کنترل اتوماتیک

مدلسازی سیستم‌های مکانیکی و الکتریکی

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

کنترل

کنترل کلاسیک، تابع تبدیل، SISO، حوزه زمان، حوزه فرکانس

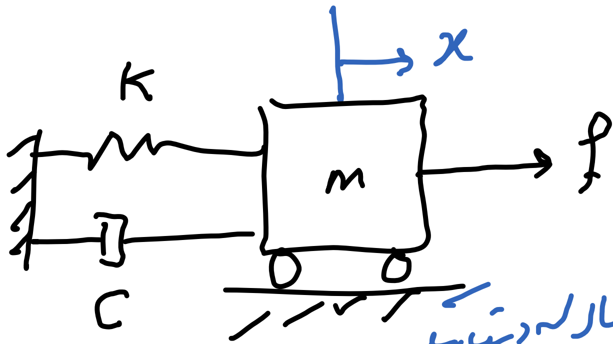
کنترل مدرن، فرم فضای حالت، MIMO، حوزه زمان

سیستم‌های مکانیکی

حرکت خطی

حرکت دورانی

سیستم جرم و فنر تک درجه آزادی:



ابتدا باید معادلات دینامیکی سیستم را استخراج کنیم

- روش نیوتن اویلر

$$\begin{cases} \sum F = \dot{G} = ma \\ \sum M_c = \dot{H}_c \end{cases}$$

→ معادله دینامیکی

→ نیروهای داخلی

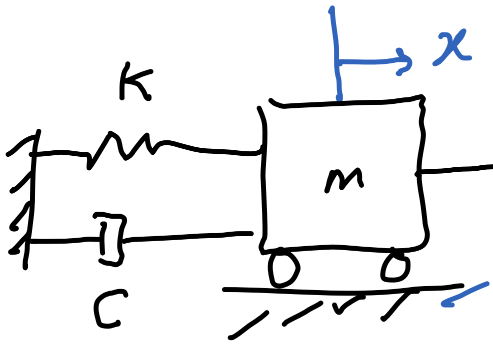
- روش لاگرانژ

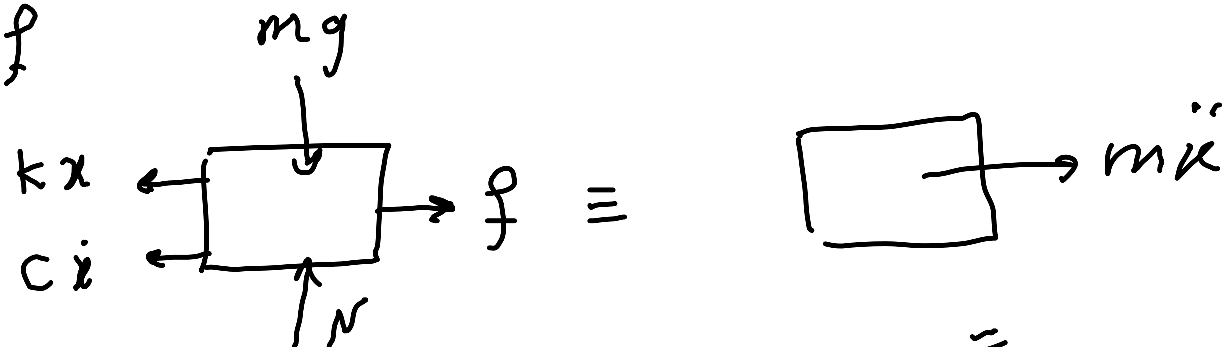
$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

→ معادلات دینامیکی

روش نیوتن اویلر





دیاگرام آزاد
$\sum F$

دیاگرام جنبشی
ma

معادله دیفرانسیل حاکم

$$\sum F_x = m a_x \Rightarrow f - kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f}$$

$$\sum F_y = m a_y \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$$

در معادله دینامیکی یک سیستم ،

۱ - تعداد معادلات برابر تعداد درجات آزادی است.

۲ - در معادلات مشتق متغیرها ظاهر می‌شود.

۳ - در معادله دینامیکی نیروهای داخلی نباید ظاهر شده باشد.

بنابراین نیروهای داخلی باید جایگذاری شوند.

Transfer Function محاسبه تابع تبدیل

$x(0) = \dot{x}(0) = 0$

نسبت تبدیل لاپلاس خروجی به ورودی با فرض شرایط اولیه صفر.

$$\mathcal{L}\left(m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)\right) \Rightarrow ms^2X(s) + csX + kX = F(s)$$

$$X(s)\left[ms^2 + cs + k\right] = F(s) \Rightarrow$$

نمایش بو

خروجی

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \rightarrow$$

ورودی

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2+cs+k} \rightarrow G(s)$$

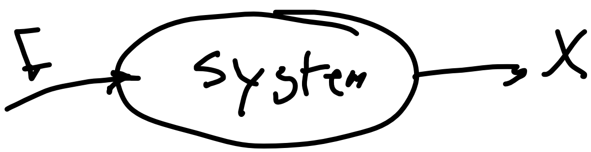
نمایش سیستم به صورت دیاگرام بلوکی

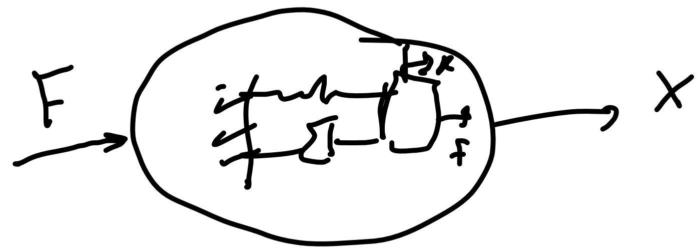
$$F(s) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow X(s)$$

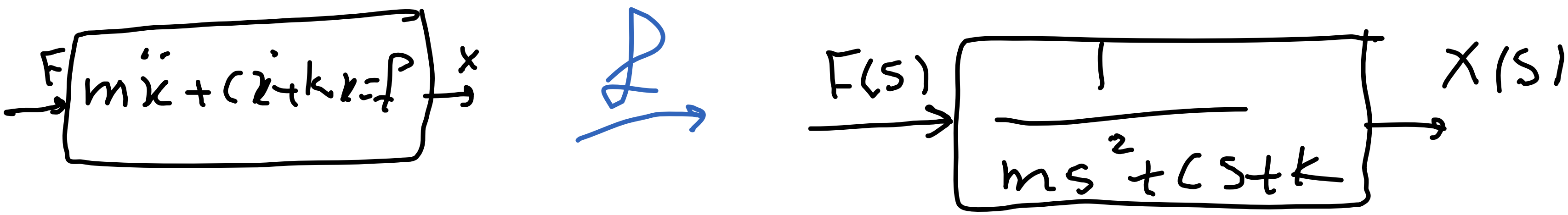
و

$$X(s) = F(s)\,G(s)$$

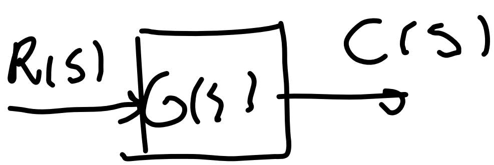
$$F \rightarrow \boxed{\frac{1}{ms^2+cs+k}} \rightarrow X$$







