دانشگاه سمنان

ریاضی مهندسی پیشرفته

جبر خطی، فضای برداری

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

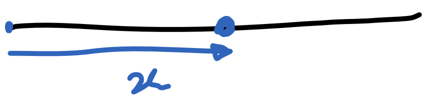
مقدمه:

x کل نقاط روی محور را ایجاد می‌کند، و یک فضای یک بعدی ایجاد می‌کند (R^1)

یک عدد x موقعیت یک نقطه را روی محور نشان می‌دهد

← کل اعداد روی فضای یک‌بعدی را نشان می‌دهد، R^1

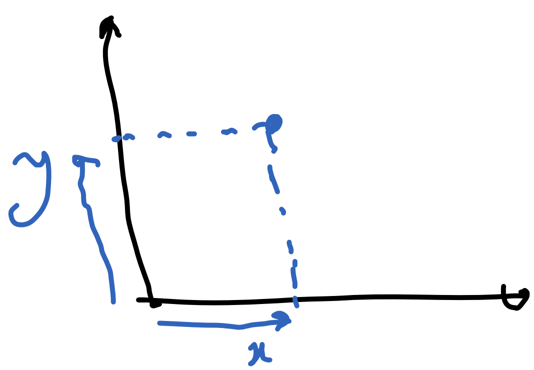
فضای یک بعدی



جفت یا دوتایی (x,y) موقعیت یک نقطه را در صفحه نشان می‌دهد

دوتایی (x,y) کل نقاط روی صفحه را برای ما تعریف می‌کنند

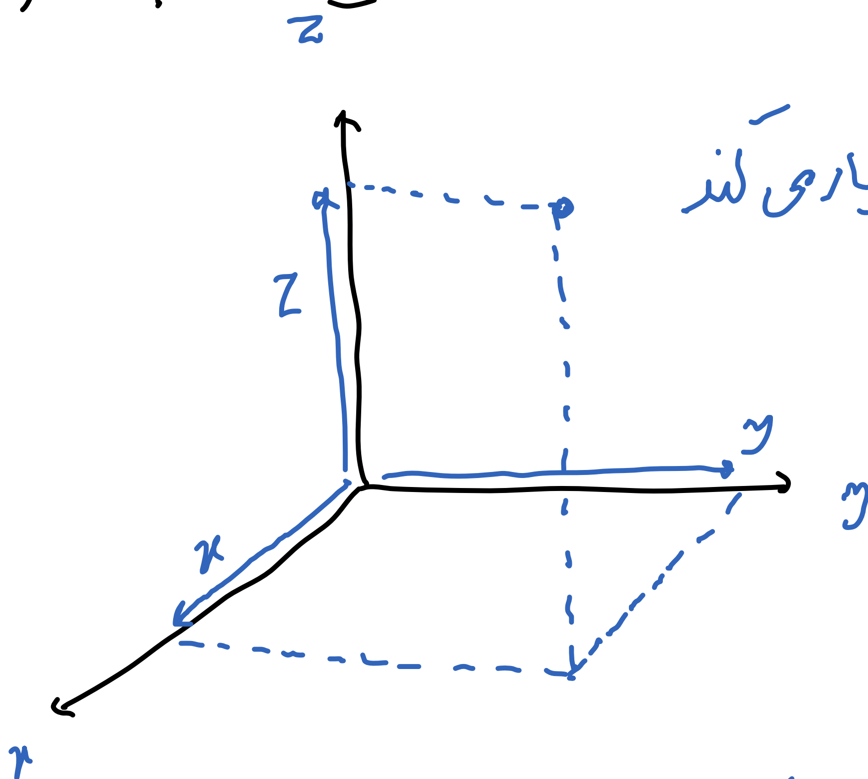
به عبارت دیگر یک فضای 2 بعدی ایجاد می‌کند، R^2



و سه‌تایی (x, y, z) یا (x_1, x_2, x_3) موقعیت یک نقطه را در فضای ۳ بعدی نشان می‌دهد

کل نقاط بگذاری روی یک فضای سه بعدی را برای ما ایجاد می‌کند

R^3 فضای سه بعدی



حتی چهارتایی (x_1, x_2, x_3, x_4)

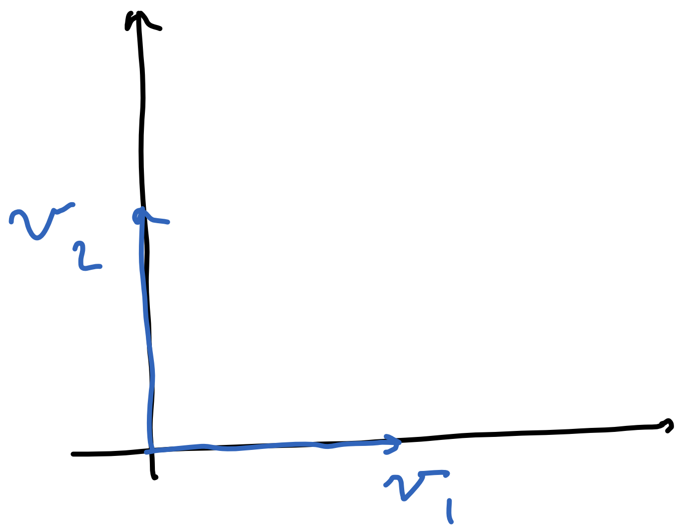
R^4 فضای چهار بعدی

⋮

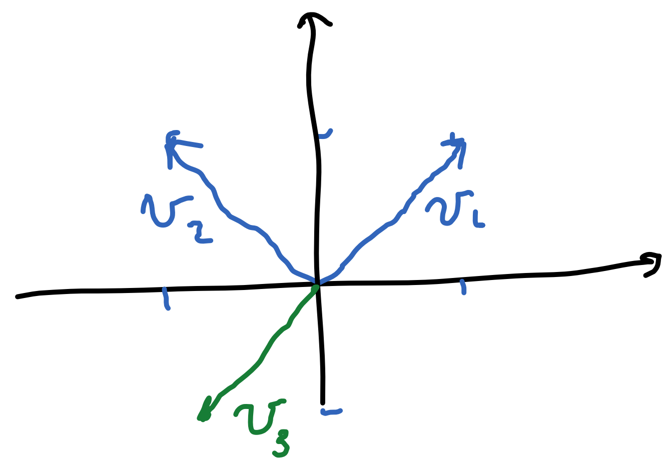
n تایی $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

فضای R^n را برای ما ایجاد می‌کند.

فرض کنید بردارهای $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ در R^2 خنثی
شده اند



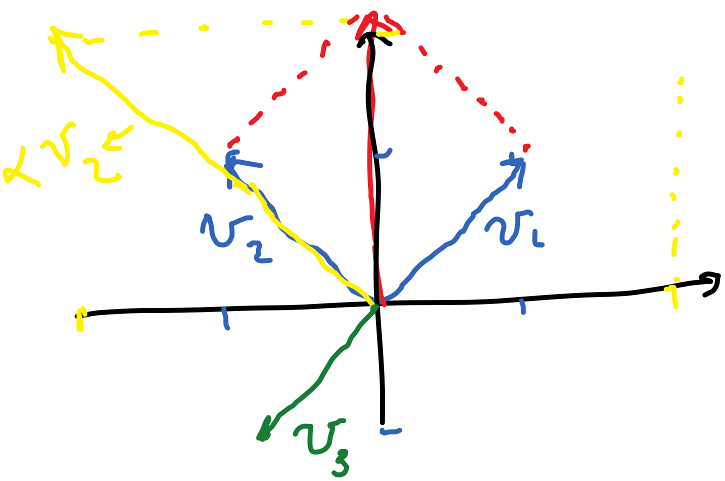
$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$



