ریاضی مهندسی پیشرفته

جبر خطی، تبدیل های خطی

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

تبدیلهای خطی

فرض کنید $V \in R^n$ و $W \in R^m$ باشد. تابع $T: V \to W$ را یک تبدیل خطی گوئیم اگر به ازای هر u و v در زیرفضای V و هر اسکالر α دو شرط زیر برقرار باشد

1- $T(u+v) = T(u) + T(v)$

2- $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

قضیه ۱-۲ برای هر تبدیل خطی $T: R^n \to R^m$ یک ماتریس $A\,(m\times n)$ وجود دارد که در آن عملگر T به صورت $T(x)=Ax$ تعریف می‌شود.

به عبارت دیگر تبدیلهای قابل نمایش با ماتریسها را تبدیلهای خطی می‌گویند.

$A\in R^{m\times n}$

$$T: \underset{x}{R^n} \longrightarrow \underset{y}{R^m} \quad \longrightarrow \quad A\,x_{n\times 1} = y_{m\times 1}$$

بردار $x\in R^n$ تحت تبدیل T یا نگاشت T به $y\in R^m$ تبدیل می‌شود.

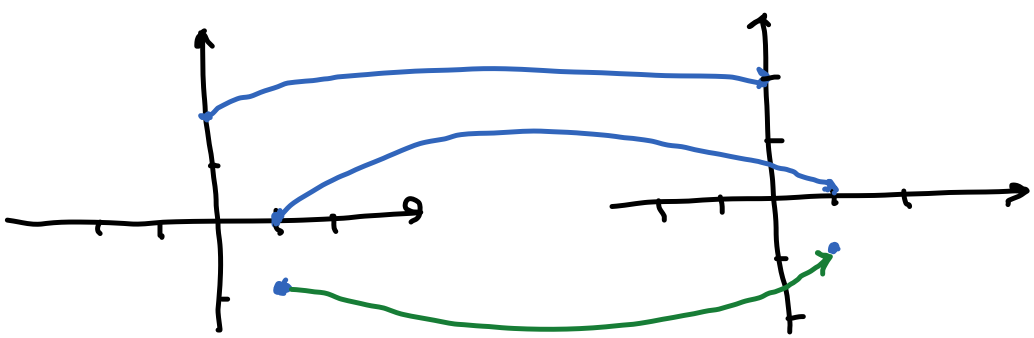
قضیه 2-2. هر ماتریس بیانگر یک تبدیل خطی است $A_{m\times n}: R^n \to R^m$

مثال: ماتریس‌های زیر چه تبدیل خطی را در صفحه xy، بیان می‌کنند. $(A_i: R^2 \to R^2)$

$A_1 = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ ،

$$A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

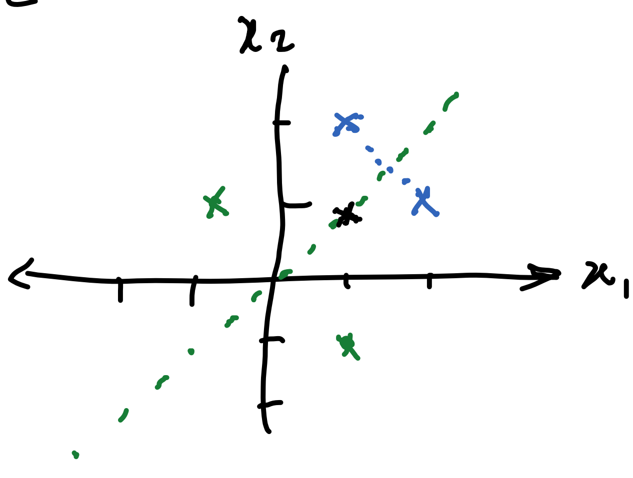
هر نقطه مجدداً روی خودش نگاشت می‌شود.



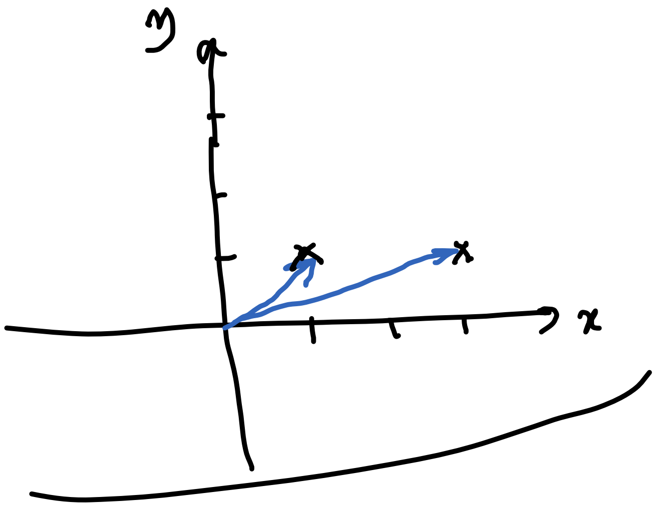
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