تبدیل لاپلاس نمایش سیستم را بصورت بلوک دیاگرام بسیار راحت می کند

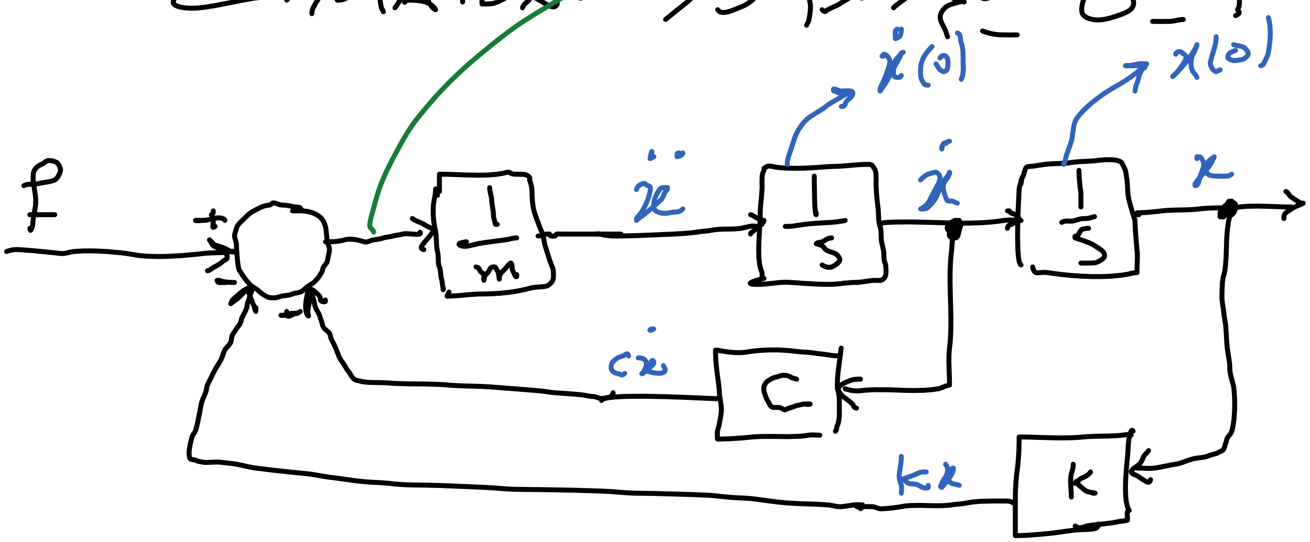


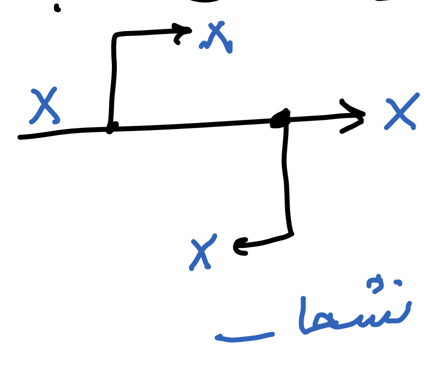
$$C(S) = RG$$

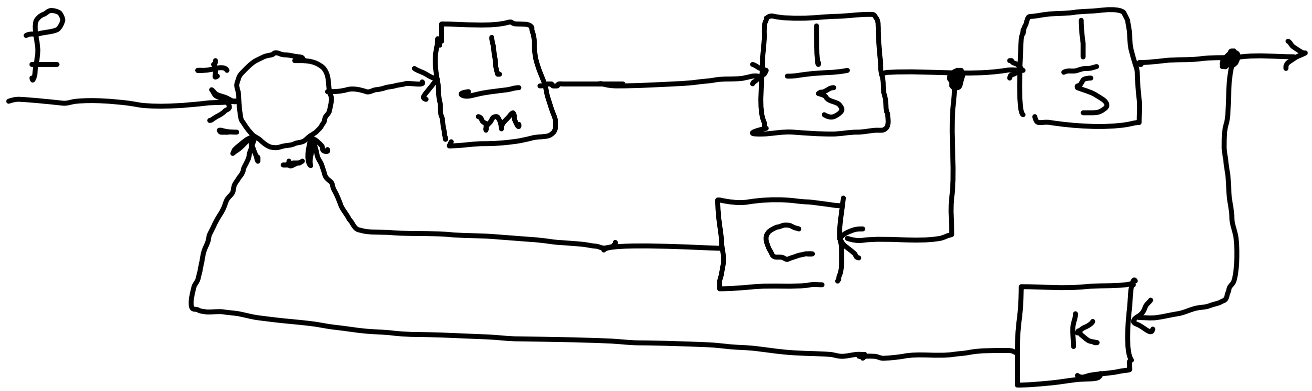
روش دیگر رسم دیاگرام بلوکی سیستم ، (بدون گرفتن تبدیل لاپلاس)

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f \Rightarrow \ddot{x}=\frac{1}{m}\underbrace{\left[f-\underline{c\dot{x}}-\underline{kx}\right]}$$

این روش مناسب رسم دیاگرام بلوکی سیستم در نرم افزار MATLAB است .

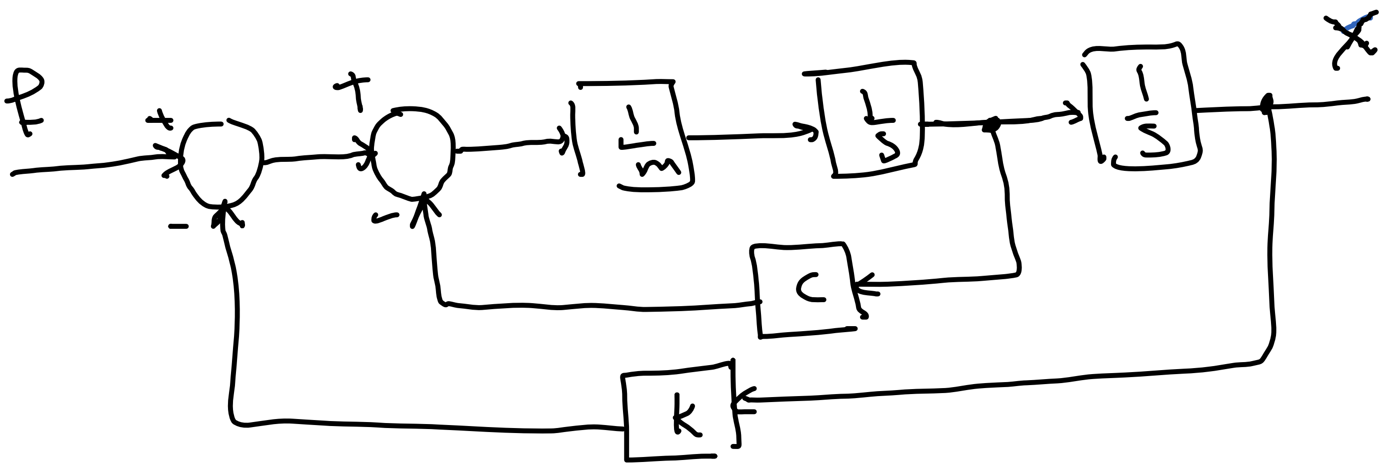






≡

نشان می دهیم که



$$\equiv \quad F \rightarrow \boxed{\frac{1}{ms^2+cs+k}} \rightarrow X$$

فرم فضای حالت ، state space

فرم کلی

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X, u) & \text{معادله سیستم} \\ y = h(X, u) & \text{معادله خروجی} \end{cases}$$

اگر سیستم خطی باشد می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX + Du \end{cases}$$

در معادلات حالت فقط مشتق مرتبه اول ظاهر شده است.

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

x_i : state variables

state vector : X

input vector : u

$$f = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots u_r) \\ f_2(\quad \sim \quad) \\ \vdots \\ f_n(\quad \sim \quad) \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{1}{m}\left[f - c\dot{x} - kx\right]$$

با تعریف متغیرهای حالت بصورت زیر:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x_1 \\ \dot{x} = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{m}\left[f - c x_2 - k x_1\right] \\ y = x_1 \end{cases}$$

فرم فضای حالت معادلات

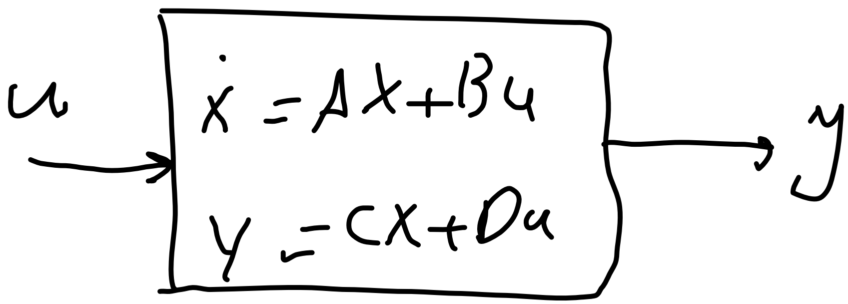
فرم ماتریسی معادلات حالت

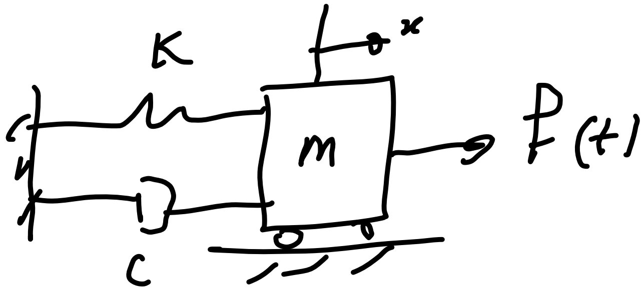
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{m}\left[f - c x_2 - k x_1 \right] \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}^{B} f$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} f$$