$$v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جمع دو بردار

$$v_1 + v_2$$



$$v_4 = v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

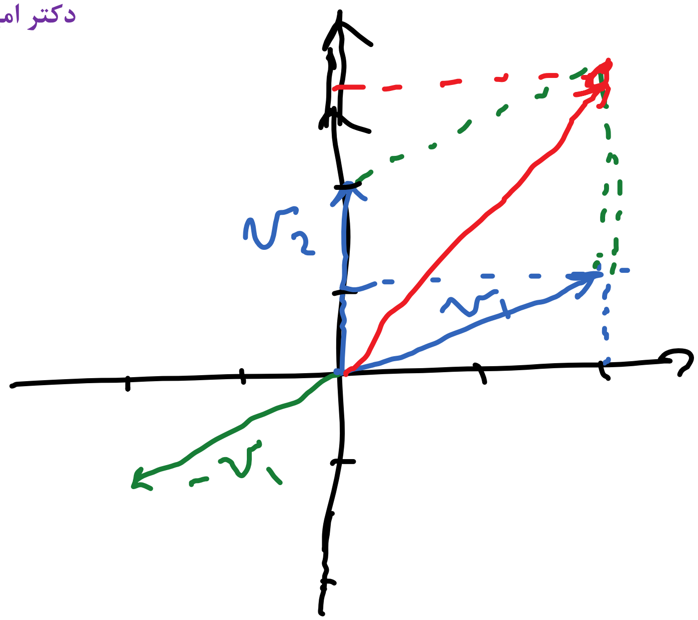
$$\alpha = 2$$

$$\alpha v_2 = 2 v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha v_2 \in R^2$$

$$v_1 \in R^2, \quad v_2 \in R^2$$

$$v_1 + v_2 \in R^2$$



$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$-v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 - v_1 = 0$$

$$v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

فضای برداری Vector space

یک فضای برداری مجموعه ای از عناصر است که بین آنها رابطه جمع برداری و ضرب یک اسکالر در بردار برقرار است.

به عبارت دیگر جمع دو عضو آن، در آن مجموعه باقی بماند

حاصل ضرب یک عدد اسکالر در یک عضو، 〃 〃 〃 〃

R^2 یک فضای برداری است.

تعریف . مجموعه V را فضای برداری روی میدان اسکالر S گویند اگر

- مجموع هر دو عضو V ، عضو V باشد

$v_1 \in V, v_2 \in V \Rightarrow v_1 + v_2 \in V$

- ضرب هر اسکالر از S $(\alpha \in S)$ در عضو v ، عضو V باشد

$\alpha \in S$ و $v_1 \in V \Rightarrow \alpha v_1 \in V$

. اگر $u, v, w \in V$ و $\alpha, \beta \in S$ باید ۱۰ شرط زیر برقرار باشد:

۱- $u + v \in R$

مجموعه V یک فضای برداری روی میدان اسکالری است

۱- $u+v \in V$ *

۲- $u+v = v+u$

۳- $(u+v)+w = u+(v+w)$

۴- V شامل عنصر صفر باشد $\quad u+0 = 0+u = u$ *

۵- V شامل عنصر قرینه باشد $\quad u+(-u)=0 \;،\; -u \in V$

۶- $\alpha u \in V$ *

۷- $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

۸- $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

۹- $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

۱۰- $1 \times u = u$

مثال: مجموعه V متشکل از زوجهای مرتب (x, y) که شامل تمام نقاط صفحه در فضای R^2 می‌باشد، 10 شرط را دارد و می‌توان نتیجه گرفت که V یک فضای برداری است

مثال: $Q = \{(x, y, z) : z = 1\}$ آیا یک فضای برداری است. فضای برداری نیست

این مجموعه دارای بردار (عضو) صفر نیست

$v_0 = (0, 0, 1)$ و $v_1 = (a, b, 1)$

$v_0 + v_1 = (a, b, 2)$

$(0, 1, 1)$

$(1, 1, 1)$

$(0, 0, 1)$

$(-1, -1, 1)$

$$Q = \{(x, y, z) : z = 0\}$$

$(x, y, 0)$

$(1, 1, 0)$

$(-1, -1, 0)$

$\vdots$

$$v_1 = (a_1, b_1, 0) \in Q$$

$$v_2 = (a_2, b_2, 0) \in Q$$

$$v_1 + v_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, 0) \in Q$$

$$\alpha v_1 = (\alpha a_1, \alpha b_1, 0) \in Q$$

عضو صفر $(0, 0, 0) \in Q$

Q یک فضای برداری است.

مثال ۹-۱: مجموعهٔ معادلات دیفرانسیل یک فضای برداری است.

$$\dot{x} + \dot{y} = 0 \qquad \Rightarrow 3\dot{x} + 4\dot{y} + 3 = 0$$

$$2\dot{x} + 3\dot{y} + 3 = 0$$

مثال: مجموعه چندجمله‌ای های مرتبه n یک فضای برداری است.

جمع دو چندجمله‌ای مرتبه n یک چندجمله‌ای مرتبه n خواهد بود

حاصلضرب یک عدد اسکالر در یک چندجمله‌ای، باز یک چندجمله‌ای مرتبه n خواهد شد.

sub space زیرفضا

یک زیرفضا زیرمجموعه‌ای از یک فضای برداری است که خود یک فضای برداری تشکیل می‌دهد

اگر V یک فضای برداری باشد آنگاه W زیرفضایی از V است اگر

- $0 \in W$ — صفر
- $u, v \in W \Rightarrow u+v \in W$
- $\alpha \in R,\ u \in W \Rightarrow \alpha u \in W$

مثال: $V = R^2$ شامل تمام نقاط حقیقی در صفحه است.

