کنترل مدرن

نظریه سیستمهای خطی، قطری سازی و فرم جردن

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

تبدیلهای همانندی Similarity transformation

نمایش فضای حالت برای یک سیستم یکتا نیست.

و با انتخاب متغیرهای حالت مختلف می‌توان نمایش‌های مختلف داشت.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{x = TZ} \begin{cases} T\dot{Z} = ATZ + Bu \\ y = CTZ + Du \end{cases} \xrightarrow{T^{-1}} \begin{cases} \dot{Z} = T^{-1}ATZ + T^{-1}Bu \\ y = CTZ + Du \end{cases}$$

که T یک ماتریس غیرتکین است $n \times n$ ثابت

$$H(s) = C(SI-A)^{-1}B + D, \quad \hat{H}(s) = CT(SI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B$$

$$\Rightarrow \hat{H}(s) = CT(\underbrace{ST^{-1}T - T^{-1}AT}) ^{-1}T^{-1}B = CT\underbrace{[T^{-1}(SI - A)T]}^{-1}T^{-1}B$$

$$= \underbrace{CT\{T^{-1}}_{I}(SI-A)^{-1}\underbrace{T\}T^{-1}}_{I}B = C(SI-A)^{-1}B = H(s)$$

مثال :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad , \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x = TZ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{Z} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} Z \end{cases}$$

قطری سازی، حالتی که مقادیر ویژه ماتریس A متمایز باشند. و حقیقی

$$A \longrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad , \quad A v_i = \lambda_i v_i$$

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

$$\begin{cases} A v_1 = \lambda_1 v_1 \\ A v_2 = \lambda_2 v_2 \\ \vdots \\ A v_n = \lambda_n v_n \end{cases} \Rightarrow A \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}}_{T} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}}^{\Lambda}$$

$$\Rightarrow AT = T\Lambda \Rightarrow A = T\Lambda T^{-1}$$

$$\Rightarrow \Lambda = T^{-1}AT$$

$$x = Tz \Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y = CTz + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = \Lambda z + T^{-1}Bu \\ y = CTz + Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} , \quad \begin{cases} \dot{z} = \Lambda z + T^{-1}Bu \\ y = CTz + Du \end{cases} , \quad x = Tz$$

$$x(0) = x_0$$

$$\downarrow u=0$$

$$Zi \Rightarrow \quad x(t) = e^{At}x(0)$$

$$u=0 \rightarrow z(t) = e^{\Lambda t}z(0) \Rightarrow z(t) = e^{\Lambda t}T^{-1}x(0)$$

$$x(t) = Tz(t) \Rightarrow x(0) = Tz(0) \Rightarrow z(0) = T^{-1}x(0)$$

$$x(t) = Tz(t) \Rightarrow x(t) = \underbrace{Te^{\Lambda t}T^{-1}}x(0)$$

$$x(t) = \underbrace{e^{At}}x(0)$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}}$$

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u$$

الف- ماتریس تبدیل آن را بیابید که این سیستم را قطری کند.

ب- پاسخ این سیستم را برای $x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $u(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ به دست آورید.

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \longrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = -2 \longrightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \lambda_3 = -3 \longrightarrow v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 1/2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu = \Lambda z + T^{-1}Bu$$

$$T^{-1}AT = \Lambda \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = T\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}T^{-1}$$

$$u=0: \quad \boxed{x_{zi} = e^{At}x(0)}$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1/2 & 2 \\ 3 & 6 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 + \frac{1}{2}t + 2 & (1) \\ \dot{z}_2 = -2z_2 + 3t + 6 \\ \dot{z}_3 = -3z_3 + \frac{1}{2}t + 1 \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow z_{1h} = e^{-t}z_1(0), \quad z_{1p} = At + B \to \dot{z}_{1p} = A$$

$$A = -At - B + \frac{1}{2}t + 2 \Rightarrow 0 = \left(-A + \frac{1}{2}\right)t - A - B + 2$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}, \quad -A - B + 2 = 0 \Rightarrow B = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow z_{1p} = \frac{t}{2} + \frac{3}{2}$$