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX + Du \end{cases}$$


u
$\dot{x} = Ax + Bu$
$y = Cx + Du$
y



$f = \sin \omega t$

و

$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$

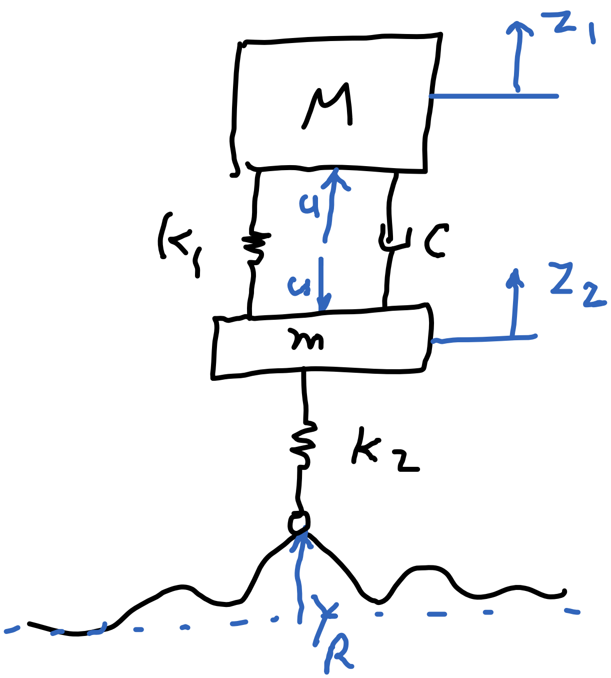
$x(0) = 0.2$ ،

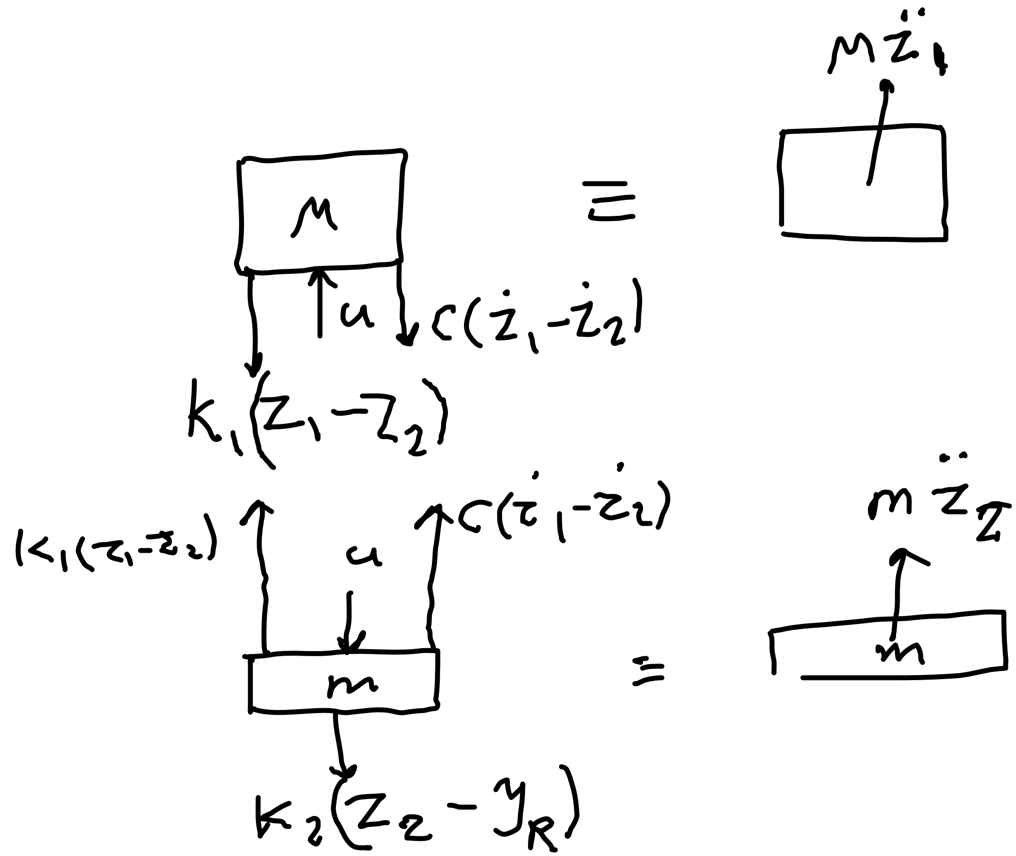
$f = \sin \omega_n t$

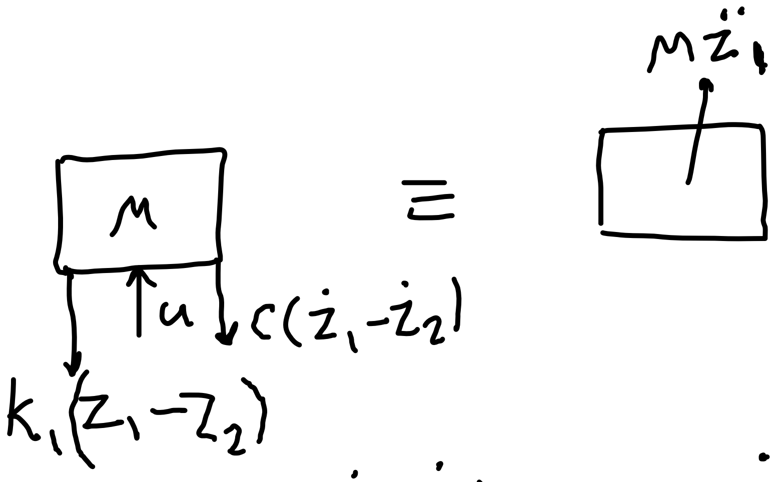
سیستم تعلیق خودرو (مدل $\frac{1}{4}$)

Active

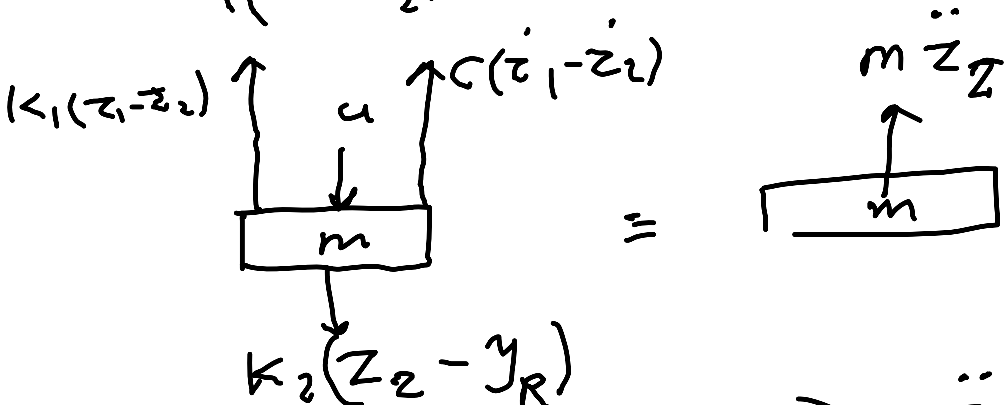
تعلیق فعال







$$\Rightarrow m\ddot{z}_1 = u - k_1(z_1 - z_2) - c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2)$$



$$\Rightarrow m\ddot{z}_2 = -u + k_1(z_1 - z_2) + c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_2(z_2 - y_R)$$

$$\begin{cases} m\ddot{z}_1 = \underline{u} - k_1(z_1 - z_2) - c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) \\ m\ddot{z}_2 = -\underline{u} + k_1(z_1 - z_2) + c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_2(z_2 - \underline{y_R}) \end{cases}$$

ورودی ها u و Y_R

$\left.\begin{array}{l} u \text{ ورودی تاثیر گذار} \\ Y_R \text{ مه اغتشاش} \end{array}\right\}$

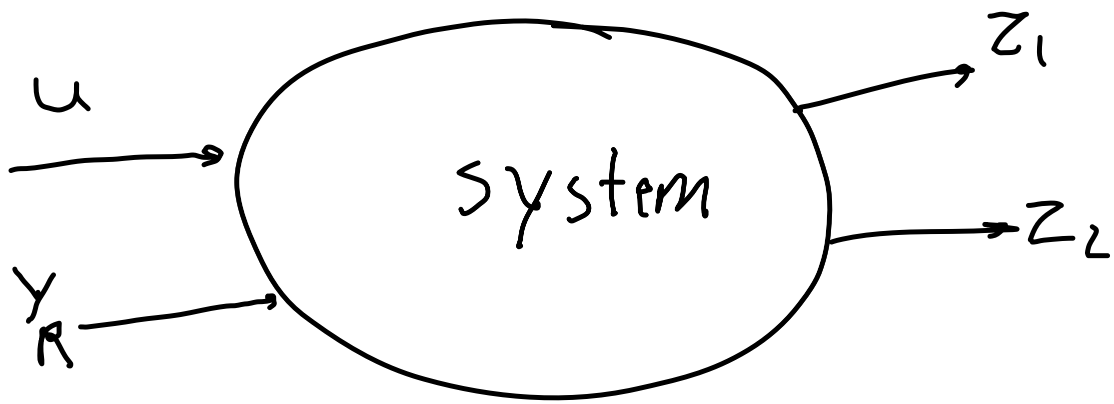
$\left.\begin{array}{l} z_1 \\ z_2 \end{array}\right\}$ خروجی

تابع تبدیل بین خروجی z_1 و ورودی u را بدست آورید:

$$G_{1u}(s) = \frac{Z_1(s)}{U(s)}, \qquad G_{1y}(s) = \frac{Z_1(s)}{Y_R(s)}$$

$$G_{2u} = \frac{Z_2(s)}{U(s)}, \qquad G_{2y_R} = \frac{Z_2(s)}{Y_R(s)}$$

$Y_R = 0$ $\qquad$ $u = 0$



وقتی تابع تبدیل یک خروجی نسبت به یک ورودی را می خواهیم محاسبه کنیم

مابقی ورودی ها را صفر در نظر می گیریم

$\frac{Z_1}{U}$ و $Y_R = 0$

$\frac{Z_1}{Y_R}$ و $U = 0$

$$\begin{cases} m\ddot{z}_1 = \underline{u} - k_1(z_1 - z_2(t)) - c(\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)) \\ m\ddot{z}_2(t) = -\underline{u} + k_1(z_1 - z_2) + c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_2(z_2 - \underline{y_R}) \end{cases}$$

با تبدیل لاپلاس گرفتن از معادلات داریم

$$\begin{cases} ms^2 Z_1(s) = U(s) - k_1(Z_1(s) - Z_2(s)) - cs(Z_1(s) - Z_2(s)) \\ ms^2 Z_2 = -U + k_1(Z_1 - Z_2) + cs(Z_1 - Z_2) - k_2(Z_2 - Y_R) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_1(ms^2 + cs + k_1) + Z_2(-cs - k_1) = U \\ Z_2(ms^2 + cs + k_2) + Z_1(-cs - k_1) = -U + k_2 Y_R \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_1\overbrace{(ms^2+cs+k_1)}^{A} + Z_2\overbrace{(-cs-k_1)}^{B} = U \\ Z_2\underbrace{(ms^2+cs+k_2)}_{D} + Z_1\underbrace{(-cs-k_1)}_{B} = -U + k_2 Y_R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AZ_1 + BZ_2 = U \longrightarrow Z_2 = \dfrac{U - AZ_1}{B} \\ DZ_2 + BZ_1 = -U + k_2 Y_R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{D(U - AZ_1)}{B} + BZ_1 = -U + k_2 Y_R$$

$$\frac{D(U - AZ_1)}{B} + BZ_1 = -U + K_2 Y_R$$

$$\Rightarrow Z_1\left(B - \frac{AD}{B}\right) = -\frac{D}{B}U - U + K_2 Y_R$$

$$\Rightarrow Z_1\left(\frac{B^2 - AD}{B}\right) = U\left(-1 - \frac{D}{B}\right) + K_2 Y_R = U\left(\frac{-B-D}{B}\right) + K_2 Y_R$$

$$\frac{Z_1}{U} = \frac{\frac{-B-D}{B}}{\frac{B^2-AD}{B}} = \frac{-B-D}{B^2-AD} \quad \text{و} \quad \frac{Z_1}{Y_R} = \frac{\frac{K_2}{1}}{\frac{B^2-AD}{B}} = \frac{BK_2}{B^2-AD}$$

$Y_R = 0$　　　　$U = 0$

$$\frac{Z_1}{U} = \frac{-B - D}{B^2 - AD} = \frac{-(-CS - K_1) - (ms^2 + cs + k_2)}{(cs + k_1)^2 - (ms^2 + cs + k_1)(ms^2 + cs + k_2)}$$

بطور مشابه

$$\begin{cases} AZ_1 + BZ_2 = U \\ DZ_2 + BZ_1 = -U + K_2 Y_R \end{cases} \longrightarrow Z_1 = \frac{U - BZ_2}{A}$$

$$DZ_2 + \frac{B(U - BZ_2)}{A} = -U + K_2 Y_R \Rightarrow \cdots$$

$$\frac{Z_2}{U} = \checkmark \quad , \quad \frac{Z_2}{Y_R} = \checkmark$$

دیاگرام بلوکی سیستم را رسم کنید.