$V = \{(x, y)\}$ ، $W_1 = \{(x, 0)\}$

$u_1, u_2 \in W_1$, $u_1 = (a_1, 0)$, $u_2 = (a_2, 0)$

$W_2 = \{(0, x)\}$

$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2, 0) \in W_1$

$W_3 = \{(x, x)\}$

$(0, 0) \in W_1$

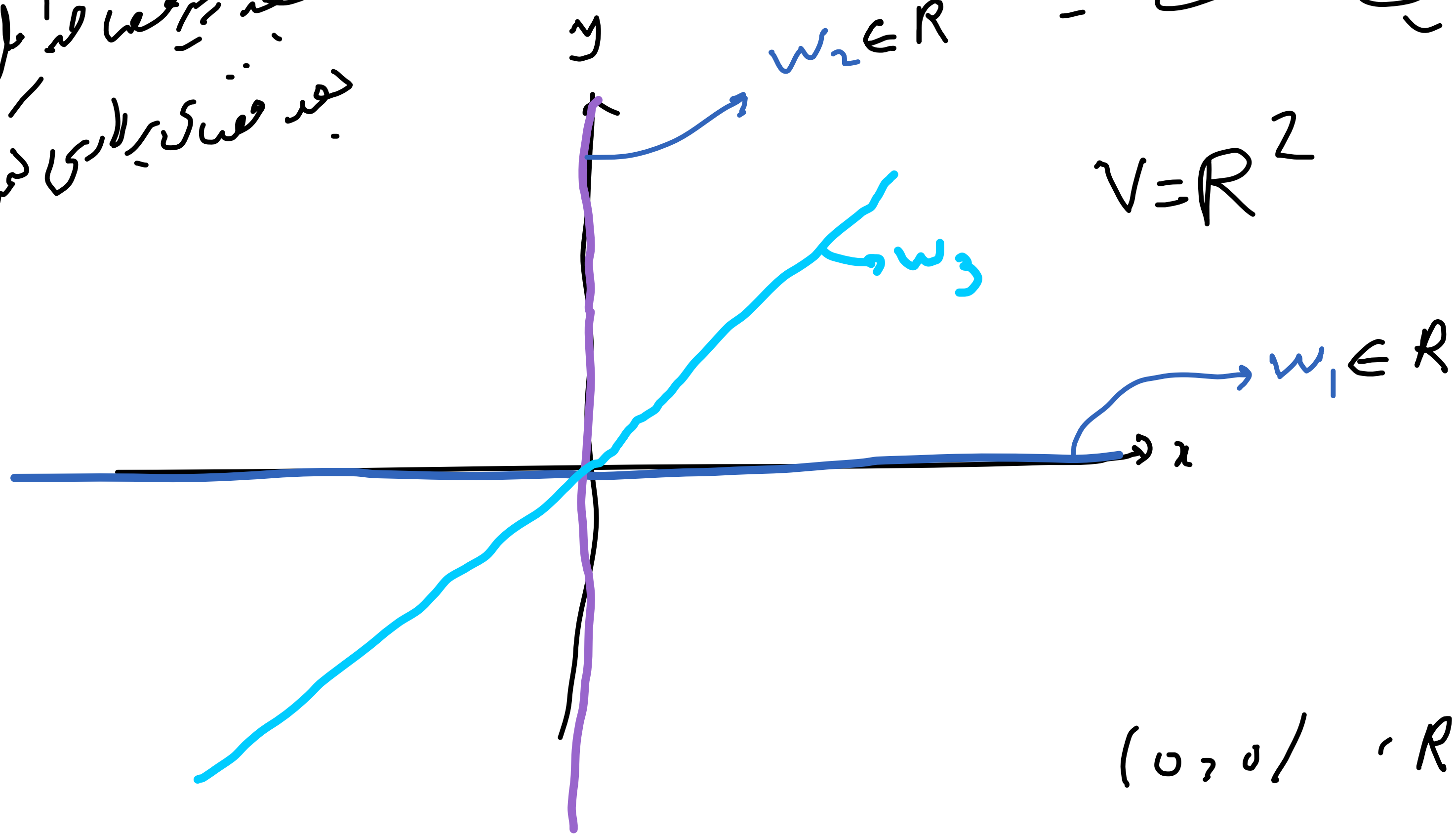
$\alpha u \in W_1$

W_1 و W_2 و W_3 زیرفضایی از V هستند.

نمایش هندسی زیرفضا

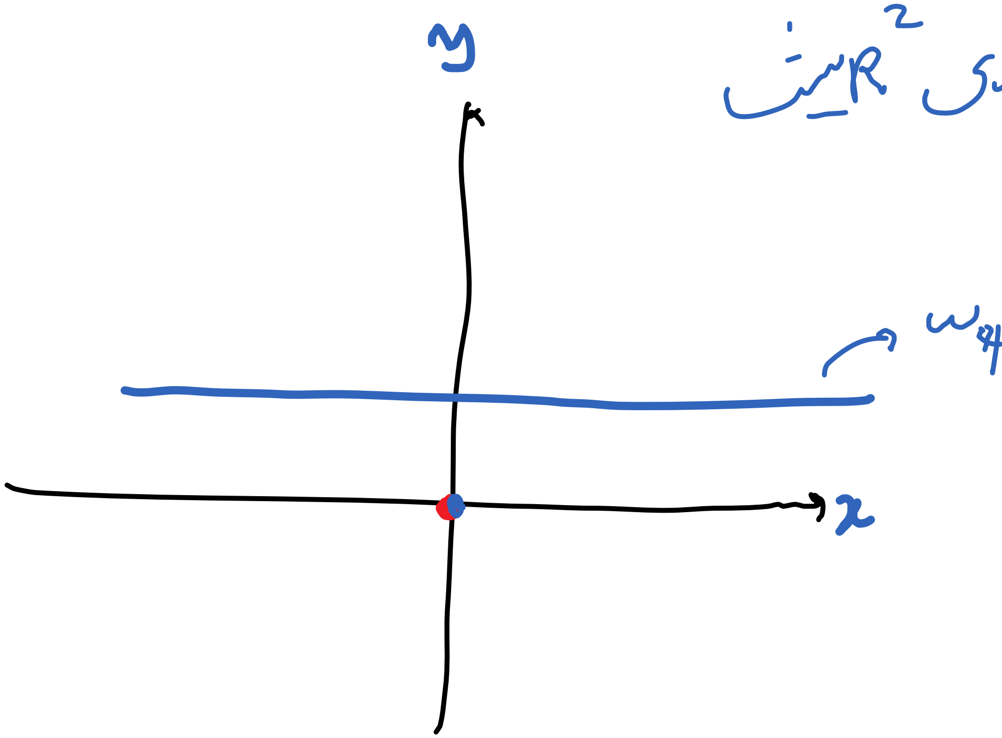
بعد زیرفضاها حداقل یک واحد از بعد فضای برداری کمتر است

$V=R^2$



حتی R^2 ، $(0,0)$

$W_4 = \{(x , 1)\}$ زیرفضای R^2 نیست



W_4 عضو صفر را شامل نمی‌شود

پس یک زیرفضای R^2 نیست

مثال: V فضای برداری تمام ماتریس های حقیقی 2×2

$$V = R^{2\times 2}$$

$$W = \left\{ A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} ,\ a_{12}, a_{21} \in R \right\}$$

W یک زیرفضای V می باشد

$$a_{12} = a_{21} = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$$

$$A_1 + A_2 \in W, \qquad \alpha A_1 \in W$$

مثال:

$$W = \left\{ A : A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} , |A| = 0 \right\}$$

آیا W زیرفضای V است.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A_1) = 0 , \quad A_1 \in W$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A_2) = 0 \rightarrow A_2 \in W$$

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A_1 + A_2) = 1 \rightarrow A_1 + A_2 \notin W$$

پس W زیرفضای V نیست.

زیرفضای مجموعه فراگیر

V فضایی است که توسط مجموعه W تولید.

$v = c_1 v_1 + \cdots c_n v_n$

مجموعه $W = \{v_1, \dots, v_n\}$ زیرفضای برداری V را فراگیر گویند، اگر
هر بردار دلخواه از مجموعه V را بتوان به صورت ترکیب خطی از اعضای W نوشت

مثال $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ زیرفضای برداری فراگیر از R^2 است؟

$W = \{v_1, v_2\}$

$\forall v \in R^2 \Rightarrow v = c_1 v_1 + c_2 v_2$

$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

به ازای هر x و y دلخواه، می‌توان c_1 و c_2 را به دست آورد.

$$\Rightarrow \quad x = c_1 + c_2, \quad y = c_2 \quad \Rightarrow \begin{cases} c_1 = x - y \\ c_2 = y \end{cases}$$

$v = c_1 v_1 + c_2 v_2$ ، W کل فضای $\mathbb{R}^2$ را ایجاد می‌کند، $\mathbb{R}^2$ را پوشش می‌دهد، $\mathbb{R}^2$ را span می‌کند.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 = x \\ c_1 + 2c_2 = y \end{cases} \Rightarrow x = y$$

اگر $x = y$ باشد این معادله جواب دارد

یعنی نمی‌توان هر بردار دلخواه از $\mathbb{R}^2$ را به صورت ترکیب خطی از عناصر W نوشت.

مجموعه ای که W برای ما ایجاد می کند:

$$v = \alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ \alpha + 2\beta \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

مجموعه W فضای برداری یک خط را ایجاد می کند. $y = x$

مجموعه W نقاط روی یک خط را می کند.

