کنترل مدرن

نظریه سیستمهای خطی

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

فصل چهارم، نظریه سیستمهای خطی

حل معادلات حالت یک سیستم خطی به ازای شرایط اولیه و ورودی و پاسخ زمانی این معادلات را بدست آوریم.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

ما با یک دسته معادله دیفرانسیل داریم.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ,$$

یک معادله دیفرانسیل ساده:

$$\dot{x} = -x + u(t)$$

$$x(0) = \checkmark \quad , \quad u(t) = \checkmark \quad , \quad x_h \; , \; x_p$$

برای یک معادله دیفرانسیل به صورت زیر

$$\dot{X} = AX + Bu$$

- پاسخ همگن، (پاسخ سیستم با ورودی صفر)

$$u = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{array} \Rightarrow X_h \text{ یا } X_{zi}$$

zero input

- پاسخ خصوصی، (پاسخ با شرایط اولیه صفر)

$$X(0) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = AX + Bu \\ X(0) = 0 \\ u(t) = \checkmark \end{array} \right\} \Rightarrow X_p \text{ یا } X_{zs}$$

zero state

از آنجا که سیستم خطی است می توان پاسخ نهایی سیستم را به صورت زیر نوشت

$$\begin{cases}\dot{X} = AX + Bu \\ X(0) = X_0 \\ u(t) = v\end{cases} \longrightarrow X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

خطی بودن پاسخ همگن

فرض کنید شرایط اولیه $x_1(0) = x_{10}$ $\xrightarrow{\text{پاسخ } zi}$ $x_1(t)$

و به ازای $x_2(0) = x_{20}$ $\xrightarrow{\text{پاسخ } zi}$ $x_2(t)$

باید نشان داد اگر $\Longrightarrow x(0) = \alpha x_{10} + \beta x_{10}$

آنگاه $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ باشد.

اثبات از کتاب خوانده شود

خطی بودن پاسخ ZS

$x(0)=0$

اگر پاسخ سیستم به ورودی u_1 ، $x_1(t)$ باشد

و " " " " u_2 ، $x_2(t)$ باشد

آنگاه پاسخ سیستم به ورودی $\alpha u_1 + \beta u_2$ ، $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ خواهد شد.

خطی بودن پاسخ zi ، $u=0$

اگر پاسخ سیستم به شرایط اولیه $x(0)=x_{10}$ ، $x_1(t)$ باشد

و " " " " $x(0)=x_{20}$ ، $x_2(t)$ باشد

آنگاه پاسخ سیستم به ازای شرایط اولیه $x(0)=\alpha x_{10}+\beta x_{20}$ ،

$x(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$ خواهد شد.

خاصیت روی هم گذاری،

- اگر پاسخ سیستم به ازای: $u=0$ ⟵ x_{zi} ، x_h

- 〃 〃 〃 〃 $x(0)=0$ ⟵ x_{zs} ، x_p

آنگاه: پاسخ نهایی را می‌توان از جمع دو پاسخ قبلی به دست آورد

$$x(t) = x_{zi} + x_{zs} = x_h + x_p$$

حل معادلات حالت سیستم های LTI (Linear time invariant)

A و B و C و D تابعی از زمان نیستند
بصورت A(t) نمی‌آیند

پاسخ همگن: x_{zi} ، x_h ، $u=0$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق}} \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= A\dot{x} = AAx = A^2x \\ \dddot{x} &= A^2\dot{x} = A^2Ax = A^3x \\ &\vdots \\ x^{(k)} &= A^kx \end{aligned}$$

$x \in R^n, \quad A \in R^{n \times n}$

$$\dot{x}(t) = A x(t) \longrightarrow \dot{x}(0) = A x(0)$$

$$\ddot{x}(t) = A \dot{x} = A A x = A^2 x(t) \longrightarrow \ddot{x}(0) = A^2 x(0)$$

$$\dddot{x} = A^2 \dot{x} = A^2 A x = A^3 x$$

$$\vdots$$

$$x^{(k)} = A^k x \longrightarrow x^{(k)}(0) = A^k x(0)$$

حل با نوشتن بسط سری تیلور پاسخ $x(t)$ در زمان صفر داریم

$$x(0+t) = x(0) + \dot{x}(0)\, t + \frac{1}{2!}\ddot{x}(0)\, t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} x^{(k)}(0)\, t^k + \cdots$$