این کسست هر نقطه‌ای را نسبت به محور $x_1 = x_2$ منعکس می‌کند

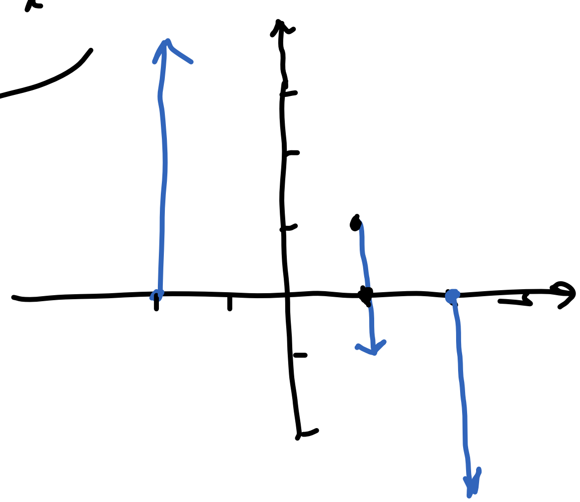
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ y \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -2x+y \end{bmatrix}$$



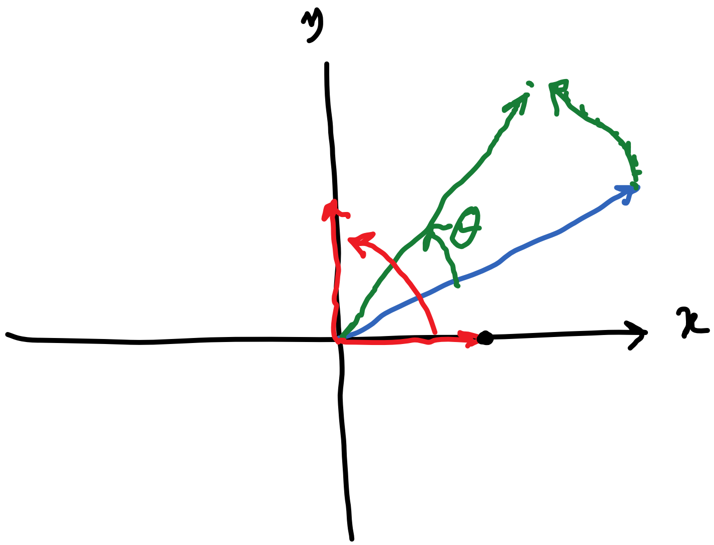
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

مثال: ماتریس
$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$
چه نگاشتی را انجام می‌دهد

$$A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\cos\theta-y\sin\theta\\ x\sin\theta+y\cos\theta\end{bmatrix}$$

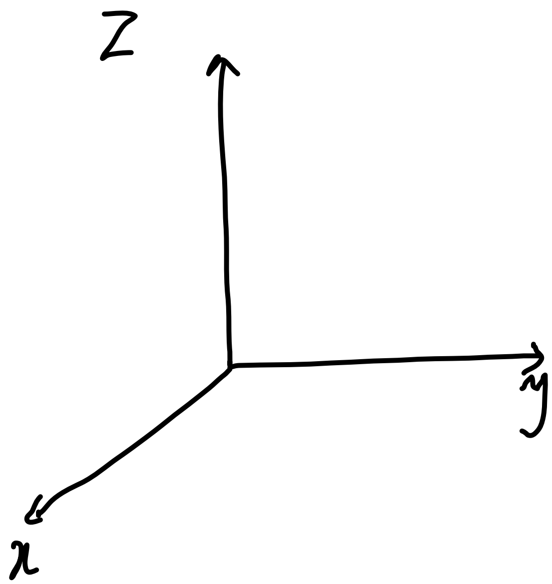


$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad \theta=90$$

$$x'=0$$
$$y'=1$$

ماتریس دوران حول محور Z

در فضای R^3 ماتریس‌های دوران اصلی به صورت زیر هستند.