$$\begin{cases} m\ddot{z}_1 = u - k_1(z_1 - z_2) - c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) \\ m\ddot{z}_2 = -u + k_1(z_1 - z_2) + c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_2(z_2 - y_R) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{z}_1 = \frac{1}{m}\left[u - k_1(z_1 - z_2) - c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2)\right] \\ \ddot{z}_2 = \frac{1}{m}\left[-u + k_1(z_1 - z_2) + c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_2(z_2 - y_R)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 = \dfrac{1}{m}\left[u - k_1(z_1 - z_2) - c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2)\right] \\ \ddot{z}_2 = \dfrac{1}{m}\left[-u + k_1(z_1 - z_2) + c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_2(z_2 - y_R)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = z_1 \\ x_2 = z_2 \\ x_3 = \dot{z}_1 \\ x_4 = \dot{z}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \dfrac{1}{m}\left[u - k_1(x_1 - x_2) - c(x_3 - x_4)\right] \\ \dot{x}_4 = \dfrac{1}{m}\left[-u + k_1(x_1 - x_2) + c(x_3 - x_4) - k_2(x_2 - y_R)\right] \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

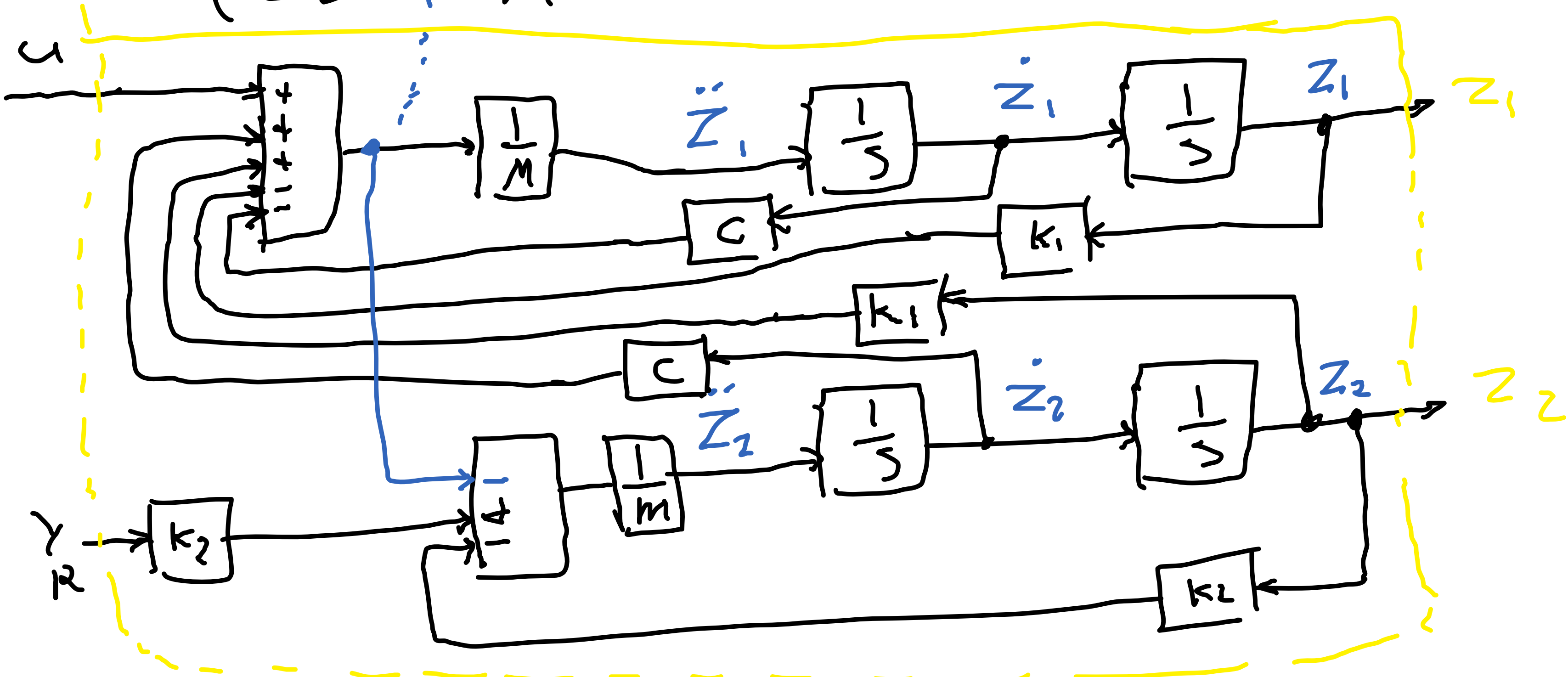
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{M}\left[u - K_1(x_1 - x_2) - C(x_3 - x_4)\right] \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{m}\left[-u + K_1(x_1 - x_2) + C(x_3 - x_4) - K_2(x_2 - y_R)\right] \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_1}{M} & \frac{K_1}{M} & -\frac{C}{M} & \frac{C}{M} \\ \frac{K_1}{m} & \frac{-K_1 - K_2}{m} & \frac{C}{m} & -\frac{C}{m} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 \\ -\frac{1}{m} & \frac{K_2}{m} \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} u \\ y_R \end{bmatrix}$$

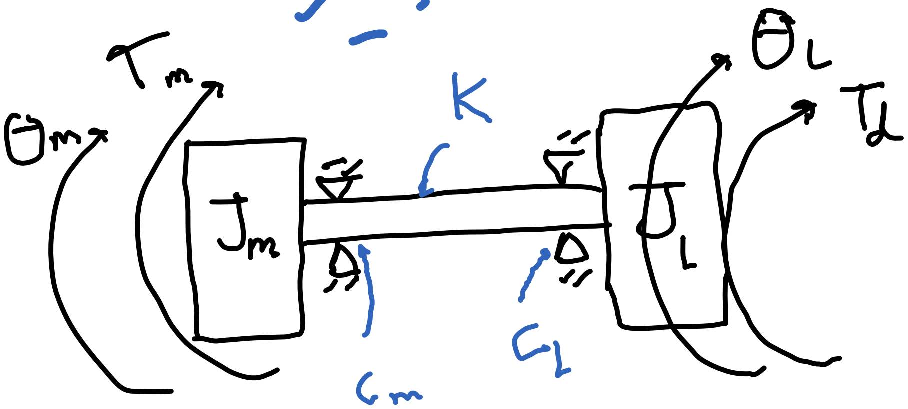
$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \qquad Y = Cx + Du$$

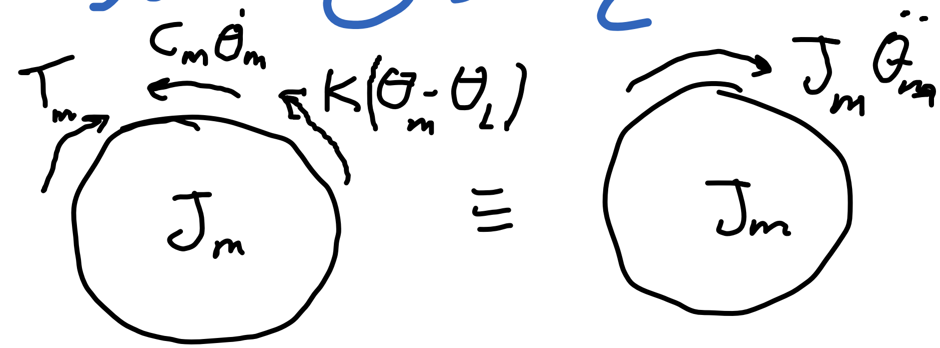
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D} \begin{bmatrix} u \\ y_R \end{bmatrix}$$

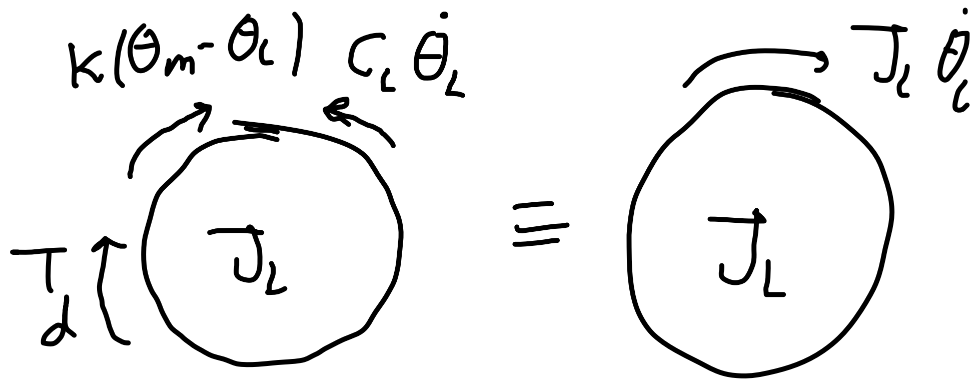
$$\begin{cases} \ddot{z}_1 = \dfrac{1}{m}\left[u - k_1(z_1 - z_2) - c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2)\right] \\ \ddot{z}_2 = \dfrac{1}{m}\left[-u + k_1(z_1 - z_2) + c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - k_2(z_2 - y_R)\right] \end{cases}$$

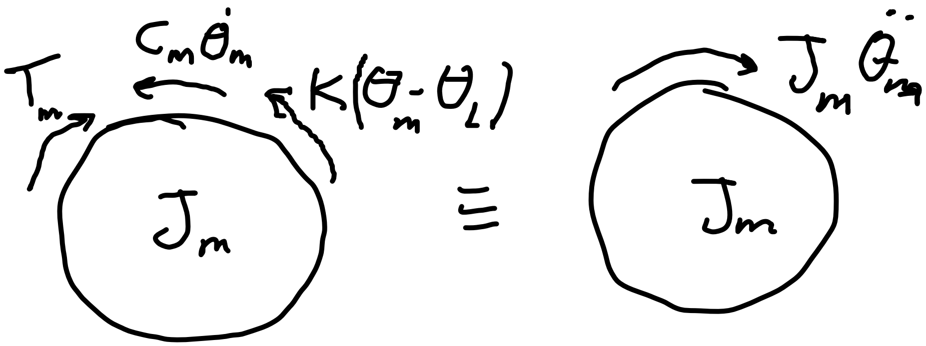


سیستم دورانی موتور و بار با شفت انعطاف پذیر

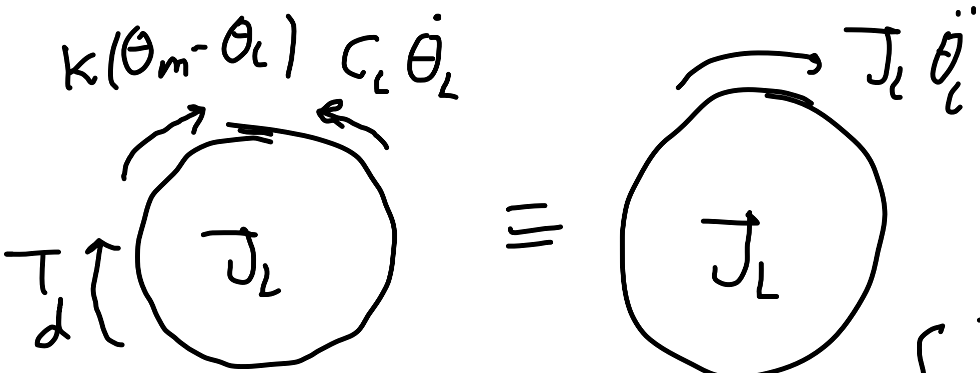








$$\Rightarrow J_m\ddot{\theta}_m = T_m - c_m\dot{\theta}_m - K(\theta_m-\theta_L)$$



$$\Rightarrow J_L\ddot{\theta}_L = K(\theta_m-\theta_L) - c_l\dot{\theta}_l + T_d$$