$$\Rightarrow x(t) = x(0) + A x_0 t + \frac{1}{2!} A^2 x_0 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k x_0 t^k + \cdots$$

$$x(t) = x_0 + Ax_0 t + \frac{1}{2!}A^2 x_0 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k x_0 t^k + \cdots$$

$$\Rightarrow x(t) = \left(I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \cdots + \frac{A^k t^k}{k!} + \cdots \right) x_0$$

$$\Rightarrow x(t) = \varphi(t)\, x_0$$

$\varphi(t) = e^{At}$ ماتریس انتقال حالت

یا ماتریس نمایی گفته می‌شود.

$$x(t) = e^{At} x_0$$

e^t , $e^{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}t}$,

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^k}{k!} + \cdots$$

exponential matrix

مثال:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x \\ x(0) = a \end{cases} \longrightarrow x(t) = e^{-2t} x(0) = a e^{-2t}$$

$x \in R^1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - x_2 \\ x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \end{cases} \longrightarrow \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}}_{A} x$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$x \in R^2$

$$x(t) = e^{At} x(0)$$

خصوصیات ماتریس نمایی

$$1-\quad e^{A0} = \varphi(0) = I \quad , \quad A \in R^{n\times n} , \quad I \in R^{n\times n}$$

$$2-\quad e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} \cdot e^{At_2} = e^{At_2} \cdot e^{At_1}$$

$$\varphi(t_1+t_2) = \varphi(t_2+t_1) = \varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2) = \varphi(t_2)\cdot\varphi(t_1)$$

$$x(t_1+t_2) = e^{At_2}x(t_1) \quad , \quad x(t_1+t) = e^{At}x(t_1)$$

$$, \; x(t_1) = e^{At_1}x(0) \Rightarrow x(t_1+t_2) = \underline{e^{At_2}\,e^{At_1}}\,x(0) = \underline{e^{A(t_1+t_2)}}\,x(0)$$

3- $\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}$, $\varphi^{-1}(t) = \varphi(-t)$

4- $\left(e^{At}\right)^{T} = e^{A^{T}t}$,

5- $A \cdot e^{At} = e^{At} A$

6- $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$, $\frac{d}{dt}\varphi(t) = A\varphi(t)$

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(x(t)\right) \quad , \quad x(t) = e^{At}x(0)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{d}{dt}\left(e^{At}x(0)\right) = \left(\frac{d}{dt}e^{At}\right)x(0)$$

از طرف دیگر داریم

$$\dot{x} = Ax(t) = Ae^{At}x(0)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$

پاسخ کامل معادلات حالت

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$e^{-At}\left(\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t)\right)$$

$$\Rightarrow e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) = e^{-At}Bu(t)$$

5

$$\Rightarrow e^{-At}\dot{x}(t) - Ae^{-At}x(t) = e^{-At}Bu(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right) = e^{-At}Bu(t)$$

از دو طرف معادله انتگرال می‌گیریم

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right) = e^{-At}Bu(t)$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}\left(e^{-A\tau}x(\tau)\right)d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \left[e^{-A\tau}x(\tau)\right]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$\left[e^{-A\tau}x(\tau)\right]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow e^{At}\left(e^{-At}x(t) - e^{-At_0}x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau\right)$$

حال دو طرف معادله را در e^{At} ضرب می‌کنیم

$$\Rightarrow x(t) - e^{A(t-t_0)}x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$x(t) - e^{A(t-t_0)} x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)} x(t_0)}_{x_h} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau}_{x_p}$$

$$x(t) = x_{zi} + x_{zs}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{zi} = e^{A(t-t_0)} x(t_0) \xrightarrow{t_0 = 0} x_{zi} = e^{At} x(0) \\ x_{zs} = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) \end{cases}$$

$$x(t) = \varphi(t-t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi(t-\tau)\,B\,u(\tau)\,d\tau$$

از مسائل زیر یکی را انتخاب کنید و در طول ترم مباحث تدریس شده را برای آن انجام دهید:

۱- پاندول معکوس دو لینکی ← تمرینات فصل ۳

۲- مسئله جرثقیل سقفی، ← " " "