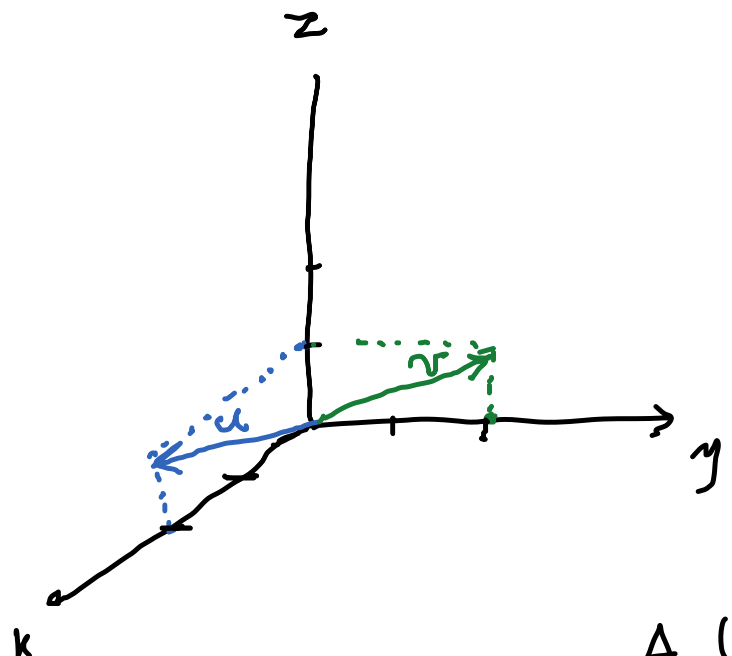
$$A_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$A_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

مثال، می‌خواهیم بردار $u=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$ را حول محور z به اندازه ۹۰ درجه دوران دهیم. موقعیت جدید آن را محاسبه کنید.

$u \in \mathbb{R}^3$



$$A_z(90)\,u=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$$

$\cos(90)=0$, $\sin 90=1$

$$A_z(30)\,u=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt3}{2}&-\frac{1}{2}&0\\\frac12&\frac{\sqrt3}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt3\\1\\1\end{bmatrix}$$

نمایش ماتریسی نگاشت خطی

نگاشت خطی $T: V_n \to W_m$ با پایه‌های داده‌شده $\{\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_n\}$ برای V_n

و $\{\vec{Y}_1, \dots, \vec{Y}_m\}$ برای W_m را در نظر بگیرید.

هر بردار $x \in V_n$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه آن نوشت.

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{X}_j \rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

به طور مشابه $y \in W_m$

$$y = \sum_{i=1}^{m} y_i \vec{Y}_i \rightarrow y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

هدف برقرار کردن رابطه‌ای بین اینها را $x=(x_1,\dots,x_n)$ و $y=(y_1,\dots,y_m)$

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{\{X_i\}} \quad , \quad y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}_{\{Y_i\}}$$

$$Tx=y \Rightarrow Tx = T\sum_{j=1}^{n} x_j X_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \,(T X_j) \quad (1)$$

از خواص خطی داریم

$$Tx=\sum_{i=1}^{m} y_i Y_j \quad (2)$$

می توان از روابط ۱ و ۲ نتیجه گرفت که هر Tx_j یک ترکیب خطی از بردارهای پایه Y می باشد، یعنی

$$\boxed{Tx_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i}$$

j در کتاب (۲-۳) اشتباه است، باید i باشد

و نهایتاً داریم

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

این رابطه را می توان به صورت ماتریسی نیز نوشت

$$y = Ax \quad , \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مثال: تبدیل خطی $T: R^3 \to R^2$ را با ضابطه $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x+y\\y-z\end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید.

X_i ، $i=1,2,3$ پایه استاندارد R^3 و Y_i ، $i=1,2$ پایه استاندارد R^2 باشد. ماتریس تبدیل متناظر این تبدیل را نسبت به پایه های داده شده محاسبه کنید.

$$X_i=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\} \quad \text{و} \quad Y_i=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$A\,(2\times 3)$$

$$T X_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i \quad , \quad m=2, \; n=3 \qquad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix}$$

$$X_i = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{X_3} \right\} , \quad Y_i = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{Y_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{Y_2} \right\}$$

$$T(X_1) = a_{11} Y_1 + a_{21} Y_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(X_2) = a_{12} Y_1 + a_{22} Y_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(X_3) = a_{13} Y_1 + a_{23} Y_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = a_{13} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{23} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a_{21}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\a_{21}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{11} = 1 \\ a_{21} = 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = a_{12}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 1 = a_{12} \\ 1 = a_{22} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = a_{13}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a_{23}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 = a_{13} \\ -1 = a_{23} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & -1\end{bmatrix} ,$$

برای مثال شکل پایه‌های زیر را درنظر بگیرید،

$$\overset{X_1}{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}$$

$$Y_i = \left\{ \overset{Y_1}{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}, \overset{Y_2}{\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}} \right\} \quad , \quad X_j = \left\{ \underset{X_1}{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}, \underset{X_2}{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}}, \underset{X_3}{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}} \right\}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x+y\\y-z\end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل A را محاسبه کنید.

