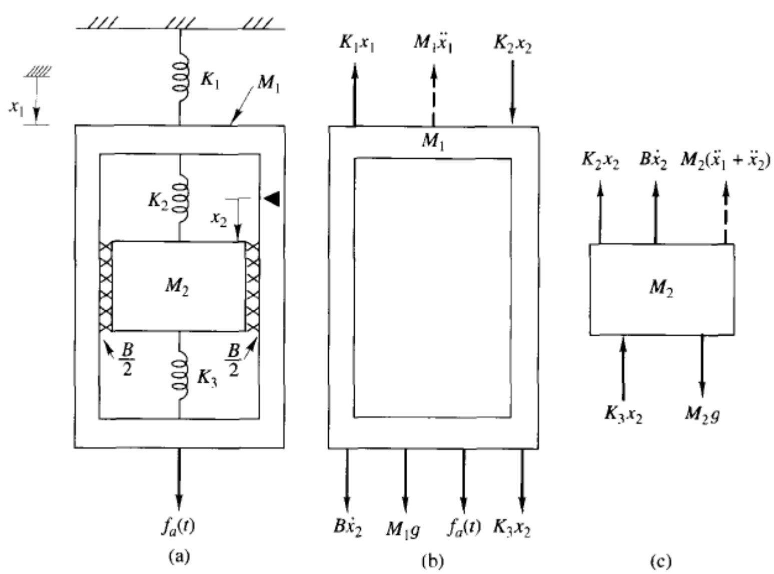
شکل ۱۴- سیستم جرم و فنر دو درجه آزادی و دیاگرام آزاد آن

مثال ۴- سیستم جرم و فنر سه درجه آزادی



شکل ۱۵- سیستم جرم و فنر سه درجه آزادی و دیاگرام آزاد آن

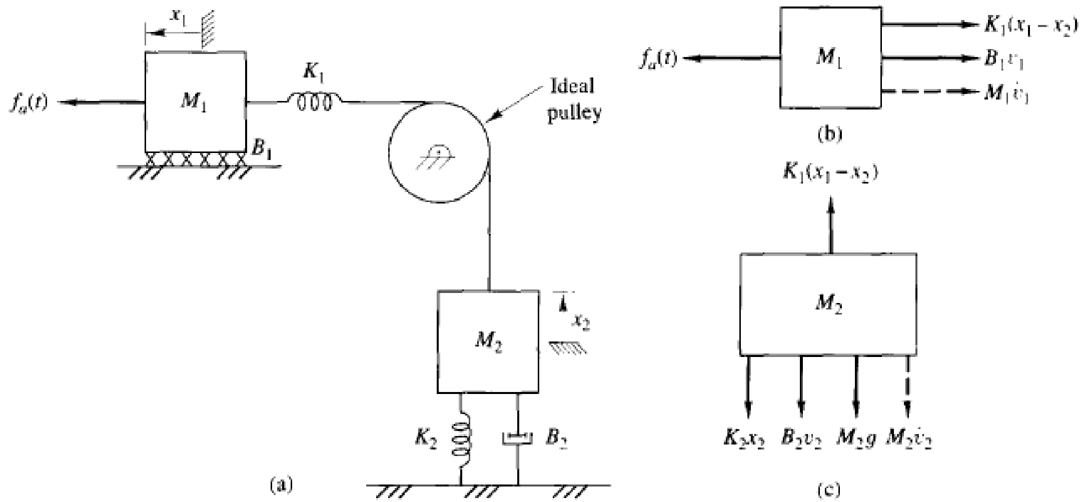
مثال ۵- سیستم جرم و فنر دو درجه آزادی



شکل ۱۶- سیستم جرم و فنر دو درجه آزادی به همراه دیاگرام آزاد آن

$$M_1\ddot{x}_1 + K_1x_1 - B\dot{x}_2 - (K_2+K_3)x_2 = M_1g + f_a(t)$$
$$M_2\ddot{x}_1 + M_2\ddot{x}_2 + B\dot{x}_2 + (K_2+K_3)x_2 = M_2g$$