۳- سیستم تعلیق وسیله ← مسئله حل شده کتاب فصل ۳

۴- ربات دو لینکی، ← مسئله حل شده داخل فصل

بخش اول پروژه:

- استخراج معادلات دینامیکی،
- مدلسازی و شبیه سازی در MATLAB . (سیستم غیرخطی)
- محاسبه نقاط تعادل
- خطی سازی سیستم حول نقاط تعادل ⟵ (A, B, C, D)

e^{At}

روشهای محاسبه ماتریس انتقال حالت

- روش تبدیل لاپلاس ⟵ از پاسخ کامل
- روش کیلی همیلتون ⟵ خاصیت e^{At}
- روش قطری سازی (جردن).

روش تبدیل لاپلاس

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$\Rightarrow (sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

و $I_{n\times n}$ ماتریس یکه

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}\left[x(0) + BU(s)\right]$$

$$\Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$X(s) = (sI-A)^{-1}\underline{x(0)} + (sI-A)^{-1}B\underline{U(s)}$$

$$x(t) = e^{At}\underline{x(0)} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\underline{u(\tau)}\,d\tau$$

$$\mathcal{L}(x(t)) = X(s)\,, \quad \mathcal{L}\left[e^{At}\right] = (sI-A)^{-1}$$

$$e^{At} = \varphi(t) \Rightarrow \mathcal{L}\left[e^{At}\right] = \varphi(s) = (sI-A)^{-1}$$

$$x_{zs} = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \int_0^t \varphi(t-\tau) B u(\tau) d\tau$$

$$X_{zs}(s) = (sI-A)^{-1} B U = \varphi(s) B U(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t g(t-\tau) f(\tau) d\tau\right] = G(s) F(s)$$

ضمیمه، انتگرال کانولوشن

$$\mathcal{L}[x_{zs}(t)] = \varphi(s) B U(s)$$

نهایتاً برای محاسبه پاسخ کامل از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$X(s) = (sI-A)^{-1}x(0) + (sI-A)^{-1}BU(s) \qquad \text{I}$$

$$X(s) = \varphi(s)\,x(0) + \varphi(s)BU(s)$$

۱- $(sI-A)^{-1}$ را باید محاسبه کنیم.

۲- با استفاده از رابطه I ، $X(s)$ را محاسبه کنیم

۳- با گرفتن عکس تبدیل لاپلاس ، $x(t)$ را حساب کنیم.

مثال: پاسخ کامل سیستم زیر را به ورودی پله واحد به ازای شرایط اولیه دلخواه $x(0)=x_0$ تعیین کنید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{s^2+4s+3} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \lambda_1 = -1 , \quad \lambda_2 = -3$

$$X(s) = \Phi(s)\,x(0) + \Phi(s)\,B\,U(s)$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow X(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{s+4}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{-3}{(s+1)(s+3)} & \frac{s}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{ZI} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)(s+3)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}}_{ZS}$$

محاسبه عکس تبدیل لاپلاس، به روش بسط به کسرهای جزئی،

$$\frac{1}{(S+1)(S+3)} = \frac{a_1}{S+1} + \frac{a_2}{S+3} = \frac{0.5}{S+1} + \frac{-0.5}{S+3}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{S(S+1)(S+3)} = \frac{a_1}{S} + \frac{a_2}{(S+1)} + \frac{a_3}{S+3} = \frac{\frac{1}{3}}{S} + \frac{-\frac{1}{2}}{S+1} + \frac{\frac{1}{6}}{S+3}$$

$$-3(-2)$$

$$\varphi(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{3/2}{s+1} + \dfrac{-1/2}{s+3} & \dfrac{1/2}{s+1} + \dfrac{-1/2}{s+3} \\[2ex] \dfrac{-3/2}{s+1} + \dfrac{3/2}{s+3} & \dfrac{-1/2}{s+1} + \dfrac{3/2}{s+3} \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(t) =$$