$$z_{1h} = e^{-t} z(0), \quad z_{1p} = \frac{t}{2} + \frac{3}{2}$$

$$z_1(t) = a e^{-t} z(0) + \frac{t}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow z_1(0) = a z_1(0) + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a z_1(0) = z_1(0) - \frac{3}{2}$$

$$z_1(t) = \left(z_1(0) - \frac{3}{2}\right) e^{-t} + \frac{t}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = e^{-t} z_1(0) + \frac{t}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} e^{-t} \\ z_2 = e^{-2t} z_2(0) + \frac{3}{2} t + \frac{9}{4}\left(1 - e^{-2t}\right) \\ z_3 = e^{-3t} z_3(0) + \frac{1}{6} t + \frac{5}{18}\left(1 - e^{-3t}\right) \end{cases}$$

$$x = TZ \Rightarrow x(0) = TZ(0) \Rightarrow Z(0) = T^{-1}x(0)$$

$$Z(0) = T^{-1}\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/2 \\ 34 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

$$x = TZ = \begin{bmatrix} - x_1(t) \\ - x_2(t) \\ -7e^{-t} + \frac{29}{3}e^{-3t} - \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه مختلط ،

$$\lambda_{1,2} = \sigma_1 \pm j\omega_1 \,, \quad \lambda_{3,4} = \sigma_3 \pm j\omega_3 \,, \quad \dots \,, \quad \lambda_{m,m+1} = \sigma_m \pm j\omega_m$$

$$v_1, v_2 \qquad\qquad v_3, v_4 \qquad\qquad \dots \qquad\qquad v_m, v_{m+1}$$

$$v_1 = a + bj$$

$$v_2 = a - bj$$

$$T = \left[Re(v_1) \,, Im(v_1) \,, Re(v_3) \,, Im[v_3] \,, \dots \,, Re[v_m] \,, Im[v_m] \right]$$

$$\Lambda = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 & 0 & & & 0 \\ -\omega_1 & \sigma_1 & & & & \\ & & \sigma_3 & \omega_3 & & \\ 0 & & -\omega_3 & \sigma_3 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \sigma_m & \omega_m \\ 0 & & 0 & & & -\omega_m & \sigma_m \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 1j \Rightarrow v_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \pm j \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+j \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1-j \end{bmatrix}$$

$$T = \left[Re(v_1) \quad Im[v_1] \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{z} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\lambda_{1,2} = \sigma \pm \omega j, \quad \lambda_3 = a, \quad \lambda_4 = b$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \sigma & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه تکراری

$$\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \underbrace{\lambda_i , \lambda_i , \dots \lambda_i}_{r \text{ بار}} , \lambda_{i+1} , \dots$$

$$q = n - \mathrm{Rank}(A - \lambda_i I) =$$

تعداد بردارهای ویژه‌ی مستقل

تعداد بلوک‌های جردن

$$\lambda_1 , \lambda_1 , \lambda_1 , \lambda_1 , \lambda_1 \longrightarrow q = 2$$

$$(A - \lambda_1 I) v = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_1^0 \longrightarrow v_1^1 \longrightarrow v_1^2 \\ v_2^0 \longrightarrow v_2^1 \end{cases}$$

$$(A - \lambda_1 I) v_1^1 = v_1^0 \longrightarrow v_1^1$$

$$(A - \lambda_1 I) v_1^2 = v_1^1 \longrightarrow v_1^2$$

$$(A - \lambda_1 I) v_2^1 = v_2^0 \longrightarrow v_2^1$$

$$T = \begin{bmatrix} v_1^0 & v_1^1 & v_1^2 & v_2^0 & v_2^1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = J = \left[\begin{array}{ccc|cc} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & 0 \\ 0 & & \lambda_1 & & \\ \hline & & & \lambda_1 & 1 \\ & 0 & & 0 & \lambda_1 \end{array}\right]$$

$$q = 5 \Rightarrow J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_1 & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & \\ & 0 & & \lambda_1 & \\ & & & & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad q = 1 \rightarrow J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & 0 \\ & \lambda_1 & 1 & & \\ & & \lambda_1 & 1 & \\ 0 & & & \lambda_1 & 1 \\ & & & & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$J_{3\times3}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix},\quad J_{2\times2}=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=Te^{Jt}T^{-1},\quad e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}$$

$$e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t}\\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ 0 & 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1\ ,\quad \underbrace{\lambda_{2,3,4} = 3}_{q=2}\ ,\quad \underbrace{\lambda_{5,6} = 4}_{q=1}$$