$$T(X_1) = a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + a_{21}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$T(X_2) = a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = a_{12}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$T(X_3) = a_{13}Y_1 + a_{23}Y_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = a_{13}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + a_{23}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_{21}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a_{11} - a_{21} \\ -1 = 2a_{11} + a_{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{21} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a_{12}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a_{12} - a_{22} \\ 0 = 2a_{12} + a_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = \frac{1}{3} \\ a_{22} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = a_{13}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_{23}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ y-z \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ماتریس A نسبت به پایه‌های استاندارد

$$y = Ax \quad , \quad \underset{u}{R^3} \longrightarrow \underset{v}{R^2} \quad , \quad Au = v$$

می‌خواهیم صحت رابطه $Ax = y$ را چک کنیم

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad , \quad Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+1 \\ 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2+1 \\ 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

ادامه

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ y-z \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$Y_i = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad X_j = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

صحت درستی رابطه $y = Ax$ را نشان دهید

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(x) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

?

آیا $AX = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cancel{= \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}}$

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{X}_j \qquad\qquad x \equiv x_j$$ اگر پایه ها استاندارد باشه

اگر اگر پایه ها استاندارد نباشه، این گونه است

$$y = \sum_{i=1}^{m} y_i \vec{Y}_i$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{X_i} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{R^3}$$

$$A x$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{R^3} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}_{R^2}$$

$$y = \sum_{i=1}^{m} y_i \overline{Y}_i \Rightarrow y_1 Y_1 + y_2 Y_2 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{4}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_{\chi_2}$$

تبدیلهای متشابه

(جلسه پنجم)

تبدیل خطی T را در نظر بگیرید که فضای برداری V_n را به خودش نگاشت می‌کند

$T: V_n \longrightarrow V_n$ ، مجموعه‌های $\{v_i \,,\, i=1,\dots,n\}$ و $\{v_i^* \,,\, i=1,\dots,n\}$ را دو پایه

از V_n فرض کنید. در این صورت می‌توان هر بردار دلخواه از V_n را برحسب

پایه‌های v_i و v_i^* به صورت زیر نوشت.

$$x \in V_n \,, \qquad x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j = \sum_{i=1}^{n} x_i^* v_i^*$$

x_j ها مختصات بردار x در پایه‌های v_j هستند

x_i^* ها 〃 〃 x 〃 〃 〃 v_i^* هستند

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{v_i} \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix}_{v_i^*}$$

از طرف دیگر بردارهای پایه v_i^* و v_j هر دو به V تعلق دارند. پس می‌توان یکی را برحسب دیگری نوشت

$$v_j \in V_n \Rightarrow \boxed{v_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} v_i^*} \quad \text{و} \quad j = 1, \dots, n$$

محاسبه ماتریس T

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j = \sum_{i=1}^{n} x_i^* v_i^* \quad \text{و} \quad v_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} v_i^*$$

با ترکیب روابط

بالا داریم

$$\Longrightarrow x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} t_{ij} v_i^* = \sum_{i=1}^{n} x_i^* v_i^*$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j - x_i^* \right] v_i^* = 0$$

$$\Rightarrow x_i^* = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = t_{11} x_1 + t_{12} x_2 + \cdots + t_{1n} x_n \\ \vdots \\ x_n^* = t_{n1} x_1 + t_{n2} x_2 + \cdots + t_{nn} x_n \end{cases}$$

$i \to j$ بـ ش ۸-۲

$$\begin{bmatrix} x^*_1 \\ x^*_2 \\ \vdots \\ x^*_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}}_{T} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow x_{v^*} = T x_v$$

یا $x^* = T x$

به T ماتریس تبدیل مختصات یا ماتریس تبدیل دو پایه v_i^* و v_i گفته می‌شود.

ماتریس T مختصات بردار x نسبت به پایه v_i را به مختصات بردار x نسبت به پایه v_i^* تبدیل می‌کند.

می‌توان نشان داد که ماتریس T همواره ناتکین است یعنی T^{-1} همواره وجود دارد.

شمال ۲-۷

تاثیر تغییر پایه در تبدیل های خطی

$x \to y$

نگاشت $T: V \to V$ را در نظر بگیرید:

$x^* \to y^*$

$y = Ax \leftarrow A \leftarrow \{v_i\}$ ماتریس متناظر نگاشت T نسبت به پایه

$y^* = Ax^* \leftarrow A^* \leftarrow \{v_i^*\}$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃

از طرف دیگر مختصات یک بردار نسبت به دو پایه متفاوت به صورت

$x^* = Tx$

$y^* = Ty$

$$x^* = Tx\,,\quad y^* = Ty\,,\quad Ax = y\,,\quad A^* x^* = y^*$$

$$\Rightarrow y^* = Ty \Rightarrow A^* x^* = Ty \longrightarrow A^* T x = T y$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = T^{-1} A^* T x \\ y = Ax \end{array}\right\} \Rightarrow A = T^{-1} A^* T$$

or

$$A^* = T A T^{-1}$$

تعریف: ماتریس A و B را متشابه گویند اگر به ازای یک ماتریس ناتکین T رابطه زیر برقرار باشد

$$B = T^{-1} A T$$

A و A^* متشابه هستند.