$$\varphi(s) B U(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1/3}{s} + \dfrac{-1/2}{s+1} + \dfrac{1/6}{s+3} \\[2ex] \dfrac{1/2}{s+1} + \dfrac{-1/2}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s)=\begin{bmatrix} \frac{3/2}{s+1}+\frac{-1/2}{s+3} & \frac{1/2}{s+1}+\frac{-1/2}{s+3} \\ \frac{-3/2}{s+1}+\frac{3/2}{s+3} & \frac{-1/2}{s+1}+\frac{3/2}{s+3} \end{bmatrix}=$$

$$\Phi(t)=e^{At}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ -3e^{-t}+3e^{-3t} & -e^{-t}+3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s)BU(s)=\begin{bmatrix} \frac{1/3}{s}+\frac{-1/2}{s+1}+\frac{1/6}{s+3} \\ \frac{1/2}{s+1}+\frac{-1/2}{s+3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-3t} \\ \frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$x_{zi} = \varphi(t)\,x(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ -3e^{-t} + 3e^{-3t} & -e^{-t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$x_{zi} = \begin{bmatrix} x_{1zi} \\ x_{2zi} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a(3e^{-t} - e^{-3t}) + b(e^{-t} - e^{-3t}) \\ a(-3e^{-t} + 3e^{-3t}) + b(-e^{-t} + 3e^{-3t}) \end{bmatrix}$$

$$x_{zs} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \\ \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \end{bmatrix}, \qquad x(t) = x_{zi} + x_{zs} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

مودهای دینامیکی

در سیستم های خطی به مقادیر ویژه ماتریس A، مودهای دینامیکی گفته می شود

$$(SI-A)^{-1} = \frac{Adj(SI-A)}{\det(SI-A)} \longrightarrow$$ مقادیر ویژه های A را

$$\varphi(s) = (SI-A)^{-1} = \frac{\sim}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots} = \frac{A_{11}}{s-\lambda_1} + \frac{A_{12}}{s-\lambda_2} + \cdots$$

$$\rightarrow \varphi(t) = A_{11} e^{\lambda_1 t} + A_{12} e^{\lambda_2 t} \cdots$$

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

از تعریف مقدار ویژه داریم

$$\rightarrow A^2 v_i = \lambda_i A v_i = \lambda_i(\lambda_i v_i) = \lambda_i^2 v_i \quad , \ldots , \quad A^k v_i = \lambda_i^k v_i$$

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k t^k}{k!} + \cdots$$

$$e^{At} v_i = v_i + A v_i t + \frac{A^2 v_i t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k v_i t^k}{k!} + \cdots$$

$$\Rightarrow e^{At} v_i = v_i + \lambda_i v_i t + \frac{\lambda_i^2 v_i t^2}{2} + \cdots + \frac{\lambda_i^k v_i t^k}{k!} + \cdots$$

$$e^{At} v_i = v_i + \lambda_i v_i t + \frac{\lambda_i^2 v_i t^2}{2} + \cdots + \frac{\lambda_i^k v_i t^k}{k!} + \cdots$$

$$\Rightarrow e^{At} v_i = \left(1 + \lambda_i t + \cdots + \frac{\lambda_i^k t^k}{k!} + \cdots\right) v_i$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{At} v_i = e^{\lambda_i t} v_i}$$

یعنی بردارویژه‌های e^{At} همان بردارویژه‌های A هستند

و اگر λ_i مقادیرویژه ماتریس A باشد، $e^{\lambda_i t}$ مقادیر ویژه‌های ماتریس e^{At} هستند.

$$A v_i = \lambda_i v_i$$

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ -3e^{-t} + 3e^{-3t} & -e^{-t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس e^{At}

$$\lambda_1 = e^{-t}, \quad \lambda_2 = e^{-3t}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \det(\lambda I - A) = (\lambda+1)(\lambda+3)$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -3$$

$$A v_2 = \lambda_2 \cdot v_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = -x_1 \qquad \xrightarrow{\lambda_1 = -1} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$-3x_1 - 4y_1 = -y_1 \longrightarrow -3x_1 - 3y_1 = 0$$

$$x_1 = -y_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = -3x_1 \longrightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$-3x_1 - 4y_1 = -3y_1 \rightarrow -3x_1 - y_1 = 0$$