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2^0 & v_2^1 & v_2^{0'} & v_5^0 & v_5^1 \end{bmatrix}$$

$$J = \left[\begin{array}{c|cc|c|cc} 1 & 0 & & & & \\ \hline & 3 & 1 & & & \\ & & 3 & 0 & & \\ \hline & & & 3 & & \\ \hline & & & & 4 & 1 \\ & & & & & 4 \end{array}\right]$$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \frac{t^3}{3!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

$$J = \left[\begin{array}{ccc|c|cc} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ \hline & & & 2 & & \\ \hline & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{Jt}$$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} & 0 & & \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & & & \\ 0 & 0 & e^{2t} & & & \\ & & & e^{2t} & & \\ & & & & e^{3t} & te^{3t} \\ & & & & & e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -12 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} x$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 = (\lambda+2)^3 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$$

$$A - \lambda I = \times(-3) \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -12 & 2 & 1 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \times(-2) \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \times(-2) \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Rank}(A - \lambda I) = 2$$

$$q = n - \text{Rank}(A - \lambda I) = 3 - 2 = 1$$

$$(A-\lambda I)v=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 0\\ -12 & 2 & 1\\ -8 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-4a_1+a_2=0 \xrightarrow{a_1=1} a_2=4\\ -12a_1+2a_2+a_3=0\\ -8a_1+2a_3=0 \Rightarrow a_3=4\end{cases}$$

$$v_1^0=\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 4\end{bmatrix}$$

$\lambda=-2$

$$(A-\lambda I)v_1^1=v_1^0 \Rightarrow \begin{bmatrix}-4 & 1 & 0\\ -12 & 2 & 1\\ -8 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 4\end{bmatrix}\Rightarrow v_1^1=\begin{bmatrix}1\\ 5\\ 6\end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda I)v_1^2=v_1^1 \Rightarrow v_1^2=\begin{bmatrix}1\\ 5\\ 7\end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} v_1^0 & v_1^1 & v_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow T^{-1} = \checkmark$$

$$J = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B' = T^{-1} B = \begin{bmatrix} 9 \\ -13 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad C' = CT = [5 \; 5 \; -9]$$

$$\begin{cases} \dot{z} = Jz + B'u \\ y = C'z + Du \end{cases}, \quad e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}, \quad e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{t^2}{2} e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At} x(0)$$

تکالیف این فصل : ۴ – ۱ ، ۴ – ۲

– با استفاده از روش تبدیل لاپلاس e^{At} را محاسبه کنید.

الف) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ب) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

صحت نتایج را با دستورهای زیر می توانید چک کنید.

```
IA=inv(s*eye(2,2)-A)
phi=ilaplace(IA)
```

– پاسخ کامل سیستم زیر را به ورودی پله و شرایط اولیه $x(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ با روش تبدیل لاپلاس و قطری سازی محاسبه کنید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

- ماتریس انتقال حالت ماتریس زیر را با روش کیلی همیلتون محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad e^{At} = ?$$

راهنمایی: دقت کنید که این ماتریس حالت قطری دارد.

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} \end{bmatrix}$$

$$A_1 = -1, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

پس کافی است $e^{A_2 t}$ را محاسبه کنید.

$$\Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$e^{A_2 t}$}} \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

- برای سیستم زیر

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

الف - ماتریس تابع تبدیل را بدست آورید و پاسخ را با متلب چک کنید (دستور tf یا ss2tf)

ب - قطبهای سیستم را محاسبه کنید و " " " " " " " (دستور pole)

ج - صفرهای انتقال سیستم را " " " " " " " " " (دستور tzero)

نکته: ماتریس D باید به صورت زیر در نظر گرفته شود،

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- سیستم های زیر را به فرم قطری تبدیل کنید و تبدیل همانندی لازم را تعیین کنید.