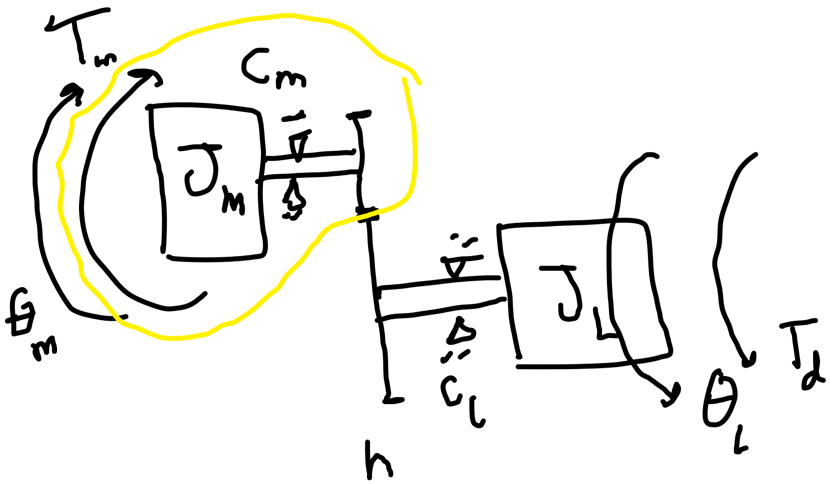
$$\Rightarrow \begin{cases} J_m\ddot{\theta}_m + K(\theta_m-\theta_L) + c_m\dot{\theta}_m = T_m \\ J_l\ddot{\theta}_l + K(\theta_L-\theta_m) + c_L\dot{\theta}_L = T_d \end{cases}$$

T_m ورودی تاثیرگذار

T_d 〃 اغتشاش

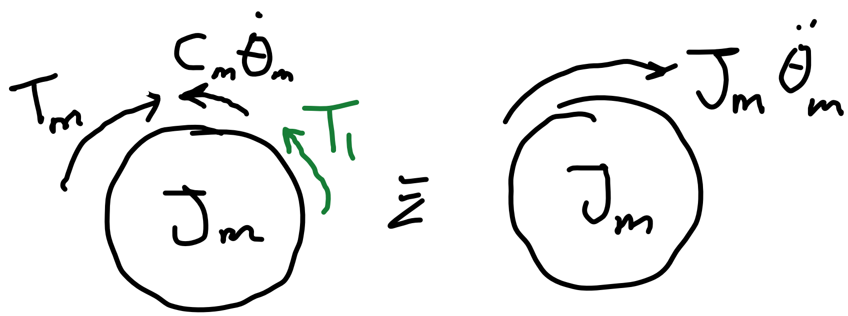
$$\frac{\Theta_L(s)}{T_m(s)} = ?$$

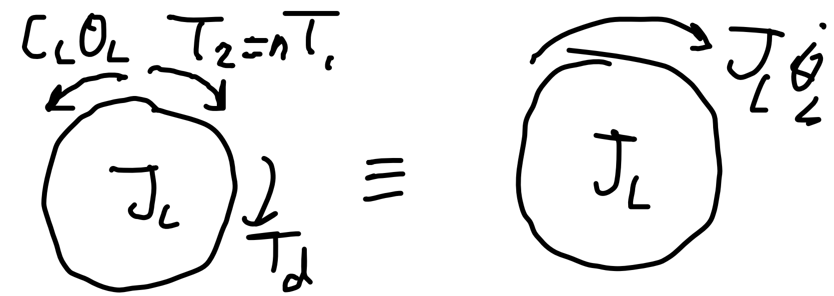
سیستم موتور، گیربکس و بار

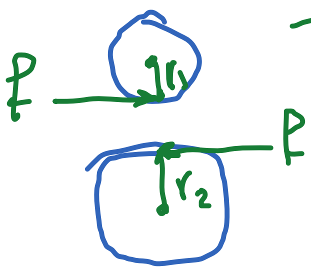


$$n = \frac{\theta_m}{\theta_L}$$ نسبت تبدیل گیربکس

انعطاف پذیری شفتها صرف نظر شد!!

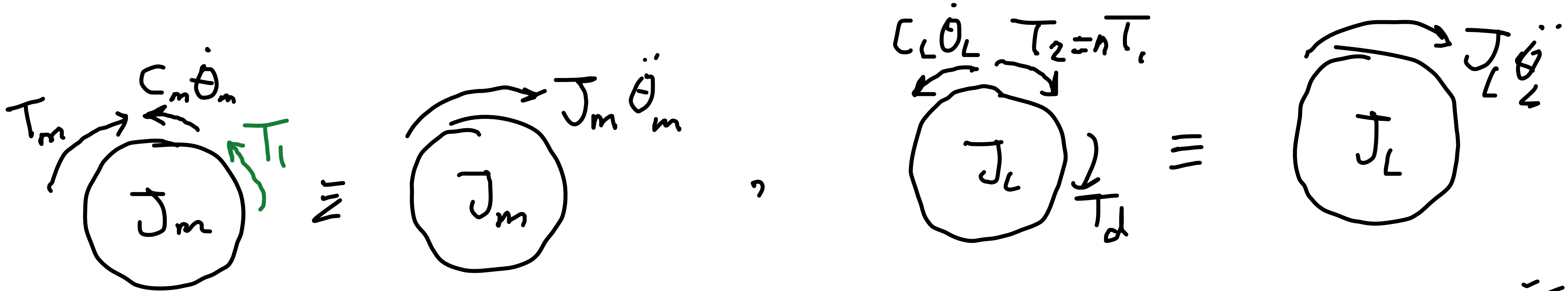






$$T_1 = F r_1$$

$$T_2 = F r_2 = n T_1$$



بایستی گشتاور داخلی T_1 را از معادلات حذف کنیم

$$\begin{cases} T_m - C_m\dot{\theta}_m - T_1 = J_m\ddot{\theta}_m \\ nT_1 - C_L\dot{\theta}_L + T_d = J_L\ddot{\theta}_L \end{cases}$$

$$T_1 = T_m - C_m\dot{\theta}_m - J_m\ddot{\theta}_m$$

$$n\left(T_m - C_m\dot{\theta}_m - J_m\ddot{\theta}_m\right) - C_L\dot{\theta}_L + T_d = J_L\ddot{\theta}_L$$

$$n\left(T_m - C_m\dot{\theta}_m - J_m\ddot{\theta}_m\right) - C_L\dot{\theta}_L + T_d = J_L\ddot{\theta}_L$$

$$\text{و}\quad \frac{\theta_m}{\theta_l} = \frac{\dot{\theta}_m}{\dot{\theta}_L} = \frac{\ddot{\theta}_m}{\ddot{\theta}_L} = n \quad , \quad \dot{\theta}_L = \frac{\dot{\theta}_m}{n}$$

$$\Rightarrow nT_m - nC_m\dot{\theta}_m - nJ_m\ddot{\theta}_m - C_L\frac{\dot{\theta}_m}{n} + T_d = J_L\frac{\ddot{\theta}_m}{n}$$

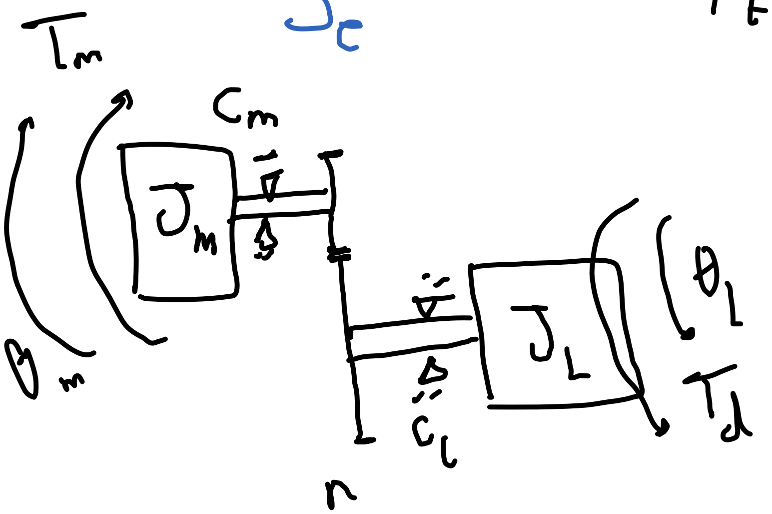
$$\Rightarrow \left(\frac{J_L}{n} + nJ_m\right)\ddot{\theta}_m + \left(\frac{C_L}{n} + nC_m\right)\dot{\theta}_m = nT_m + T_d$$

$$\xRightarrow{\frac{1}{n}} \left(J_m + \frac{J_L}{n^2}\right)\ddot{\theta}_m + \left(C_m + \frac{C_L}{n^2}\right)\dot{\theta}_m = T_m + \frac{T_d}{n}$$

معادله برحسب θ_m

$$\underbrace{\left(J_m+\frac{J_L}{n^2}\right)}_{J_e}\ddot{\theta}_m+\left(\underbrace{C_m+\frac{C_L}{n^2}}_{C_e}\right)\dot{\theta}_m=T_m+\frac{T_d}{n}$$

$$\text{if } n=1 \Rightarrow (J_m+J_L)\ddot{\theta}_m+\cdots$$



$$n=10 \longrightarrow \left(J_m+\frac{J_L}{100}\right)\ddot{\theta}_m+(\cdots)$$