مثال ۱-۱۵:

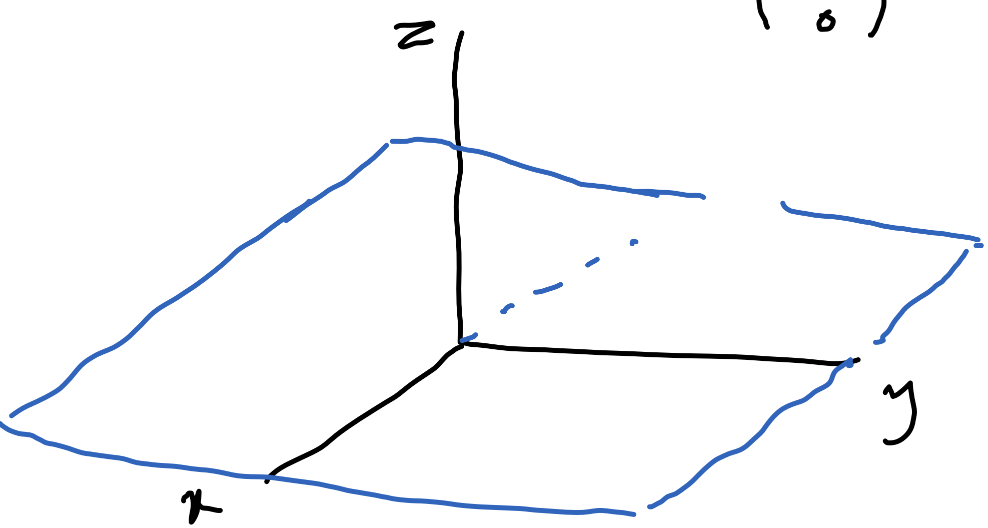
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$W_1 = \{v_1, v_2\}$ چه فضایی را پوشش می‌دهد.

$$x = a v_1 + b v_2 = \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

یا صفحه xy را می‌تند (پوشش می‌دهد) فضای برداری

فضای R^2 را پوشش می‌دهد.



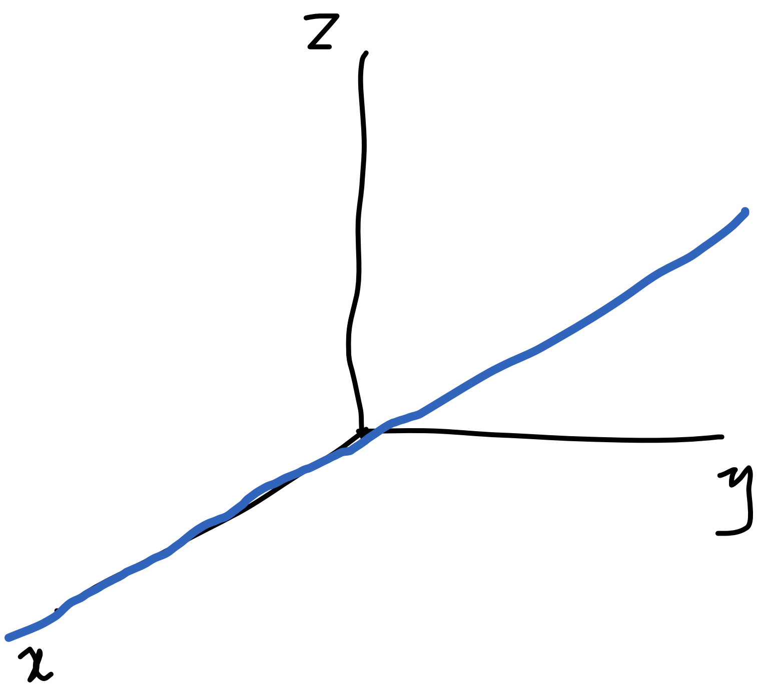
$$x = a v_1 + b v_3 = \begin{pmatrix} a-2b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W_2 = \{ v_1 , v_3 \}$$

W_2 نقاط روی یک خط را پوشش می‌دهد

〃 〃 محور x را 〃 〃

فضای R^1 را پوشش می‌دهد



استقلال خطی، وابستگی خطی

linear independent
" dependent

مجموعه $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ از فضای برداری V را وابسته خطی گوئیم اگر برای رابطه زیر

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$$

c_i غیر صفری یافت شود.

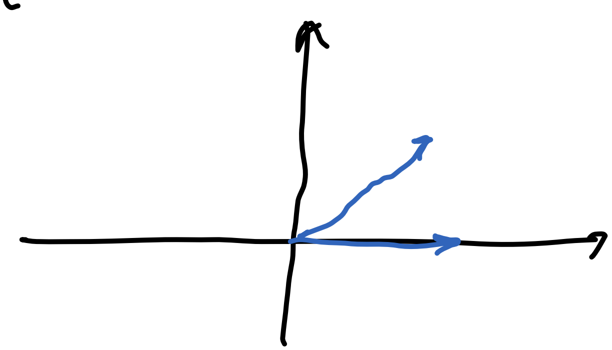
در غیر این صورت اگر همه $c_i = 0$ ها شود، مجموعه S را مستقل خطی می گوئیم.

مثال: $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0 \Rightarrow c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

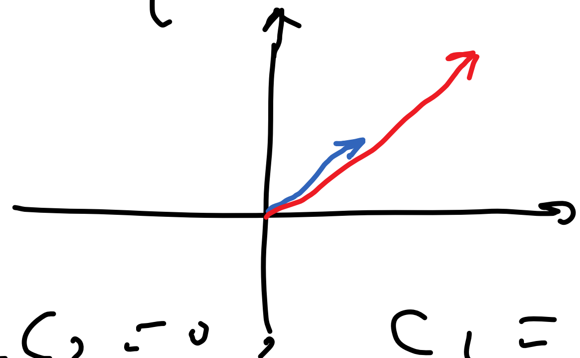
$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \longrightarrow c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$

پس مجموعه S مستقل خطی است.



مثال: $S = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} , \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \right\}$

$$c_1 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$



بردارها موازی هستند.

$$c_1 + 2c_2 = 0 \longrightarrow c_1 + 2c_2 = 0 \;,\; c_1 = -2c_2$$

$$c_1 + 2c_2 = 0$$

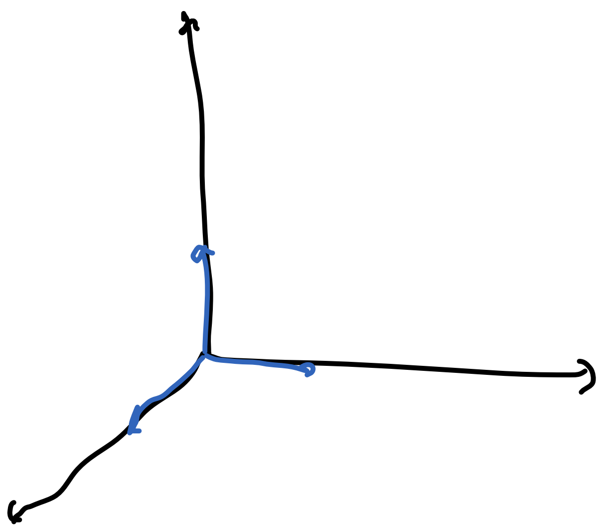
$$\Rightarrow \quad c_2 = 1, \quad c_1 = -2$$

پس جواب غیرصفر برای c_i ها پیدا کردیم، پس مجموعه S وابسته خطی است و مستقل نیست.

اگر دو عضو یک مجموعه موازی هم باشند، آن مجموعه مستقل نیست.

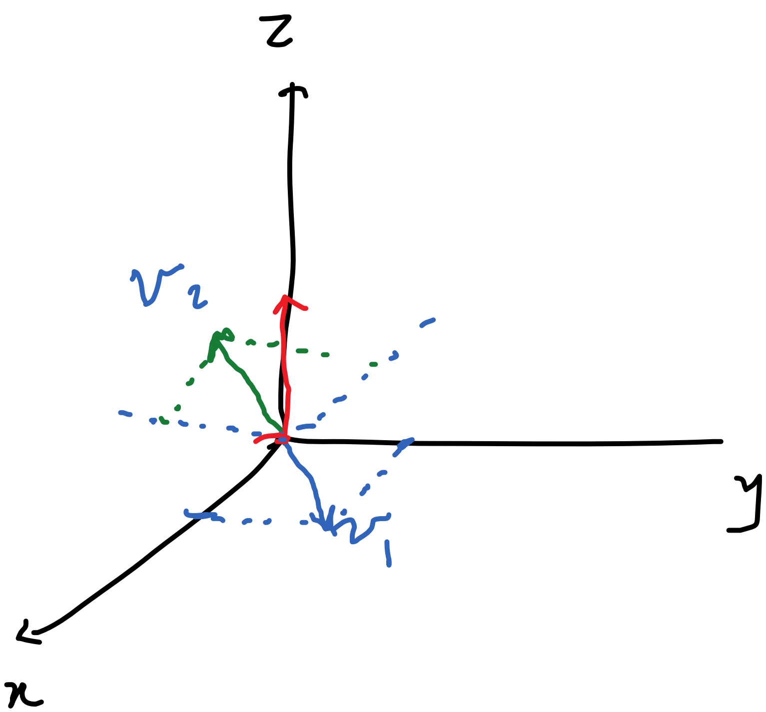
اگر در مجموعه ای هیچ دو عضو موازی نداشته باشیم، آن مجموعه مستقل است

مثال: $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$



S_2

$$S_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3} \right\}$$



v_1 و v_2 موازی هستند.