الف)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

- مقادیر ویژه‌های ماتریس‌های A به صورت زیر به دست آمده است

$-2, -2, -2, -3, -3, -4, -4, -5$

for $\lambda = -2 \Rightarrow$ 2 بردار ویژه مستقل

for $\lambda = -3 \Rightarrow$ 1 بردار ویژه مستقل

for $\lambda = -4 \Rightarrow$ 2 بردار ویژه مستقل

for $\lambda = -5 \Rightarrow$ یک " " " "

الف - فرم جردن ماتریس A را بنویسید.

ب - e^{Jt} را محاسبه کنید

ج - e^{At} به چه صورت خواهد شد.

- مسائل مربوط به آونگ وارون دوتایی، جرثقیل سقفی، موتور با هارمونیک درایو
در فصل چهارم حل شود.

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$|A - \lambda I| = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (-2-\lambda)\left[(\lambda+2)(\lambda+1)+1\right] = -(\lambda+2)\left[\lambda^2+3\lambda+3\right]$$

$$\rightarrow \quad \lambda_1 = -2$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-12}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}\, j}{2}$$

$$\lambda_1 = -2 \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} +1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1.5 + \frac{\sqrt{3}}{2} j \Rightarrow \begin{bmatrix} -1-(-1.5+\frac{\sqrt{3}}{2} j) & 2 & -1 \\ 0 & -2-(-1.5+\frac{\sqrt{3}}{2} j) & 0 \\ 1 & 0 & \ldots \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 & -1 \\ 0 & -0.5-\frac{\sqrt{3}}{2} j & 0 \\ 1 & 0 & -0.5-\frac{\sqrt{3}}{2} j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} (0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2})a_1 + \cancel{2a_2}^{\,0} - a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_1 + (0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2} j)a_3 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2} j \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2} j \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \left[v_1 \quad Re[v_2] \quad Im(v_2) \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow T^{-1} = \checkmark$$

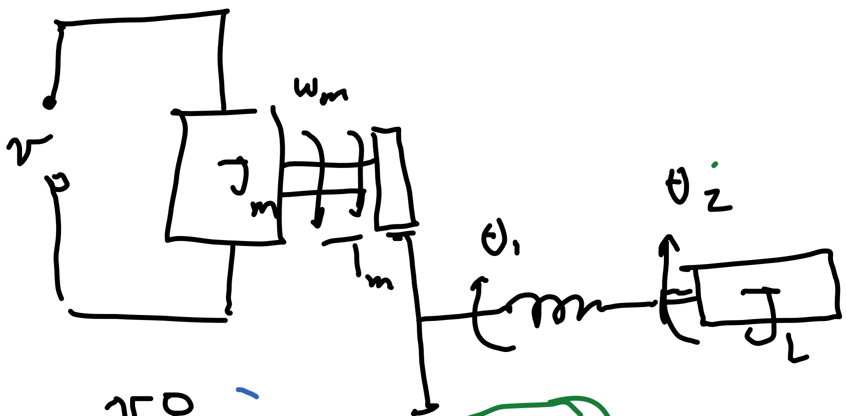
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = cx \end{cases} \xrightarrow{x = TZ} \begin{cases} \dot{Z} = T^{-1} A T Z + T^{-1} B u \\ y = c T Z \end{cases}$$

$$T = \left[v_1 \quad Re[v_2] \quad Im(v_2) \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & \sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow T^{-1} = \checkmark$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \xRightarrow{x = Tz} \begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y = CTz \end{cases}$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1.5 \end{bmatrix} z + T^{-1}Bu$$