گشتاور خارجی روی بار که روی موتور احساس می‌شود، $\frac{1}{n}$ برابر خواهد شد

ممان اینرسی بار که روی موتور احساس می‌شود $\frac{1}{n^2}$ برابر خواهد شد

$$J_e \ddot{\theta}_m + C_e \dot{\theta}_m = T_m \quad , \qquad T_d = 0 \quad \text{با فرض}$$

$$\overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} \quad J_e s^2 \Theta_m(s) + C_e s \Theta_m(s) = T_m(s)$$

$$\Rightarrow \quad \Theta_m(s) \left[J_e s^2 + C_e s \right] = T_m(s)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Theta_m(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{s(J_e s + C_e)} \quad \Rightarrow \quad \frac{s\Theta(s)}{T_m} = \frac{\omega_m(s)}{T_m} = \frac{1}{J_e s + C_e}$$

$$T_m \longrightarrow \boxed{\frac{1}{J_e s + C_e}} \longrightarrow \omega_m = s\Theta$$

$$T_m \longrightarrow \boxed{\frac{1}{J_e s + C_e}} \xrightarrow{\omega_m(s) = s\theta} \boxed{\frac{1}{s}} \xrightarrow{\theta(s)}$$

از معادلات بالای سمت راست میرسیم،

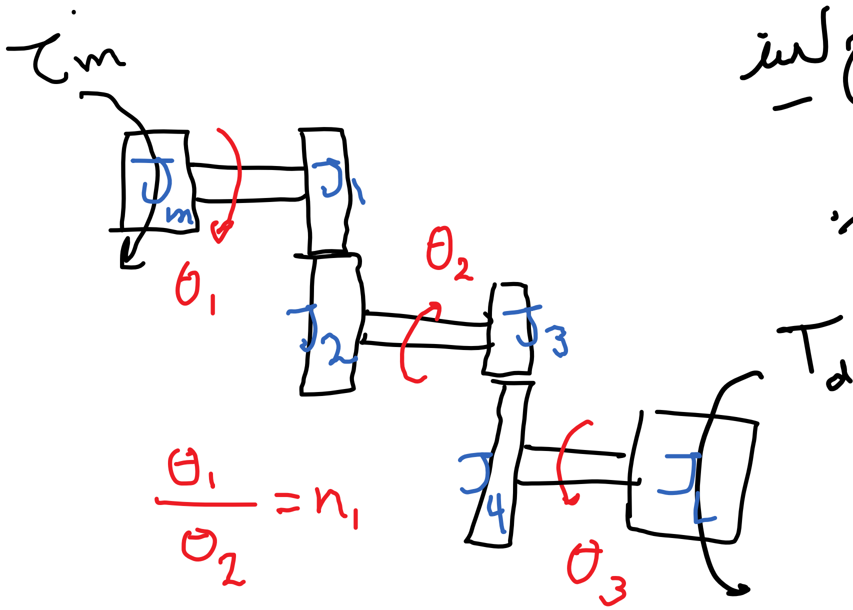
$$n\left(T_m - C_m \dot{\theta}_m - J_m \ddot{\theta}_m\right) - C_L \dot{\theta}_L + T_d = J_L \ddot{\theta}_L \quad , \quad \begin{cases} \dot{\theta}_m = n \dot{\theta}_L \\ \ddot{\theta}_m = n \ddot{\theta}_L \end{cases}$$

$$\boxed{(J_L + n^2 J_m)\ddot{\theta}_L + (C_L + n^2 C_m)\dot{\theta}_L = n T_m + T_d}$$

مثال: معادلات دینامیکی سیستم زیر را استخراج کنید

J_1 تا J_4 همان اینرسی چرخدنده‌ها هستند.

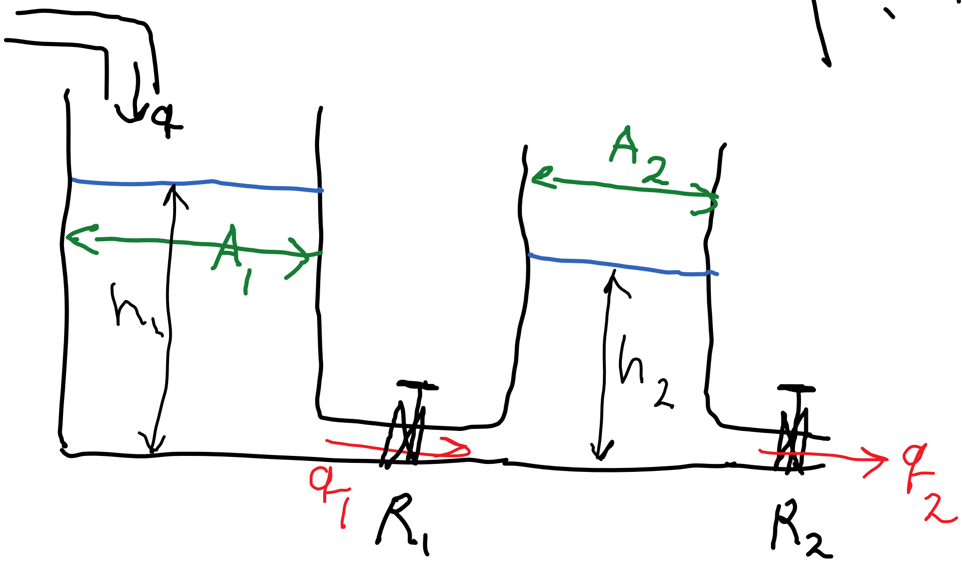
از اصطکاک صرف‌نظر کنید.



$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = n_1 \qquad \frac{\theta_2}{\theta_3} = n_2 \qquad \frac{\theta_1}{\theta_3} = n_1 n_2$$

$$\left[J_m + J_1 + \frac{(J_2 + J_3)}{n_1^2} + \frac{(J_4 + J_L)}{(n_1 n_2)^2} \right] \ddot{\theta}_1 = \tau_m + \frac{T_d}{n_1 n_2}$$

سیستم های سیالاتی، مخازن آب مرتبط بهم



با فرض جریان لایه ای

$$q_2 = \frac{1}{R_2} h_2$$

شیر دو مثلاً بسته باشد $R_2 = \infty$

$$q_1 = \frac{1}{R_1}(h_1 - h_2)$$

حجم آب داخل مخزن ۱ $\quad A_1 h_1 \xrightarrow[\text{آب داخل مخزن}]{\text{تغییرات حجم}}$

$$A_1 \dot{h}_1 = q - q_1$$

$$A_2 \dot{h}_2 = q_1 - q_2$$

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1 = q - q_1 \\ A_2 \dot{h}_2 = q_1 - q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 \dot{h}_1 = q - \frac{1}{R_1}(h_1 - h_2) \\ A_2 \dot{h}_2 = \frac{1}{R_1}(h_1 - h_2) - \frac{1}{R_2} h_2 \end{cases}$$

ورودی q و متغیرها h_1, h_2

خروجی‌ها حالت

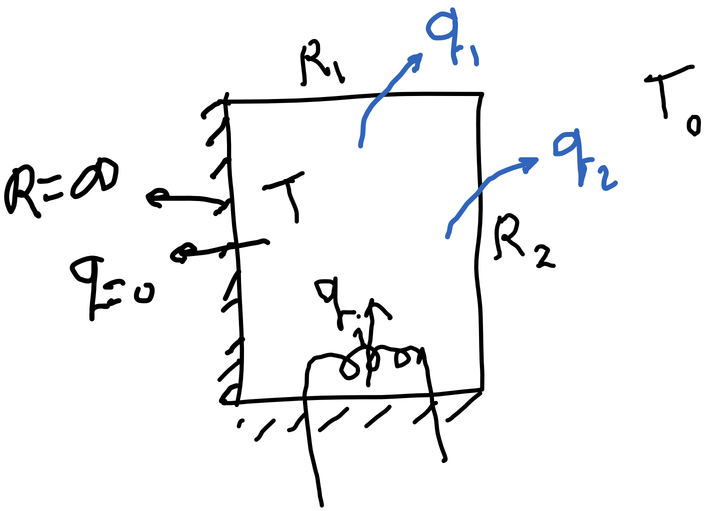
$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \frac{1}{A_1}\left[q - \frac{1}{R_1}(h_1 - h_2)\right] \\ \dot{h}_2 = \frac{1}{A_2}\left[\frac{1}{R_1}(h_1 - h_2) - \frac{1}{R_2} h_2\right] \\ y_1 = h_1 \\ y_2 = h_2 \end{cases}$$

فرم ماتریسی فضای حالت

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \dfrac{1}{A_1}\left[q - \dfrac{1}{R_1}(h_1 - h_2)\right] \\ \dot{h}_2 = \dfrac{1}{A_2}\left[\dfrac{1}{R_1}(h_1 - h_2) - \dfrac{1}{R_2}h_2\right] \\ y_1 = h_1 \\ y_2 = h_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1A_1} & \dfrac{1}{R_1A_1} \\ \dfrac{1}{R_1A_2} & -\dfrac{1}{R_1A_2} - \dfrac{1}{R_2A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} q \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} q \end{cases}$$

مدل حرارتی یک اتاق



$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{1}{R_1}(T - T_0) \\ q_2 = \dfrac{1}{R_2}(T - T_0) \end{cases}$$

$$C\dot{T} = q_i - q_1 - q_2 \Rightarrow \boxed{C\dot{T} = q_i - \frac{1}{R_1}(T - T_0) - \frac{1}{R_2}(T - T_0)}$$