برای مثال قبل پاسخ zi را برای شرایط اولیه v_1 , v_2 محاسبه کنید

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} , \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$x_{zi} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ -3e^{-t} + 3e^{-3t} & -e^{-t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} v_i = e^{\lambda_i t} v_i$$

$$x_{zi} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ -3e^{-t} + 3e^{-3t} & -e^{-t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2e^{-3t} \\ -6e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$= e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

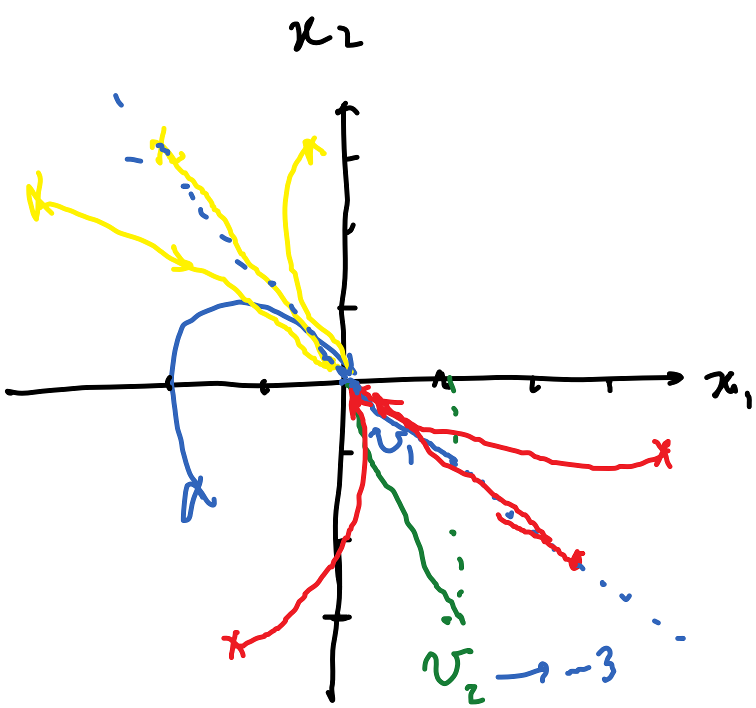
نمایش هندسی این بکنه،

صفحه فاز

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x \in \mathbb{R}^2$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$



$$x_{zi} = e^{At}\, x(0)$$

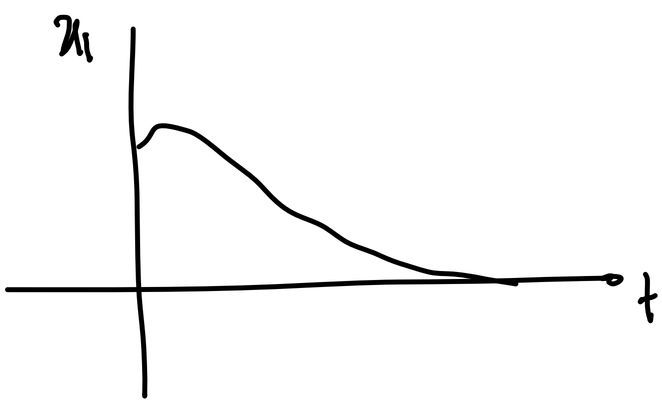
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

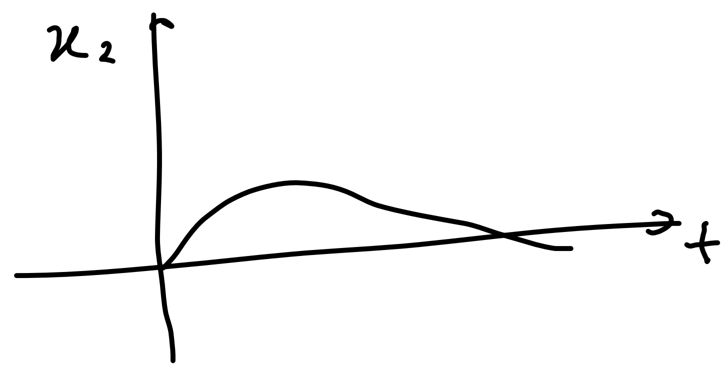
$x_1(t) = \checkmark$

$x_2(t) = \checkmark$

ode45,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 4x_2 \end{cases}$$





جلسه هشتم

Caley-Hamilton

روش کیلی-همیلتون

معادله مشخصه ماتریس A را بصورت زیر می توان نوشت.

$$Q(\lambda) = \Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

$$\Rightarrow Q(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

مقادیر ویژه ها ←

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

$$Q(\lambda_i) = 0$$

λ_i ها را مقادیر ویژه ماتریس A می گویند.