مثال ۶- سیستم دو درجه آزادی با پولی هرزگرد

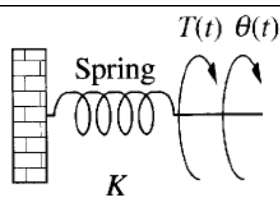
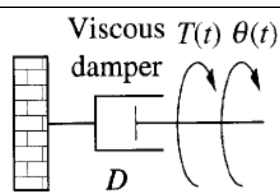
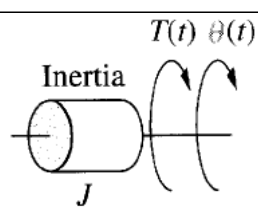


شکل ۱۷- سیستم جرم و فنر با پولی هرزگرد، به همراه دیاگرام آزاد آن

$$M_1\dot{v}_1 + B_1v_1 + K_1(x_1 - x_2) = f_a(t)$$
$$M_2\dot{v}_2 + B_2v_2 + K_2x_2 = K_1(x_1 - x_2)$$

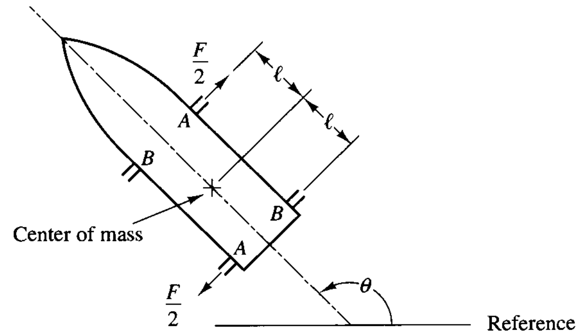
۲-۱-۶- سیستم های مکانیکی با حرکت دورانی

المانهای متداول در سیستمهای مکانیکی با حرکت دورانی در شکل ۱۸ نشان داده شده است.

	$T(t) = K\theta(t)$
	$T(t) = D\dot{\theta}(t)$
	$T(t) = J\ddot{\theta}(t)$

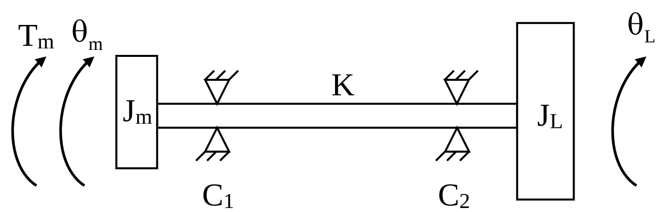
شکل ۱۸- المانهای مکانیکی با حرکت دورانی و روابط آنها