C ← ظرفیت حرارتی اتاق

C بسته به نوع مصالح داخل منزل مشخص می‌شود

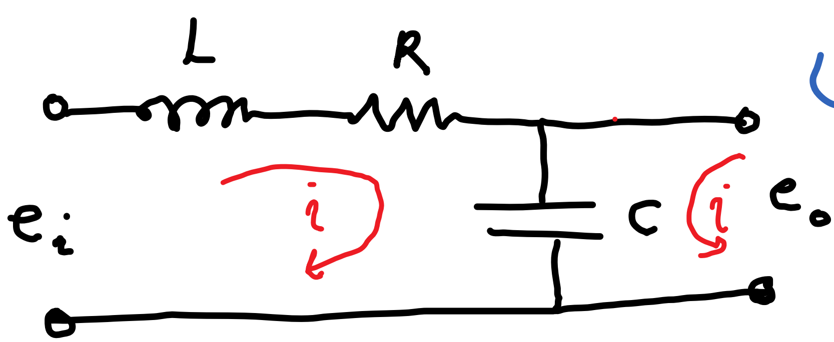
$$\dot{T} = \frac{1}{C}\left[q_i - \frac{1}{R_1}(T - T_0) - \frac{1}{R_2}(T - T_0)\right]$$

T متغیر

q_i ورودی

سیستم‌های الکتریکی و الکترومکانیکی

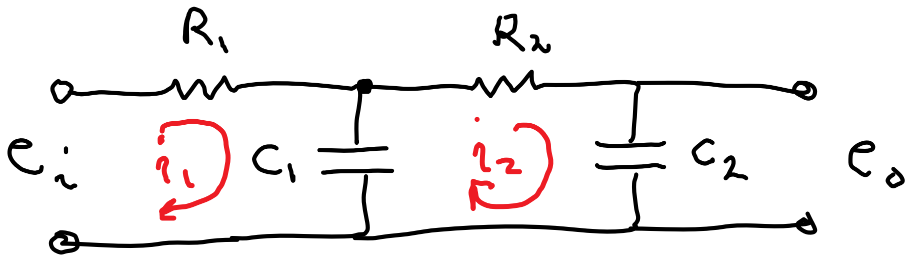
مثال: مدار RCL



$$\begin{cases} e_i = L\dfrac{di}{dt} + Ri + \dfrac{1}{C}\int i\,dt \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} E_i = LSI + RI + \dfrac{I}{CS} \\ e_o = \dfrac{1}{C}\int i\,dt \Rightarrow E_o = \dfrac{I}{CS} \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{E_o}{E_i} = \frac{\frac{\cancel{I}}{CS}}{\cancel{I}\left(LS + R + \frac{1}{CS}\right)} = \frac{\frac{1}{CS}}{\frac{LCS^2 + RCS + 1}{CS}} = \frac{1}{LCS^2 + RCS + 1}$$

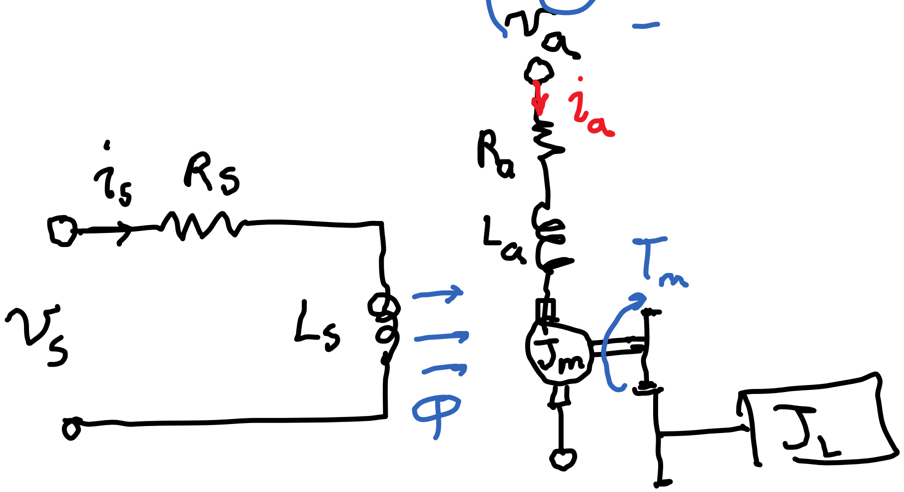
مثال :



$$\begin{cases} e_i = R_1 i_1 + \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int (i_1 - i_2)\,dt \\ 0 = R_2 i_2 + \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2\,dt + \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int (i_2 - i_1)\,dt \\ e_o = \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2\,dt \end{cases}$$

$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{(R_1 C_1 S + 1)(R_2 C_2 S + 1) + R_1 C_2 S}$$

موتور DC مغناطیس دائم (الکترومکانیکی



استاتور یک شار مغناطیسی ایجاد می کند

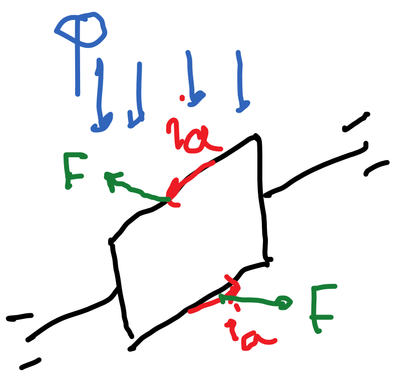
v_s و i_s ثابت است

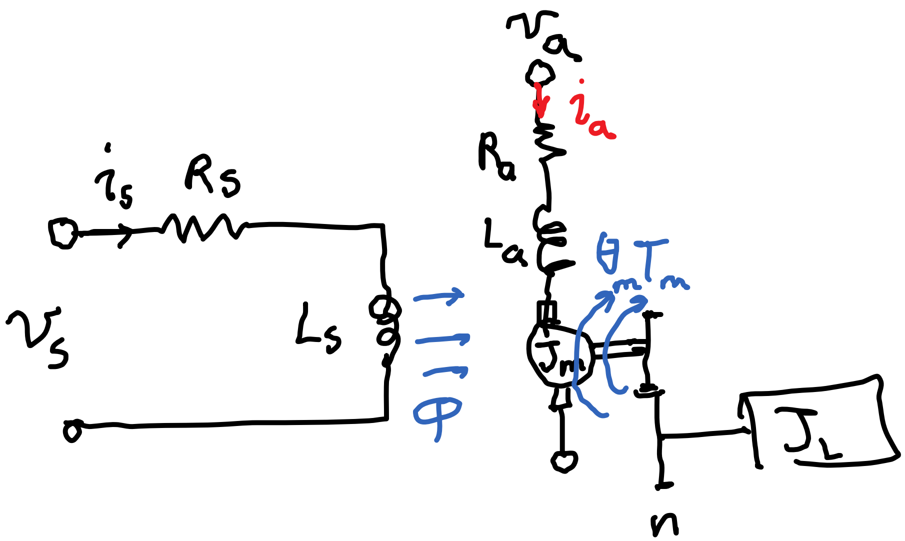
φ = ثابت

شار تولیدی $T_m \propto \varphi \Rightarrow T_m = \underbrace{K_1 \varphi}_{K_m} i_a$

موتور $T_m \propto i_a$

$$\boxed{T_m = K_m i_a} \quad (1)$$





$$\boxed{v_a - v_{emf} = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt}} \quad (2)$$

با دوران روتور داخل استاتور یک ولتاژ بازگشتی ایجاد می‌شود که به آن V_{emf} گفته می‌شود

$$\boxed{v_{emf} = K_b \dot{\theta}_m}$$

معادلات موتور به بار لید شیفت کنیم

$$\underbrace{\left(J_m + \frac{J_L}{n^2}\right)}_{J_e} \ddot{\theta}_m + \underbrace{\left(C_m + \frac{C_L}{n^2}\right)}_{C_e} \dot{\theta}_m = T_m$$

$$\boxed{J_e \ddot{\theta}_m + C_e \dot{\theta}_m = T_m} \quad (3)$$

3 $J_e \ddot{\theta}_m + C_e \dot{\theta}_m = T_m \Rightarrow J_e s^2 \Theta(s) + C_e s \Theta(s) = T_m(s)$

$$\Rightarrow \frac{\Theta(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{s(J_e s + C_e)} \Rightarrow \frac{\omega_m(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{J_e s + C_e} = G(s)$$

$\omega_m = T_m G(s)$ $\quad T_m \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow \omega_m$

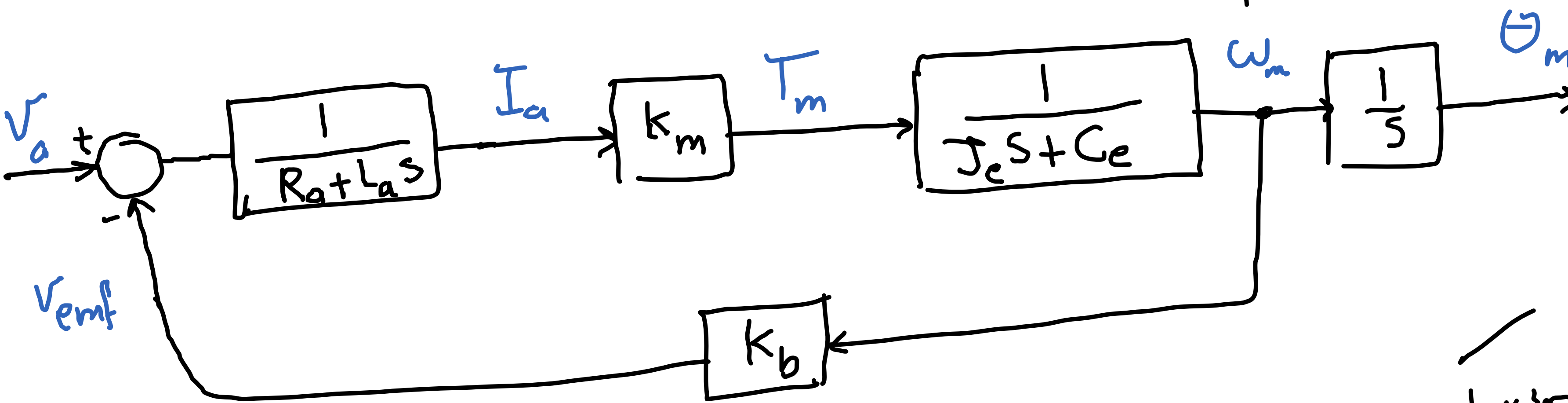
2 $v_a - v_{emf} = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} \Rightarrow V_a(s) - V_{emf}(s) = (R_a + L_a s) I_a(s)$

$$\Rightarrow \frac{I_a(s)}{V_a(s) - V_{emf}(s)} = \frac{1}{R_a + L_a s} = G_2(s),$$