پس مجموعه مستقل نیست.

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2$$

جواب غیر صفر دارد.

مثال: فضای برداری V از ماتریس‌های 2×2 را در نظر بگیرید که

$$W = \left\{ A : A = \begin{pmatrix} 0 & a_{21} \\ a_{12} & 0 \end{pmatrix} \text{ و } a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\}$$

W یک زیرفضای V باشد. ~~اگر~~
اگر ماتریس‌های دو بردار B_1 و B_2 به
صورت ترتیب باشند،
نشان دهید مجموعه W_1 وابسته خطی است.

$$W_1 = \left\{ \overset{B_1}{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} , \overset{B_2}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

$$C_1 B_1 + C_2 B_2 = 0 \Rightarrow C_1 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \boxed{2C_1 + C_2} \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ 2C_1 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0 \end{cases}$$

$X \in R^n$

$X = (x_1, \dots, x_n)$

As usual, a collection of objects will be called a **set**. A member of the collection is also called an **element** of the set. It is useful in practice to use short symbols to denote certain sets. For instance we denote by **R** the set of all numbers. To say that "x is a number" or that "x is an element of **R**" amounts to the same thing. The set of n-tuples of numbers will be denoted by $\mathbf{R}^n$. Thus "X is an element of $\mathbf{R}^n$" and "X is an n-tuple" mean the same thing. Instead of saying that u is an element of a set S, we shall also frequently say that u **lies in** S and we write $u \in S$. If S and S' are two sets, and if every element of S' is an element of S, then we say that S' is a **subset** of S. Thus the set of rational numbers is a subset of the set of (real) numbers. To say that S is a subset of S' is to say that S is part of S'. To denote the fact that S is a subset of S', we write $S \subset S'$.

If S_1, S_2 are sets, then the **intersection** of S_1 and S_2, denoted by $S_1 \cap S_2$, is the set of elements which lie in both S_1 and S_2. The **union** of S_1 and S_2, denoted by $S_1 \cup S_2$, is the set of elements which lie in S_1 or S_2.

Example 7. Let V be a vector space and let U, W be subspaces. We denote by $U \cap W$ the **intersection** of U and W, i.e. the set of elements which lie both in U and W. Then $U \cap W$ is a subspace. For instance, if U, W are two planes in 3-space passing through the origin, then in general, their intersection will be a straight line passing through the origin, as shown in Fig. 1.

$V = R^3$

$U \subset V$

$W \subset V$

$(U \cap W) \subset V$

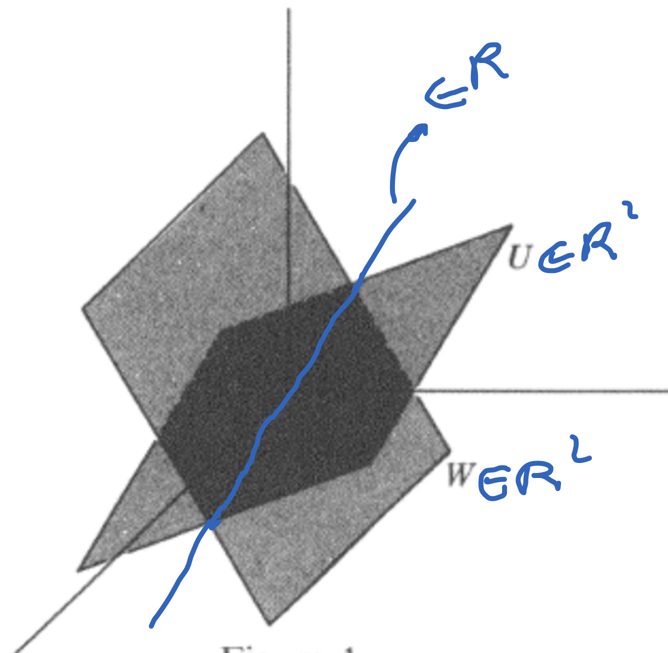
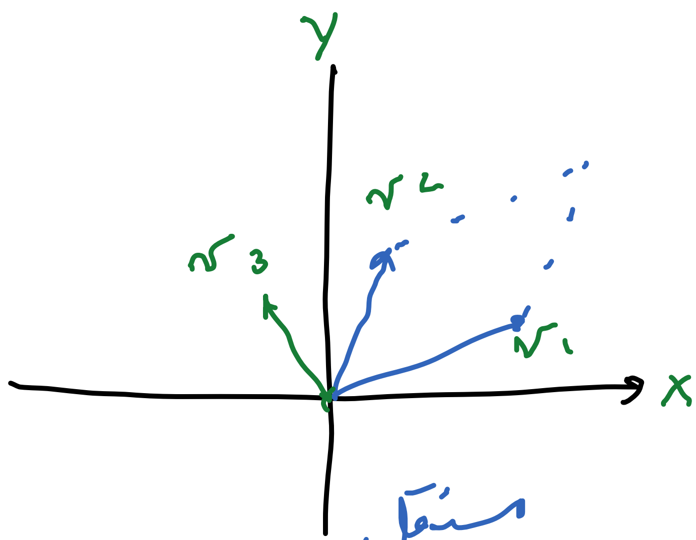


Figure 1

مفهوم هندسی وابستگی خطی



مستقل

وابسته

(R^3) اگر سه بردار یک متوازی الاضلاع حجمی تشکیل دهند، مستقل هستند.

$R^3 \longrightarrow R^2$ اگر یکی از این بردارها در صفحه گذرنده از دو بردار دیگر قرار بگیرد

تعداد روابط وابستگی بین یک مجموعه از بردارها را نقص ماتریس می‌گویند و با q نشان می‌دهند

$\text{Rank}(A) \to$ تعداد سطرهای مستقل A

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&1\end{bmatrix},\ q=0$$

$\text{Rank}(A)=3$

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$$

$q=2$

$\text{Rank}(A)=1$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&2\end{bmatrix},\ \to q=1$$

$\text{Rank}(A)=2$

$$\boxed{\text{Rank}(A)+q=n}$$

برای یک ماتریس $n\times n$

Basis of vector space پایه فضای برداری

پایه یک فضای برداری مجموعه‌ای از بردارها است که دو ویژگی زیر را داشته باشد

۱- مستقل خطی باشند.

۲- فضا را تولید کنند.

مثلاً فرض کنید $W = \{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای از فضای برداری V باشد:

۱- مستقل بودن $v_1, \dots, v_n$ ← $c_i = 0$ ها $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$

۲- مجموعه W کل فضای V را پوشش دهد یا به عبارتی آن را تولید کند.
$\forall v \in V \Rightarrow v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$

مثال: $S = \left\{ \underset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}} \right\}$ آیا یک پایه برای فضای برداری R^3 می‌باشد

خیر، چون v_2 و v_3 مستقل نیستند.

- فراگیر نیست،
- مستقل نیست

مثال: $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ یک پایه برای R^2 نمی‌باشد.

۱- شرط فراگیر بودن را دارد. با S می‌توان کل R^2 را ایجاد کرد.

۲- شرط مستقل بودن برقرار نیست، چون بردار v_3 اضافی است

$S=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ یک پایه برای فضای برداری R^2 می‌باشد:

ساخت‌پذیر بودن

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}x=c_1\\y=c_2\end{cases}$$

مستقل هم هستند.