قضیه کیلی همیلتون: هر ماتریس در معادله مشخصه خود صدق می‌کند

$$Q(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

$$Q(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$$

محاسبه وارون ماتریس A:

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A = -a_0 I$$

$$A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I = -a_0 A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{a_0}\left[A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I\right]$$

حال چندجمله‌ای $N(\lambda)$ از مرتبه m $(m>n)$ را در نظر بگیرید

$N(\lambda)$ را بر $Q(\lambda)$ تقسیم کنیم.

$$N(\lambda) \;\big|\; Q(\lambda) \;\;\; F(\lambda) \qquad \vdots \qquad R(\lambda)$$

$$\Rightarrow \underbrace{N(\lambda)}_{m} = \underbrace{F(\lambda)}_{m-n}\underbrace{Q(\lambda)}_{n} + \underbrace{R(\lambda)}_{n-1}$$

با جایگذاری $\lambda=\lambda_i$ که $Q(\lambda_i)=0$ پس داریم

$$N(\lambda_i) = R(\lambda_i)$$

طبق قضیه کیلی همیلتون

$$N(A) = F(A)\,\cancelto{0}{Q(A)} + R(A) \Rightarrow N(A) = R(A)$$

$$\begin{cases} N(\lambda_i) = R(\lambda_i) & \text{و} \quad R(\lambda) = \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 \\ N(A) = R(A) & \text{و} \quad R(A) = \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 \end{cases}$$

α_i ها مجهول هستند که باید در سیستم حل بدست آیند

تابع N را می‌توان هر تابع دلخواهی در نظر گرفت

$$N(\lambda) = \sin \lambda t \quad \longrightarrow \quad N(A) = \sin At$$

$$N(\lambda) = e^{\lambda t} \quad \longrightarrow \quad N(A) = e^{At}$$

$$N(\lambda) = (\lambda t)^2 \quad \longrightarrow \quad N(A) = (At)^2$$

$$N(\lambda_i) = R(\lambda_i) = \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

ما n مقدار ویژه داریم که می‌توان در رابطه بالا جایگذاری کرد و n مجهول، $\alpha_0 , \alpha_1 , \ldots , \alpha_{n-1}$ را محاسبه نمود.

$$\begin{cases} N(\lambda_1) = R(\lambda_1) \\ N(\lambda_2) = R(\lambda_2) \\ \vdots \\ N(\lambda_n) = R(\lambda_n) \end{cases} \xrightarrow[\text{n مجهول}]{\text{n معادله}} \xrightarrow{\text{حل}} \alpha_i \text{ ها} = \checkmark$$

$$N(A) = R(A) = \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_0 I \Rightarrow N(A) = \checkmark$$

روند محاسبه یک تابع ماتریسی مثل $N(A)$

۱- محاسبه مقادیر ویژه های A

۲- محاسبه α_i ها با استفاده از رابطه $N(\lambda_i) = R(\lambda_i)$

۳- محاسبه $N(A)$ ، $N(A) = R(A)$

مثال: ماتریس انتقال حالت را برای سیستم زیر محاسبه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \quad , \quad e^{At} \quad , \quad N(A) = e^{At} \; , \; N(\lambda) = e^{\lambda t}$$

$$Q(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ 1 & \lambda+5 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+5) + 6$$

$$\Rightarrow Q(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda+2)(\lambda+3)$$

$$\longrightarrow \lambda_1 = -2 \; , \quad \lambda_2 = -3$$

$$N(\lambda) = R(\lambda) = \alpha_1 \lambda + \alpha_0 \quad , \quad n=2$$

$$\lambda = \lambda_1 \Rightarrow e^{\lambda_1 t} = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_0$$

$$\lambda = \lambda_2 \rightarrow e^{\lambda_2 t} = \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) \quad e^{-2t} = -2\alpha_1 + \alpha_0 \\ (2) \quad e^{-3t} = -3\alpha_1 + \alpha_0 \end{cases}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow \alpha_1 = e^{-2t} - e^{-3t} \quad ,$$

$$(1) \Rightarrow \alpha_0 = e^{-2t} + 2(e^{-2t} - e^{-3t}) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}$$

$$N(A) = e^{At} = R(A) = \alpha_1 A + \alpha_0 I$$

$$e^{At} = \alpha_1 A + \alpha_0 I =$$

$$\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} + \left(3e^{-2t} - 2e^{-3t}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \\ -e^{-2t} + e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس A تکراری باشد