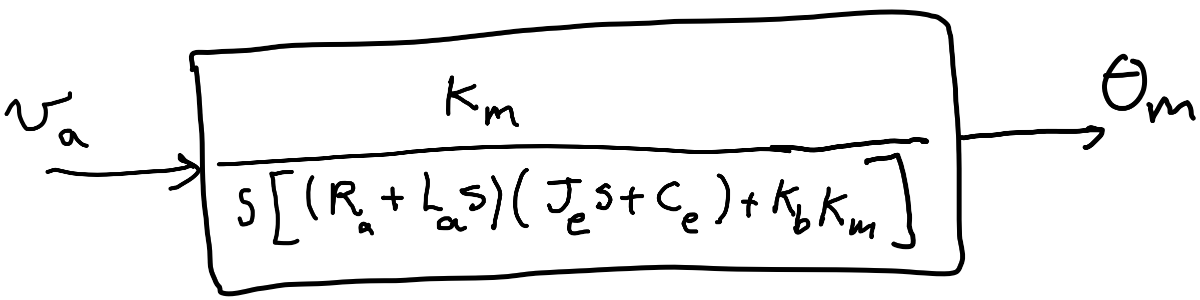
$V_a - V_{emf} \rightarrow \boxed{G_2(s)} \rightarrow I_a$

1 $T_m = K_m i_a \Rightarrow T_m(s) = K_m I_a(s)$

رسم بلوک دیاگرام سیستم



بعداً خواهیم دید که



$$v_a \longrightarrow \boxed{\frac{K_m}{s\left[(R_a + L_a s)(J_e s + C_e) + K_b K_m\right]}} \longrightarrow \theta_m$$

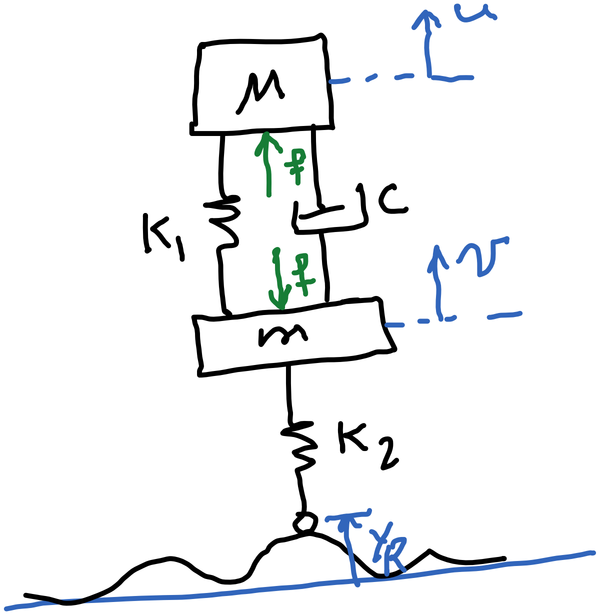
$$L_a \simeq 0 \Rightarrow \frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s\left[R_a(J_e s + C_e) + K_b K_m\right]}$$

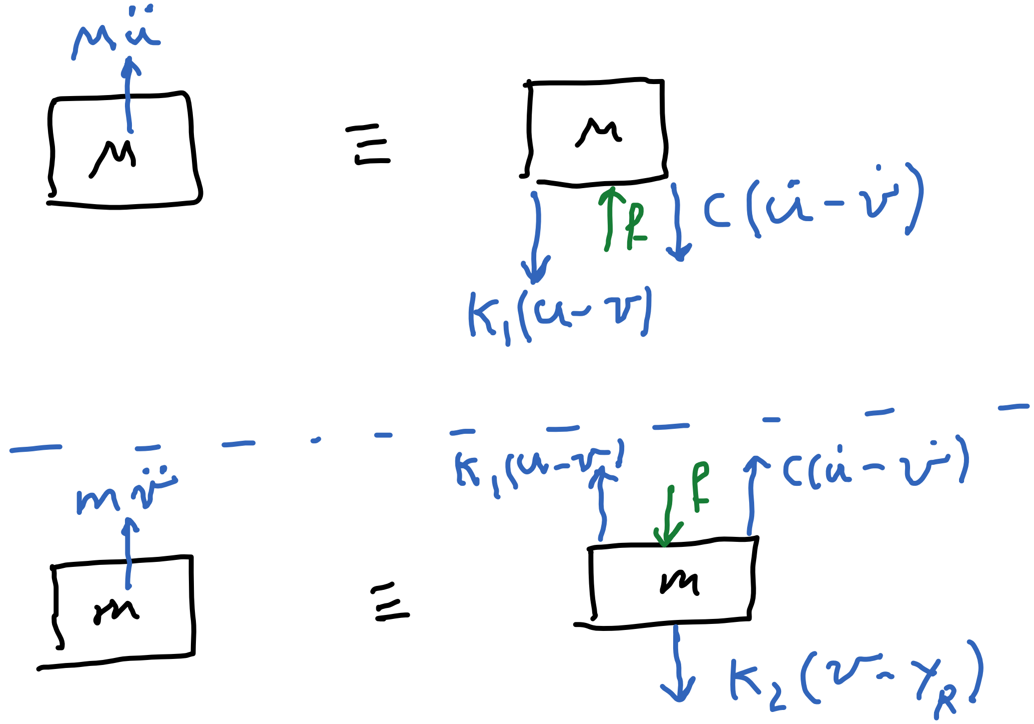
$$\Rightarrow \frac{\omega_m(s)}{V_a} = \frac{K_m}{\underbrace{R_a J_e}_{a} s + \underbrace{R_a C_e + K_b K_m}_{b}} = \frac{K}{as+b} = \frac{K'}{s+c}$$

در مسائلی می‌بینیم که یا تابع تبدیل یک سیستم را داریم به صورت زیر است
(مربات)

متغیر،

$$v \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s+1}} \longrightarrow \omega$$





$$\Rightarrow \begin{cases} M\ddot{u} = f - K_1(u-v) - c(\dot{u}-\dot{v}) \\ M\ddot{v} = -f + K_1(u-v) + c(\dot{u}-\dot{v}) - K_2(v-y_R) \end{cases}$$

محاسبه تابع تبدیل

$$M\ddot{u} = F - K_1(u-v) - c(\dot{u}-\dot{v})$$

$$M\ddot{v} = -F + K_1(u-v) + c(\dot{u}-\dot{v}) - K_2(v-Y_R)$$

خروجی ها u ، v

ورودی F , Y_R

$$G_{uF} = \frac{U(s)}{F(s)} , \quad G_{uY} = \frac{U(s)}{Y_R(s)}$$

$$G_{vF} = \frac{V(s)}{F(s)} , \quad G_{vY} = \frac{V(s)}{Y_R(s)}$$

$$\begin{cases} Ms^2 U + K_1(U-V) + cs(U-V) = F(s) \\ ms^2 V(s) - K_1(U-V) - cs(U-V) + K_2 V = -F + K_2 Y_R(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ms^2 U + K_1(U - V) + cs(U - V) = F(s) \\ ms^2 V(s) - K_1(U - V) - cs(U - V) + K_2 V = -F + K_2 Y_R(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U(s)\left[Ms^2 + Cs + K_1\right] + V(s)\left[-Cs - K_1\right] = F(s) \\ V(s)\left[ms^2 + cs + K_1 + K_2\right] + U(s)\left[-cs - K_1\right] = -F(s) + K_2 Y_R(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U(s)\overbrace{\left[Ms^2 + Cs + K_1\right]}^{A} + V(s)\overbrace{\left[-Cs - K_1\right]}^{B} = F(s) \\ V(s)\underbrace{\left[ms^2 + cs + K_1 + K_2\right]}_{C} + U(s)\underbrace{\left[-cs - K_1\right]}_{B} = -F(s) + K_2 Y_R(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U(s)\overbrace{\left[ms^2+cs+k_1\right]}^{A} + V(s)\overbrace{\left[-cs-k_1\right]}^{B} = F(s) \\ V(s)\underbrace{\left[ms^2+cs+k_1+k_2\right]}_{C} + U(s)\underbrace{\left[-cs-k_1\right]}_{B} = -F(s)+k_2 Y_R(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} AU + BV = F \longrightarrow V = \dfrac{F-AU}{B} \\ CV + BU = -F + k_2 Y_R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{C}{B}(F-AU) + BU = -F + k_2 Y_R \Rightarrow$$

$$U\left(-\frac{CA}{B} + B\right) = F\left(-1-\frac{C}{B}\right) + k_2 Y_R$$

$$U\left(-\frac{CA}{B}+B\right) = F\left(-1-\frac{C}{B}\right) + K_2 Y_R$$

$$\Rightarrow U\left(\frac{B^2-CA}{B}\right) = F\left(\frac{-B-C}{B}\right) + K_2 Y_R$$

$$\Rightarrow G_{uf} \xrightarrow{Y_R=0} G_{uf} = \frac{U(s)}{F(s)} = \frac{\frac{-B-C}{B}}{\frac{B^2-AC}{B}} = \frac{-B-C}{B^2-AC}$$

$$G_{uY_R} \xrightarrow{F=0} G_{uY_R} = \frac{U(s)}{Y_R(s)} = \frac{\frac{K_2}{1}}{\frac{B^2-CA}{B}} = \frac{K_2 B}{B^2-AC}$$

$$\begin{cases} U(s)\,\overbrace{\left[Ms^2+cs+K_1\right]}^{A} + V(s)\,\overbrace{\left[-cs-K_1\right]}^{B} = F(s) \\ V(s)\,\underbrace{\left[ms^2+cs+K_1+K_2\right]}_{C} + U(s)\,\underbrace{\left[-cs-K_1\right]}_{B} = -F(s)+K_2\,Y_R(s) \end{cases}$$

$$G_{uf} = \frac{-B-C}{B^2-AC} = \frac{cs+K_1-(ms^2+cs+K_1+K_2)}{(cs+K_1)^2-(Ms^2+cs+K_1)(ms^2+cs+K_1+K_2)}$$

$$\Rightarrow G_{uf} = \frac{-(ms^2+K_2)}{(cs+K_1)^2-(Ms^2+cs+K_1)(ms^2+cs+K_1+K_2)}$$