مثال: نشان دهید مجموعه
$$S=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$
پایه‌ای برای فضای برداری تمام ماتریسهای 2×2 است.

S is a basis of $R^{2\times 2}$

- استقلال خطی

$$c_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

✓

$$\Rightarrow c_1=c_2=c_3=c_4=0$$

- فراگیر بودن ✓

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{aligned}c_1&=a\\c_2&=b\\c_3&=c\\c_4&=d\end{aligned}$$

مثال: مجموعه $S=\{v_1, v_2, \dots, v_5\}$ در فضای R^4 به صورت زیر داده شده است. آیا این مجموعه یک پایه برای فضای برداری R^4 است؟ ← مستقل نیستند و پایه نمی‌باشند

کدام بردارها از مجموعه S می‌توانند پایه برای R^4 باشند.

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\1\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}-3\\0\\-4\\3\end{bmatrix},\quad v_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\-1\end{bmatrix},\quad v_4=\begin{bmatrix}-3\\3\\-4\\6\end{bmatrix},\quad v_5=\begin{bmatrix}9\\3\\7\\-6\end{bmatrix}$$

بردارهایی که مستقل هستند می‌توانند پایه برای R^4 باشند.

درایه‌ها با انجام عملیات بالا مثلثی (روش گوس پیشرو) ← با انجام عملیات سطری

(-2)

$2\times$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & -9 & 7 \\ 1 & 3 & -1 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

سطر دوم + $(-2)\times$ (سطر اول)

$\rightarrow \text{Rank}(A) = 2$

$\frac{5}{3}$

$\left(\frac{10}{6}\right)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & +6 & -3 & 9 & -15 \\ 0 & -10 & 5 & -15 & 25 \\ 0 & 6 & -3 & 9 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & +6 & -3 & 9 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای v_1 و v_2 می‌توانند پایه‌ای برای R^4 باشند. بردارهای v_3 و v_4 و v_5 به v_1 و v_2 وابسته هستند.

تولید
مستقل

If elements $v_1, \ldots, v_n$ of V generate V and in addition are linearly independent, then $\{v_1, \ldots, v_n\}$ is called a **basis** of V. We shall also say that the elements $v_1, \ldots, v_n$ **constitute** or **form** a basis of V.

تولید

Theorem 5.3. *Let $\{v_1, \ldots, v_n\}$ be a set of generators of a vector space V. Let $\{v_1, \ldots, v_r\}$ be a maximal subset of linearly independent elements. Then $\{v_1, \ldots, v_r\}$ is a basis of V.*

بزرگترین زیرمجموعه‌ی از المانهای مستقل خطی ؛ پایه.

Theorem 5.4. *Let V be a vector space, and $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a maximal set of linearly independent elements of V. Then $\{v_1, \ldots, v_n\}$ is a basis of V.*

Theorem 5.5. *Let V be a vector space of dimension n, and let $v_1, \dots, v_n$ be linearly independent elements of V. Then $v_1, \dots, v_n$ constitute a basis of V.*

مستقل خطی باشند $v_1, \dots, v_n$ ، $v \in R^n$

پایه برای R^n هستند. دیگر نیازی به چک کردن شرط و اسپن بودن نیست در اینجا

پایه یک فضای برداری یکتا نیست،

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \longrightarrow R^2$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \longrightarrow R^2$$

قضیه 1-3: اگر $S=\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه برای فضای برداری V باشد.

هر مجموعه ای که بیش از n بردار داشته باشد وابسته خطی است و پایه ای بر V محسوب نمی شود.

(۱-۹)

قضیه بعد. اگر V یک فضای برداری دارای پایه‌ای با n بردار باشد.

- هر پایه V دارای n عضو است.
- هر مجموعه مستقل خطی از n بردار یک پایه است.
- هر مجموعه بیش از n بردار وابسته خطی است.

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

با شرط مستقل بودن، W هم پایه‌ای برای V است.

$$S = \{v_1, \dots, \dots, v_{n+1}\}$$

حتما وابسته هستند و S پایه‌ای برای V نیست.

قضیه ۱-۱۰، اگر V یک فضای برداری n بعدی باشد هر زیرفضای آن بعدی کمتر از n دارد.

زیرفضاهای R^2 ← R^1

زیرفضاهای R^3 ← R^2 و R^1

زیرفضاهای R^4 ← R^3 و R^2 ، R^1

فضای حاصل‌ضرب داخلی

حاصل‌ضرب داخلی در فضای برداری V تابعی است که حاصل آن عددی حقیقی است
و برای هر دو بردار u و v از V، آن را با $\langle u,v\rangle$ نشان می‌دهیم
و باید شرایط زیر را برآورده کند.

1. $\langle u,u\rangle = 0 \quad \text{if } u=0$
2. $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$
3. $\langle \alpha u,v\rangle = \alpha \langle u,v\rangle$
4. $\langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$

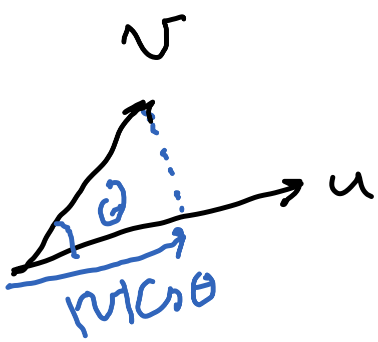
ضرب داخلی متداول که شنیده‌اید اینطور می‌شود.

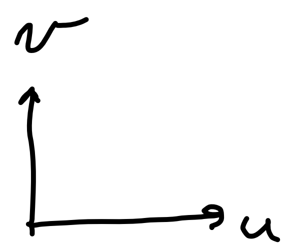
$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos(u, v)$$

$$\langle u, v \rangle = u \cdot v = |u| \, |v| \cos\theta = |u| \left(|v| \cos\theta \right)$$





$$u \cdot v = 0$$

u و v عمود باشند.

$$\langle \alpha u, v \rangle = \alpha u \cdot v = \alpha \langle u, v \rangle$$

تعریف نرم یک بردار

می‌توان از حاصلضرب داخلی برای تعریف طول یک بردار استفاده کرد

$$\langle x , x \rangle = \|x\|^2 \Rightarrow \|x\| = \langle x , x \rangle^{1/2}$$

$$x \cdot x = |x||x| \cos 0 = \|x\|^2$$

به این نرم اصطلاحاً هم نرم اقلیدسی گفته می‌شود.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} , \quad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\Rightarrow \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

هر تعریف از نرم باید شرایط زیر را داشته باشد:

1- $\|x\| = 0$ اگر $x = 0$

2- $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

3- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y , x+y \rangle = (x+y)\cdot(x+y)$$

$$= x\cdot x + 2x\cdot y + y\cdot y = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x\cdot y$$

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \Rightarrow \|x+y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x\cdot y \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$$

چون $2\|x\|\|y\|\cos(\theta) = 2x\cdot y \leqslant 2\|x\|\|y\|$

بردار یکه ، unit vector

بردار x را واحد یا یکه می‌گویند اگر نرم آن برابر یک باشد $\|x\| = 1$

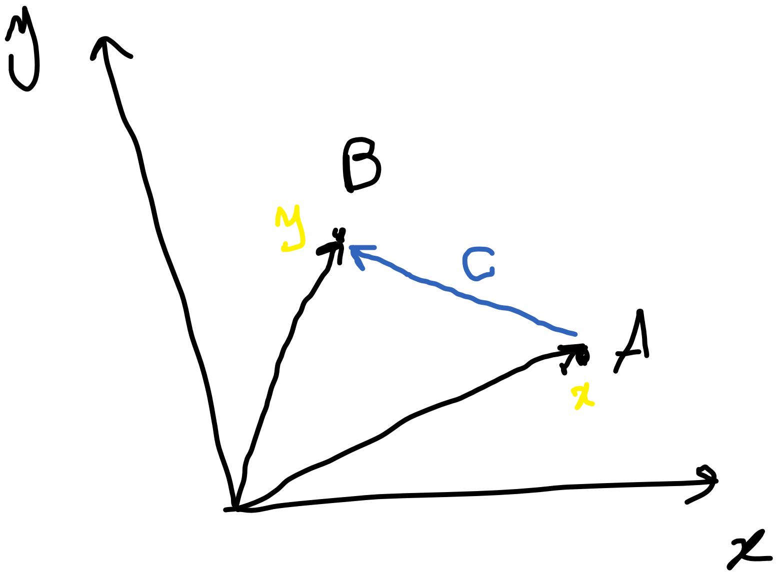
می‌توان هر بردار دلخواه $\vec{x}$ را با استفاده از رابطه زیر یکه کرد

$$\hat{x} = \frac{\vec{x}}{\|x\|}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} , \quad \|x\| = \sqrt{1+2^2+3^2} = \sqrt{14} \Rightarrow \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}} , \frac{2}{\sqrt{14}} , \frac{3}{\sqrt{14}} \right) , \quad \|\hat{x}\| = 1$$