λ_i ، m بار تکرار شده باشد

$$N(\lambda) = R(\lambda)$$

$$\frac{dN(\lambda)}{d\lambda} = \frac{dR}{d\lambda}$$

$$\frac{d^2N(\lambda)}{d\lambda^2} = \frac{d^2R}{d\lambda^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{m-1}N(\lambda)}{d\lambda^{m-1}} = \frac{d^{(m-1)}R}{d\lambda^{m-1}}$$

e^{At}

مثال: برای ماتریس زیر، ماتریس نمایی را محاسبه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 27 & -27 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow Q(\lambda) = |\lambda I - A| = -(3-\lambda)^3$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3 \quad , \quad N(\lambda) = e^{\lambda t}$$

$$N(\lambda) = R(\lambda) \longrightarrow e^{\lambda t} = \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

$$\frac{dN(\lambda)}{d\lambda} = \frac{dR}{d\lambda} \longrightarrow t e^{\lambda t} = 2\alpha_2 \lambda + \alpha_1$$

$$\frac{d^2 N}{d\lambda^2} = \frac{d^2 R}{d\lambda^2} \longrightarrow t^2 e^{\lambda t} = 2\alpha_2$$

$$e^{\lambda t} = \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

$$t e^{\lambda t} = 2\alpha_2 \lambda + \alpha_1$$

$$t^2 e^{\lambda t} = 2\alpha_2$$

$$\xRightarrow{\lambda = 3} \begin{cases} e^{3t} = 9\alpha_2 + 3\alpha_1 + \alpha_0 & \to \alpha_0 = \checkmark \\ t e^{3t} = 6\alpha_2 + \alpha_1 & \to \alpha_1 = \checkmark \\ t^2 e^{3t} = 2\alpha_2 & \to \alpha_2 = \dfrac{t^2 e^{3t}}{2} \end{cases}$$

$$N(A) = e^{At} = \alpha_2 A^2 + \alpha_1 A + \alpha_0 I$$

$$\alpha_1 = (t - 3t^2) e^{3t}, \quad \alpha_0 = \left(1 - 3t + \frac{9}{2} t^2\right) e^{3t}$$

مثال: برای ماتریس زیر، $\sin At$ را محاسبه کنید.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}, \quad \lambda_1=-2, \quad \lambda_2=-3$$

$$N(\lambda)=\sin \lambda t, \quad N(A)=\sin(At)$$

$$N(\lambda)=R(\lambda) \longrightarrow \sin\lambda t=\alpha_1\lambda+\alpha_0$$

$$\left.\begin{aligned}\sin(-2t)&=-2\alpha_1+\alpha_0\\ \sin(-3t)&=-3\alpha_1+\alpha_0\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\longrightarrow \alpha_1=\checkmark\\ &\longrightarrow \alpha_0=\checkmark\end{aligned}$$

$$N(A)=\sin(At)=\alpha_1 A+\alpha_0 I=\checkmark$$

مثال: $\underline{e^{At}}$

$$A=\begin{bmatrix}2&1&4\\0&2&0\\0&3&1\end{bmatrix}, \quad Q(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

$$\lambda_1=\lambda_2=2, \quad \lambda_3=1$$

$$N(\lambda)=R(\lambda)=\alpha_2\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_0$$

$$\Rightarrow e^{\lambda t}=\alpha_2\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_0$$

$$\Rightarrow te^{\lambda t}=2\alpha_2\lambda+\alpha_1$$

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_1=2 &\rightarrow e^{2t}=4\alpha_2+2\alpha_1+\alpha_0\\ \lambda_2=2 &\rightarrow te^{2t}=4\alpha_2+\alpha_1\\ \lambda_3=1 &\rightarrow e^{t}=\alpha_2+\alpha_1+\alpha_0\end{aligned}\right.$$