خواص ماتریس‌های متشابه

$$A \approx B$$

۱- چندجمله‌ای یکسان و مقادیر ویژه یکسان دارند.

$$|A-\lambda I| = |B-\lambda I|$$

$$|B-\lambda I| = |T^{-1}AT - \lambda T^{-1}T| = |T^{-1}|\,|A-\lambda I|\,|T| = |A-\lambda I|$$

۲- دترمینان یکسان دارند

$$|A| = |B|$$

۳- رتبه یکسان دارند

$$\mathrm{Rank}(A) = \mathrm{Rank}(B)$$

۴- ترانهاده دو ماتریس متشابه، نیز متشابه‌اند

$$A^T \approx B^T$$

۵- $A^K \approx B^K$

۶- $tr(A) = tr(B)$ جمع المانهای قطر اصلی

۷- $f(A) \approx f(B)$

مثال: مجموعه‌های $v_i = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} \right\}$ و $v_i^* = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1^*}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2^*} \right\}$ را دو پایه برای فضای برداری R^2 در نظر بگیرید. ماتریس تبدیل بین دو پایه را حساب کنید.

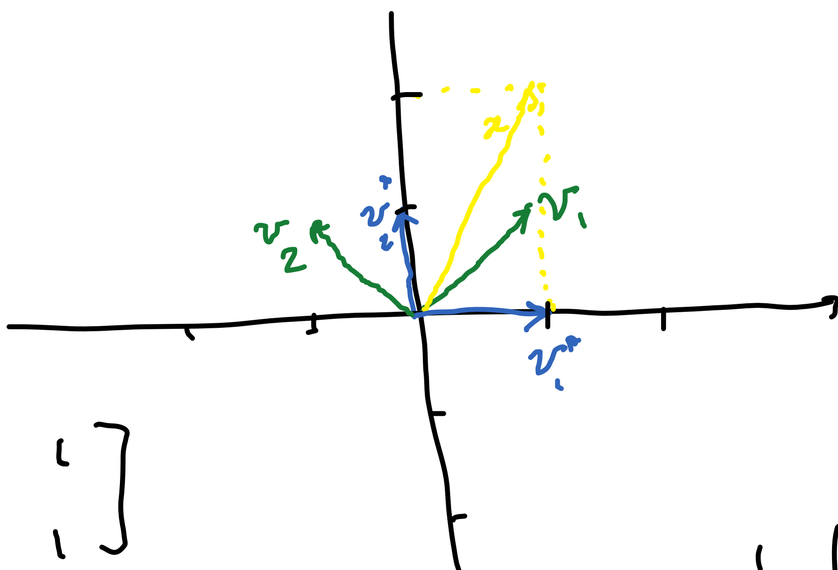
$$v_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} v_i^*$$

$$\begin{cases} v_1 = t_{11} v_1^* + t_{21} v_2^* \\ v_2 = t_{12} v_1^* + t_{22} v_2^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = t_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = t_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_{22} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = t_{11}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t_{21}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 1 = t_{11} \\ 1 = t_{21} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = t_{12}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t_{22}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -1 = t_{12} \\ 1 = t_{22} \end{array}$$

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



بردار $x^* = x_{v^*} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ را نسبت به پایه‌ی v محاسبه کنید

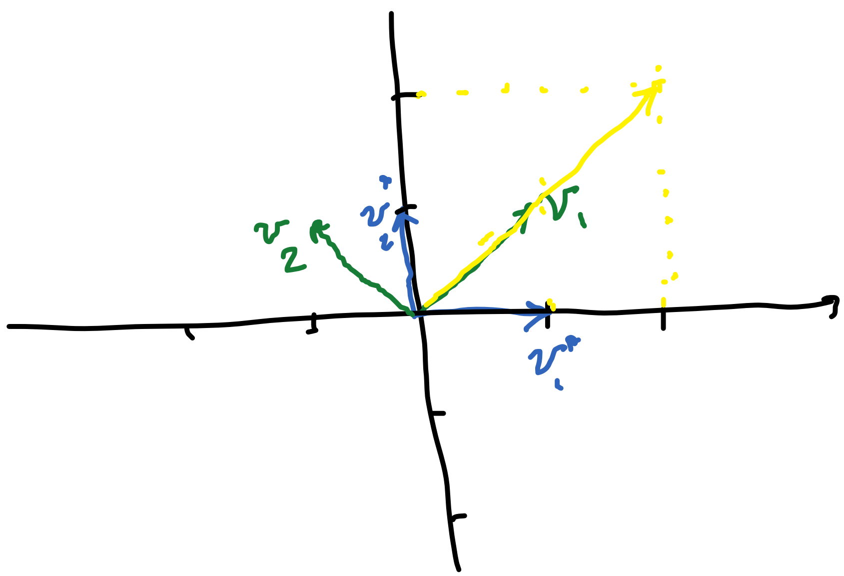
$$T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x^* = Tx \Rightarrow x = T^{-1}x^*$$