فاصله دو نقطه: فاصله دو نقطه در فضای برداری را می‌توان به صورت نرم بیان کرد:



$$A + C = B$$

$$\Rightarrow C = B - A$$

$$\|C\| = \|B - A\|$$

$$d(A,B) \triangleq d(x,y)$$

$$\|C\| = \langle B - A, B - A \rangle^{\frac{1}{2}}$$

مثال: فاصله دو نقطه x و y که به صورت زیر در فضای R^3 داده شده اند را بدست آورید.

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x - y = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \|x-y\| = \langle x-y, x-y \rangle = (3 \ \ 1 \ \ -3)\cdot(3 \ \ 1 \ \ -3)$$

$$= 3^2 + 1^2 + (-3)^2 = 9+1+9 = 19$$

$$\rho(x,y) = \|x-y\|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{19}$$

زاویه بین دو بردار در یک فضای n بعدی

از تعریف حاصلضرب داخلی

$$\langle x , y \rangle = \|x\| \, \|y\| \cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \langle \hat{x} , \hat{y} \rangle = \frac{\langle x , y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}$$

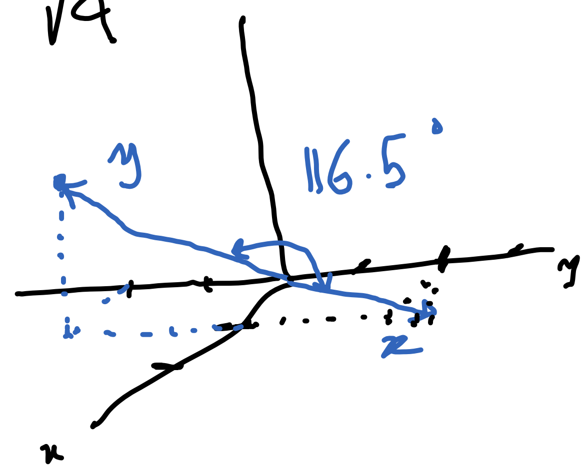
$$\langle \hat{x} , \hat{y} \rangle = \cancelto{1}{\|\hat{x}\|} \, \cancelto{1}{\|\hat{y}\|} \cos\theta = \cos\theta$$

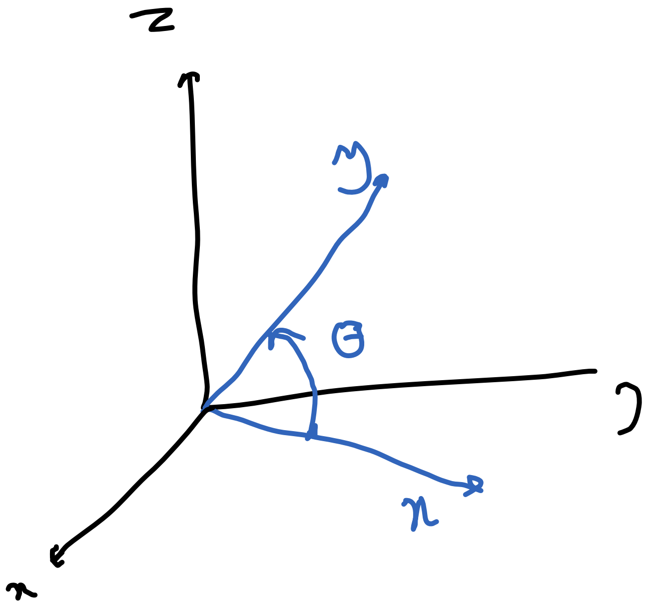
مثال: زاویه بین دو بردار x و y در فضای R^3 را که به صورت زیر داده شده است بدست آورید:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|} = \frac{1-4}{\sqrt{1+4}\,\sqrt{1+4+4}} = \frac{-3}{\sqrt{5}\,\sqrt{9}} = -0.44$$

$$\Rightarrow \theta = 116.5^\circ$$





$$\cos\theta = \frac{\langle x , y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}$$

بردارهای متعامد

هر دو بردار x و y متعلق به فضای برداری V را متعامد گویند اگر

$$\langle x , y \rangle = 0$$

$$\langle x , y \rangle = \|x\| \, \|y\| \cos\theta = 0 \implies \cos\theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2}$$

مثال: بردارهای زیر کدام برهم عمود هستند

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = -1 - 2 + 3 = 0 \longrightarrow v_1 \perp v_2$$

$$\langle v_1, v_3 \rangle = -2 + 2 + 0 = 0 \longrightarrow v_1 \perp v_3$$

$$\langle v_2, v_3 \rangle = 2 - 1 + 0 = 1 \longrightarrow v_1 \not\perp v_3$$

فرآیند متعامدسازی گرام-اشمیت

قضیه ۱-۱۱، اگر $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ پایه یک متعامدی برای V $=R^n$ و u یک بردار دلخواه از V باشد. آن‌گاه، u را می‌توان به صورت زیر نوشت.

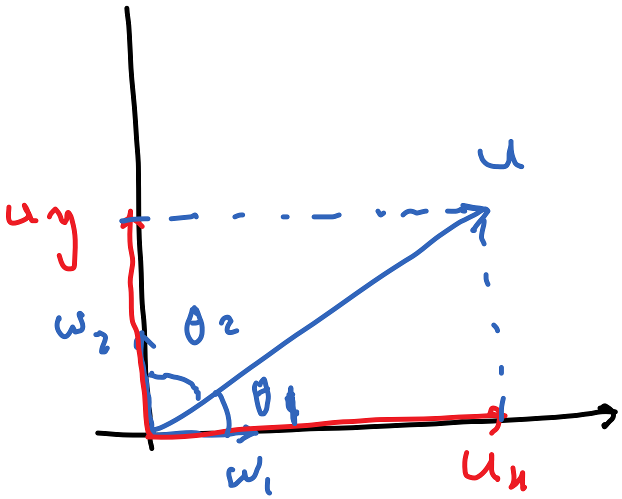
$$u \in R^n \quad \text{و} \quad u = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = \sum_{i=1}^{n} \langle u, w_i \rangle w_i$$

تصویر u روی w_i

$$a_i = \langle u, w_i \rangle$$

مثال: برای R^2

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$



$$u = a_1 w_1 + a_2 w_2$$

$$\vec{u} = \|u\| \cos\theta_1 w_1 + \|u\| \cos\theta_2 w_2$$

$$a_1 = \langle u, w_1 \rangle = u_x$$

$$u = u\cos\theta_1 w_1 + u\sin\theta_1 w_2$$

$$a_2 = \langle u, w_2 \rangle = u_y$$

مثال - فرض کنید مجموعه $\left\{ \overset{w_1}{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}} , \overset{w_2}{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}} \right\}$ یک پایه برای R^2 باشد.

بردار $u \in R^2$ را برحسب بردارهای این پایه بیان کنید.