مثال ۱- سیستم دوران ماهواره



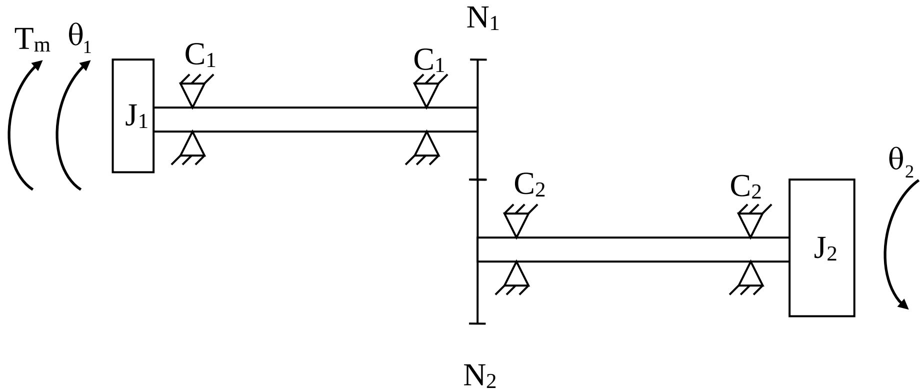
شکل ۱۹- سیستم دوران ماهواره

مثال ۲- سیستم دورانی موتور و بار



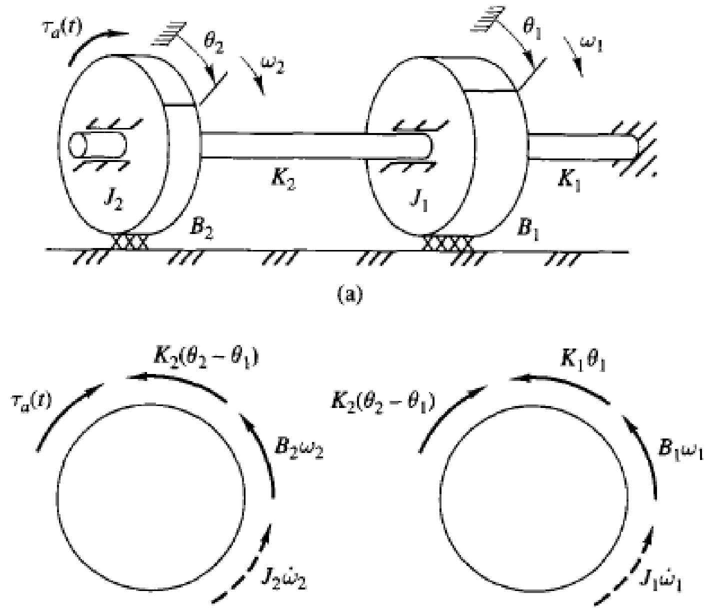
شکل ۲۰- سیستم دورانی موتور و بار

مثال ۲- سیستم انتقال قدرت دورانی



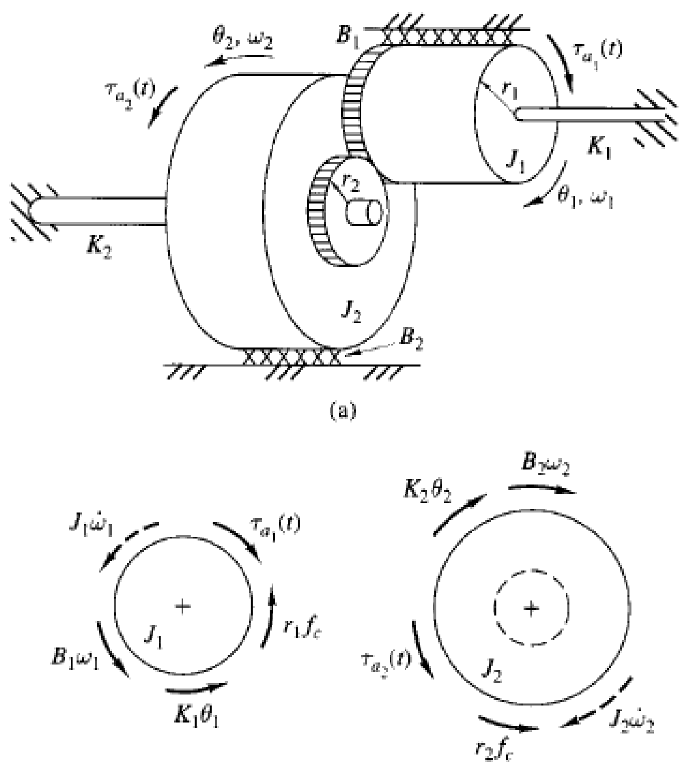
شکل ۲۱- سیستم انتقال قدرت دورانی

مثال ۳- سیستم دورانی دو درجه آزادی



شکل ۲۲- سیستم دورانی دو درجه آزادی و دیاگرام آزاد آن

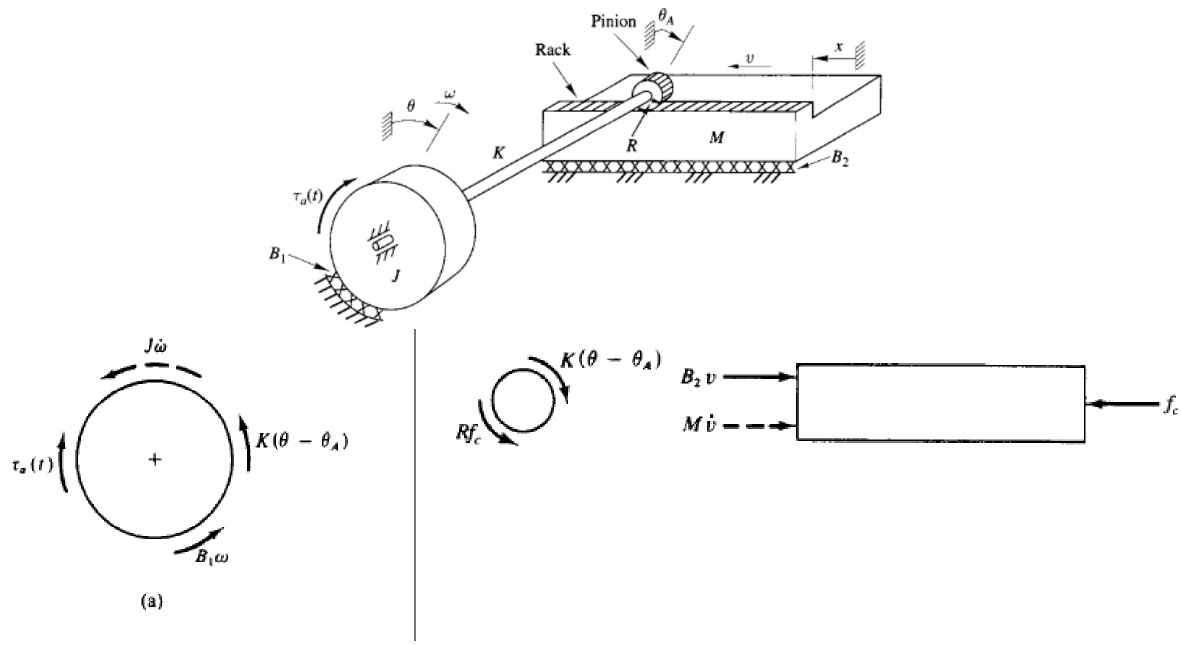
مثال ۴- سیستم دو جرم چرخان چرخدنده دار



شکل ۲۳- سیستم با جرمهای چرخان و دیاگرام آزاد آن

۲-۱-۷- سیستم های مکانیکی با حرکت خطی و دورانی

مثال ۲- سیستم خطی-دورانی با پینیون و چرخدنده شانه ای