$$\Rightarrow x_v = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/2\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ را نسبت به پایه‌ی v حساب کنید.

$$x_v = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



برای مثال خطی نگاشت $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید.

ماتریس متناظر این نگاشت را نسبت به دو پایه v_i و v_i^* محاسبه کنید.

$$T(v_i)=\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, v_j \quad \text{یا} \quad T(v_j)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, v_i$$

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+a_{21}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=a_{12}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

ماتریس متناظر پایه v_i

ماتریس متناظر با پایه پ ج

ب، ص ۳۳ $\longrightarrow$ $A^{*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

رابطه بین ماتریس‌های متشابه را چک کنید:

$A = T^{-1} A^{*} T \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = T^{-1} A^{*} T$ ✓

جلسه ششم،

$$A = T^{-1} A^{*} T \longrightarrow TA = A^{*} T$$

مثال: آیا دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ متشابه هستند.

ماتریس $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وجود داشته باشد که در رابطه زیر صدق کند.

$$TA = BT \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = -a \Rightarrow a = 0 \\ d = -d \Rightarrow d = 0 \end{matrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

c و b را می توان هر مقدار را داد. در نظر گرفت. آ و بود،

قضیه اساسی جبر خطی Fundamental theorem of Linear Algebra

اگر $A_{m\times n}$ ماتریس متناظر تبدیل $T: R^n \to R^m$ باشد،

تعریف: فضای ستونی ماتریس A که آن را با $R(A)$، (Range A) (یا برد A) نشان می‌دهند، فضایی است که از ستون‌های مستقل ماتریس A تشکیل شده است.

مثال : $A_{m \times n}$: $A_{2 \times 4}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \equiv R^2 , \quad DIM([R(A)]) = 2$$

تعریف : فضای سطری ماتریس A، که با $R(A^T)$ نشان داده می‌شود فضایی است که از سطرهای مستقل ماتریس A ایجاد می‌شود.

$$R(A^T) = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\} .$$

$x \in R(A^T)$

$x = c_1 v_1 + c_2 v_2$

$R(A^T) \subset R^4$ 		زیرفضایی از R^4

اصل اول: فضای سطری ماتریس A با فضای ستونی ماتریس A^T برابر است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} , \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

فضای سطری ماتریس A = فضای ستونی A^T = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

اصل دوم: فضای ستونی ماتریس A با فضای سطری A^T برابر است.

قضیه: بعد فضای ستونی A $(R(A))$ با بعد فضای سطری A یا $(R(A^T))$ برابر است. و مساوی با رتبه ماتریس A می باشد.

$$DIM[R(A)] = DIM[R(A^T)] = r = Rank(A) \quad (*)$$

اصل سوم: صفر فضای، (فضای پوچ)، (Null space) ماتریس A را با $N(A)$ نشان می دهند و فضایی است که از مجموعه جواب های معادله $Ax=0$ ایجاد می شود.

$Ker(A)$ ، A هسته

$$\{x_1, x_2, \dots, x_{n-r}\}$$

قضیه: بعد فضای پوچی ماتریس A برابر است با

$$DIM[N(A)] = n - r \qquad A_{m \times n} \qquad (II)$$

اصل چهارم: صفر فضای A^T ، فضای ایجاد شده توسط جوابهای معادله $A^T x = 0$ ، که با $N(A^T)$ نشان داده می‌شود.

قضیه:

$$DIM[N(A^T)] = m - r \qquad (III)$$

(I) ، (II) و (III) شکل اولیه قضیه اساسی جبر خطی.

قضیه تعامد دو زیرفضا: دو زیرفضای V و W از فضای R^n را متعامد گویند اگر هر بردار v از V بر هر بردار w از W عمود باشد.

$$\forall v \in V, \forall w \in W \quad , \quad v \perp w \quad , \quad \langle v, w \rangle = 0 \quad , \quad v^T . w = 0$$

قضیه: برای هر ماتریس $A_{m\times n}$، $N(A)$ و $R(A^T)$ دو زیرفضای متعامد از R^n هستند و به همین ترتیب $N(A^T)$ و $R(A)$، دو زیرفضای متعامد از R^m هستند.