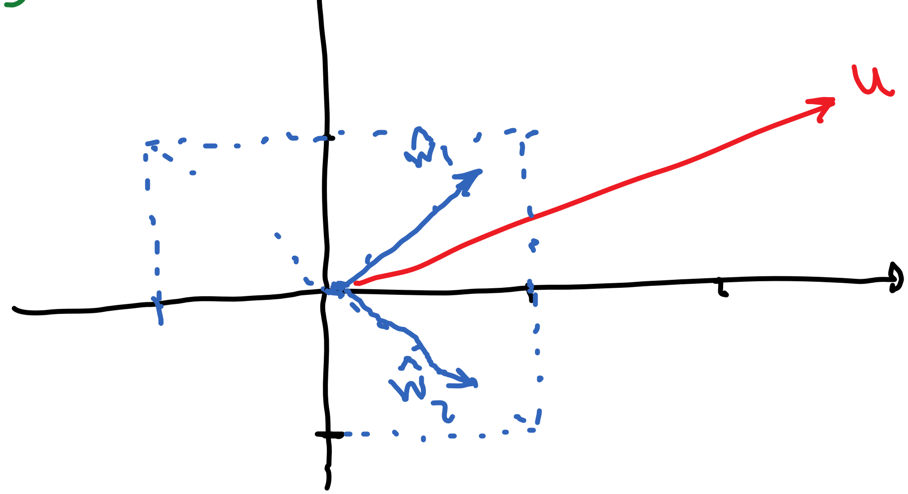
$$u = \underbrace{\langle u , \hat{w}_1 \rangle}\, \hat{w}_1 + \langle u , \hat{w}_2 \rangle\, \hat{w}_2$$

تصویر u

جهت

- $w_1 \perp w_2$ ، $\langle w_1 , w_2 \rangle = 0$

تصویر u روی $\hat{w}_2$ را نشان می‌دهد



- یکه کردن بردارها

$$\hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} , \quad \hat{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\{ \hat{w}_1 , \hat{w}_2 \}$$

ادامه

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

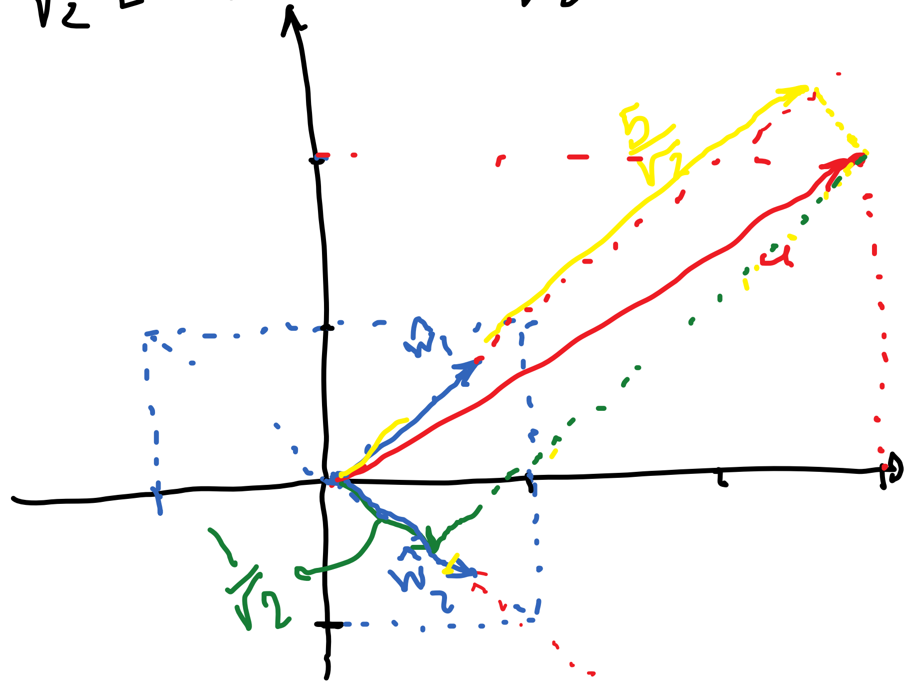
$$u = \langle u, \hat{w}_1 \rangle \hat{w}_1 + \langle u, \hat{w}_2 \rangle \hat{w}_2$$

$$\hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\langle u, \hat{w}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (3+2) = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

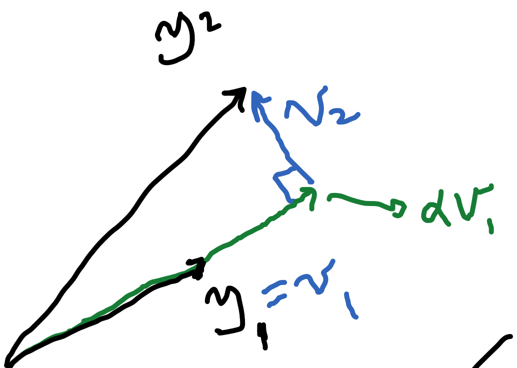
$$\langle u, \hat{w}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (3-2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u = \frac{5}{\sqrt{2}} \hat{w}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{w}_2$$



فرآیند گرام-اشمیت.

برای هر مجموعه شامل n بردار مستقل خطی $\underbrace{\{y_1, \dots, y_n\}}_{\text{پایه برای } R^n}$ می‌توان یک مجموعه یک متعامد $\{v_1, \dots, v_n\}$ با روش گرام-اشمیت به دست آورد.



$$v_1 = y_1$$

$$y_2 = \alpha v_1 + v_2 \quad , \quad \langle v_1 , v_2 \rangle = 0$$

$$\langle y_1 , y_2 \rangle = \langle v_1 , y_2 \rangle = \langle v_1 , \alpha v_1 + v_2 \rangle$$

$$= \langle v_1 , \alpha v_1 \rangle + \underbrace{\langle v_1 , v_2 \rangle}_{0} = \alpha \langle v_1 , v_1 \rangle$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\langle y_1 , y_2 \rangle}{\langle v_1 , v_2 \rangle}$$

$$\alpha = \frac{\langle y_1 , y_2 \rangle}{\langle v_1 , v_1 \rangle} = \frac{\langle v_1 , y_2 \rangle}{\langle v_1 , v_1 \rangle}$$

$$y_2 = \alpha v_1 + v_2 \Rightarrow v_2 = y_2 - \alpha v_1 = y_2 - \frac{\langle v_1 , y_2 \rangle}{\langle v_1 , v_1 \rangle} v_1$$

بردار متعامد جدید از تفاضل y_3 از مؤلفه‌هایی که در امتداد v_1 ، v_2 است به دست می‌آید

$$v_3 = y_3 - a_1 v_1 - a_2 v_2$$

$$\Rightarrow v_3 = y_3 - \frac{\langle v_1 , y_3 \rangle}{\langle v_1 , v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2 , y_3 \rangle}{\langle v_2 , v_2 \rangle} v_2$$

مثال: مجموعه یکه متعامدی از سه بردار مستقل خطی زیر بدست آورید:

$$y_1 = (1,1,1) \quad , \quad y_2 = (-1,0,-1) \quad , \quad y_3 = (-1,2,3)$$

$$v_1 = y_1 = (1,1,1)$$

$$v_2 = y_2 - \frac{\langle v_1, y_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = (-1,0,-1) - \overset{-\frac{2}{3}}{\frac{-1+0-1}{1+1+1}} (1,1,1)$$

$$v_2 = (-1,0,-1) + \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \rightarrow v_1 \perp v_2$

$y_3 = (-1, 2, 3)$

$$v_3 = y_3 - \frac{\langle y_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle y_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{6}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = 1$$

$$\Rightarrow v_3 = (-1,2,3) - \frac{-1+2+3}{3}(1,1,1) - \frac{+\frac{1}{3}+\frac{4}{3}-\frac{3}{3}}{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$v_3 = (-1,2,3) + \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, +\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow v_3 = (-2, 0, 2)$$

$v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$v_3 = (-2, 0, 2)$

$\Rightarrow \hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\hat{v}_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$\hat{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{8}}(-2, 0, 2)$

$$\|v_2\| = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$