شکل ۲۴- سیستم خطی- دورانی با چرخدنده شانه ای به همراه دیاگرام آزاد آن

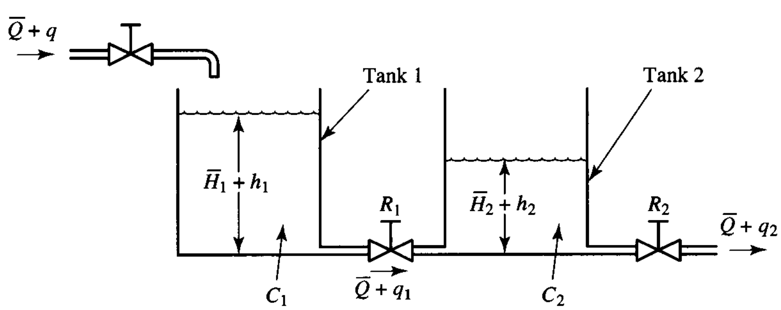
نشان دهید معادلات دینامیکی این سیستم با متغیرهای x و θ به صورت زیر بدست می آید.

$$J\ddot{\theta}+B_1\dot{\theta}+K\theta-\frac{K}{R}x=\tau_a(t)$$

$$M\ddot{x}+B_2\dot{x}+\frac{K}{R^2}x-\frac{K}{R}\theta=0$$

مثال ۲- سیستمهای حرارت و سیالات

مثال ۱- سیستم دو مخزن مرتبط

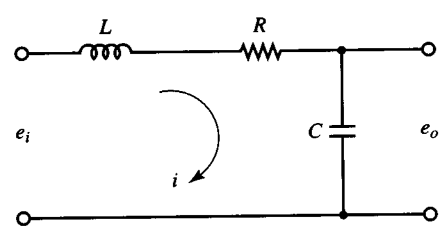


شکل ۲۵- سیستم دو مخزن مرتبط

مثال ۲- مدل حرارتی یک اتاق

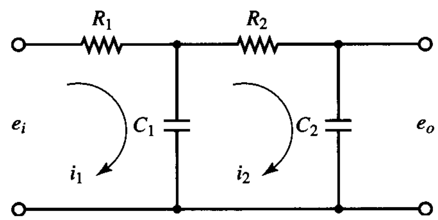
۲-۱-۸- سیستمهای الکتریکی

مثال ۱- مدار RCL



شکل ۲۶- مدار الکتریکی RCL

مثال ۲- مدار RCL



شکل ۲۷- مدار الکتریکی RCL

۲-۱-۹- سیستمهای الکترومکانیکی

موتور DC مغناطیس دائم