به طور خلاصه، چهار اصل اساسی جبر خطی به صورت زیر خواهد شد.

$$N(A) \perp R(A^T) \quad \text{و} \quad N(A^T) \perp R(A)$$

تعریف: درصورتی که V زیرفضایی از R^n باشد، فضایی که شامل تمام بردارهای عمود بر V است را متمم قائم آن گویند و با $V^\perp$ نمایش می دهند.

$$[N(A)]^\perp = R(A^T) \quad \text{و} \quad [R(A)]^\perp = N(A^T)$$

$$[R(A^T)] = N(A) \quad \text{و} \quad [N(A^T)]^\perp = R(A)$$

قضیه: دستگاه معادله $\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{x} = \underset{m\times 1}{b}$ دارای جواب است اگر $b \in R(A)$ باشد.

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b$$

v_1 تا v_r مستقل هستند.

$$b = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_r v_r + \overbrace{\cdots + x_n v_n}^{0}$$

$R(A)$، فضایی که توسط ستونهای مستقل ماتریس A ایجاد می‌شود.

مثال: چهار زیر فضای اصلی ماتریس زیر را بدست آورید و صحت قضیه اساسی جبر خطی را بررسی کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_{m\times n},\ m=2,\ n=4$$

$$R(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \qquad DIM[R(A)] = DIM[R(A^T)] = 1$$

$$R(A^T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

برای بدست $N(A)$، $Ax = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -4x_3 ,$$

$$2x_2 + 8x_3 = 0$$

$$N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\mathrm{DIM}\,[N(A)] = n - r = 4 - 1 = 3$$

بردارها باید مستقل از هم باشند.

$N(A^T)$, $A^T x = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \Rightarrow x_1 = -2x_2$$

$$N(A^T) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} ,$$

$$\mathrm{DIM}\left[N(A^T)\right] = m - r = 2 - 1 = 1$$

$$R(A) = \left\{ \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$R(A^T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\perp$

$\perp$

$$N(A^T) = \left\{ \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$\Rightarrow R(A^T) \perp N(A)$$

$$\{R(A), N(A^T)\} \xrightarrow{span} R^m$$

$$\{R(A^T), N(A)\} \xrightarrow{span} R^n$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0 \quad , \quad R(A) \perp N(A^T)$$

$$N(A)=\left\{ \underset{v_1}{\begin{bmatrix}0\\-4\\1\\0\end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}} \right\}$$

$$x = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = v_1 + 2v_2 + 4v_3 = \begin{bmatrix}0\\-4\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\4\end{bmatrix}$$

c_1 و c_2 و c_3 را دلخواه انتخاب کنید:

$$x = \begin{bmatrix}2\\-4\\1\\4\end{bmatrix}, \quad x \in N(A) \qquad R(A^T) = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\4\\0\end{pmatrix} \right\}$$