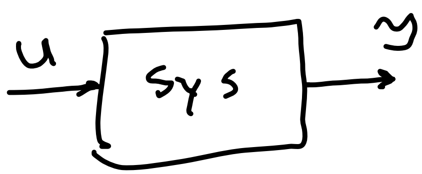
$$\Rightarrow e^{At}=\alpha_2A^2+\alpha_1A+\alpha_0 I$$

$$\Leftarrow \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 = \checkmark$$

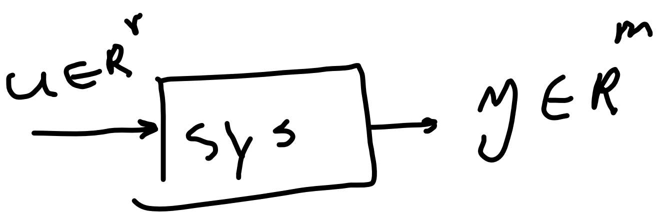
ماتریس تبدیل سیستم های خطی

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

تابع تبدیل یک سیستم، تبدیل لاپلاس خروجی به ورودی



$\rightarrow \quad G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$ و SISO



$$\rightarrow \quad H(s) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1r} \\ \vdots & & & \\ H_{m1} & \cdots & & H_{mr} \end{bmatrix}_{m \times r}$$

MIMO

$$\dot{x} = Ax + Bu \xrightarrow{\mathcal{L}} sX = AX + BU$$

با فرض شرایط اولیه صفر

$$\Rightarrow (sI - A)X = BU \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$y = Cx + Du \rightarrow Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$\Rightarrow Y = C(sI - A)^{-1}BU + DU$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

مثال: برای سیستم زیر ماتریس تبدیل را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases} \qquad , \qquad H(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} s+4 \\ -2+s \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} s+4 \\ s-2 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+4}{s^2+3s+2} \\[2ex] \dfrac{s-2}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}$$

MATLAB

tf , zpk

ss2tf or tf2ss

مثال حل شده را بخوانید

قطب و صفرهای انتقال

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B + D$$

$$H(s) \in \mathbb{R}^{m \times r}$$

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)s} \; ,$$

$$B = [b_1 \; b_2 \; \dots \; b_r] \; , \quad C = \begin{bmatrix} c_1^T \\ c_2^T \\ \vdots \\ c_m^T \end{bmatrix} \; , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b_i \in \mathbb{R}^{n \times 1} \qquad c_i \in \mathbb{R}^{n \times 1} \Rightarrow c_i^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow H(s) = \begin{bmatrix} c_1^T \\ \vdots \\ c_m^T \end{bmatrix} (sI-A)^{-1} [b_1 \cdots b_r] + D$$

$b_1 \quad b_2$

$$H_{ij} = c_i^T (sI-A)^{-1} b_j + d_{ij} = \frac{c_i^T \, Adj(sI-A) \, b_j}{\det(sI-A)} + d_{ij}$$

$$= \frac{c_i^T \, Adj(sI-A) \, b_j + d_{ij} \det(sI-A)}{\det(sI-A)}$$

قطبهای تابع تبدیل، مقادیر ویژه‌های ماتریس A هستند؛
اما همه مقادیر ویژه‌ها، قطبهای تابع تبدیل سیستم نیستند.

$H(s_0)=0$, $\quad H(s_0)\,w=0$, $\quad \exists\, w\neq 0 \quad \dots$

$\Rightarrow$ در صورتی $w\neq 0$ وجود دارد که ماتریس زیر تکین باشد:

$$\begin{bmatrix} -s_0I+A & B \\ C & D \end{bmatrix} \Rightarrow \det\begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix}=0$$

مثال: برای سیستم زیر صفرها و قطبها را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$-s_0I=\begin{bmatrix} -s_0 & 0 \\ 0 & -s_0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=0 \longrightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2$$

$$\det\begin{bmatrix} -s_0 & 1 & 1 \\ -2 & -3-s_0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1\big(1-(-3-s_0)\big) = (4+s_0)=0$$

$$\Rightarrow s_0=-4$$