$$2\times 0 - 1\times 4 + 1\times 4 + 4\times 0 = 0 \qquad x \perp R(A^T)$$

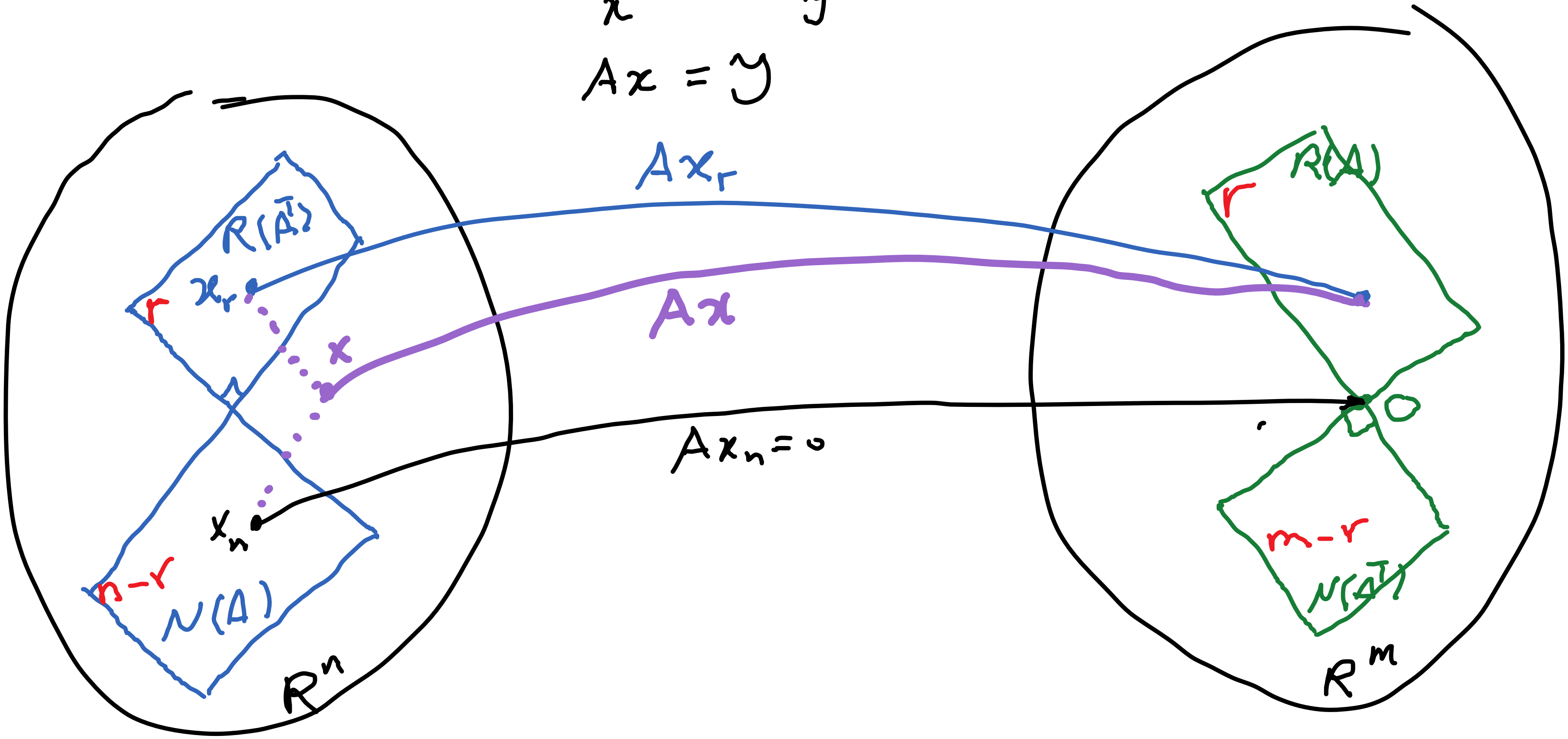
فضای تولید شده توسط $R(A)$ و $N(A^T)$، کل فضای R^m را پوشش می‌دهد.

فضای تولید شده توسط $R(A^T)$ و $N(A)$، کل فضای R^n را پوشش می‌دهد.

از طرف دیگر یک سیستم که ماتریس $A_{m\times n}$ ماتریس تبدیل متناظر با آن است $T: R^n \to R^m$

$$T : \underset{x}{R^n} \longrightarrow \underset{y}{R^m} \quad , \; x \in R^n , \; y \in R^m$$

$$Ax = y$$



$$x_n \in N(A) \ , \qquad A x_n = 0$$

$$x_r \in R(A^T) \ ,$$

$$x \in R^n \ , \quad x = x_r + x_n \longrightarrow Ax = A(x_r + x_n) = Ax_r + \cancelto{0}{Ax_n}$$

$$\Rightarrow Ax = Ax_r$$

$$R(A^T) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} \right\}$$

$$N(A) = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_4} \right\}$$

$$x = \overbrace{2v_1}^{x_r} + \overbrace{3v_2 + v_3}^{x_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10+44 \\ -20+88 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 68 \end{bmatrix}$$

$$Ax_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+32 \\ 4+64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 68 \end{bmatrix}$$

$$Ax = Ax_r$$

معادله $Ax=b$ در صورتی جواب دارد که $b\in R(A)$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 8 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}$$

$R(A)=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ ؛ فرض کنید $b=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ ، $b\notin R(A)$

$$\Rightarrow\ \begin{matrix}x_2+4x_3=1 \to 2x_2+8x_3=2\\ 2x_2+8x_3=1\end{matrix} \longrightarrow 1=2$$

اشکال پیش می‌آید

$b \in R(A)$ ، $b = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x_2 + 4x_3 = 0.5$

$2x_2 + 8x_3 = 1 \rightarrow x_2 + 4x_3 = 0.5$

$x_2 = 1 \rightarrow 4x_3 = -0.5 \rightarrow x_3 = -\frac{1}{8}$

$x_1 = a_1 ,\ x_4 = a_4 \longrightarrow x = \begin{bmatrix} a_1 \\ 1 \\ -\frac{1}{8} \\ a_4 \end{bmatrix}$

یا $x = \begin{bmatrix} a_1 \\ 1/2 \\ 0 \\ a_4 \end{bmatrix}$