$$y = CTz$$

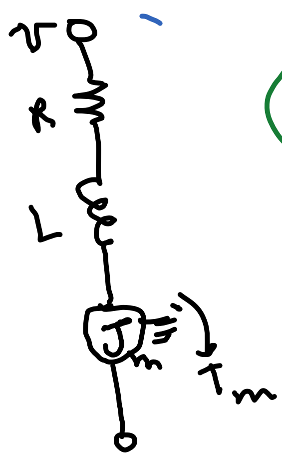


$T_m = K_m i$

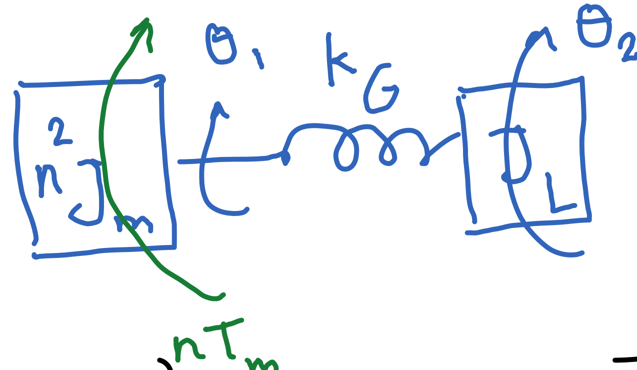
$v - v_{emf} = Ri + L\frac{di}{dt}$

$v_{emf} = K_b \omega_m$

$n = \frac{\theta_m}{\theta_L}$



[illegible] $\to \left(J_m + \frac{J_L}{n^2}\right)\dot{\omega}_m + T_d = T_m$

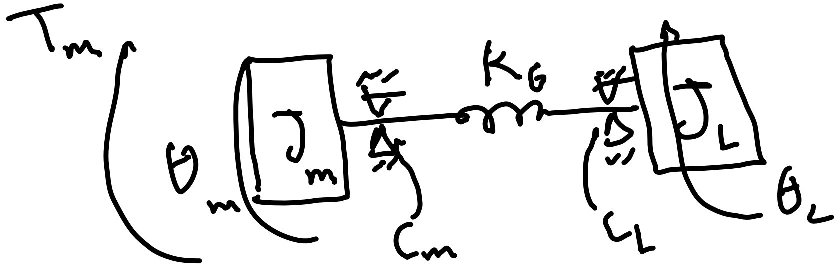


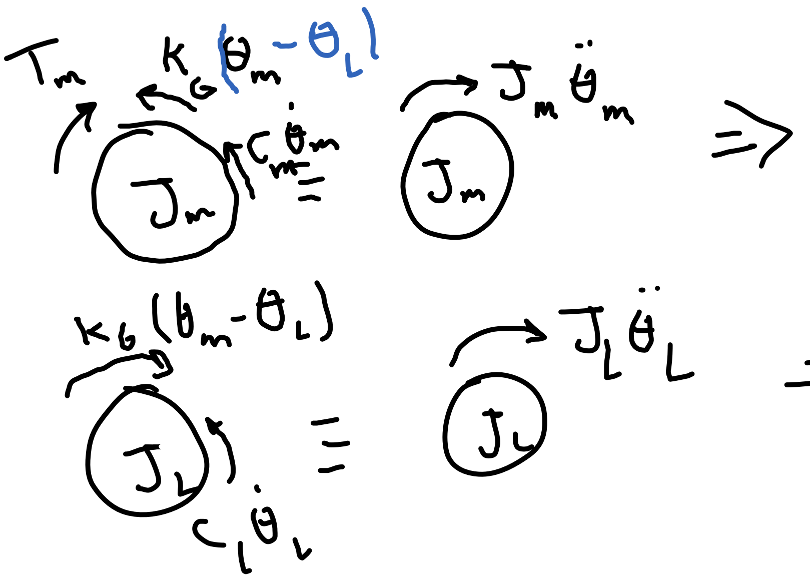
$\to A_{5\times5}$

A, B, C

$H(s) = C(sI-A)^{-1}B$

ss2tf(A, B, C, D)





$$\Rightarrow \begin{cases} T_m - K_G(\theta_m-\theta_L) - C_m\dot\theta_m = J_m\ddot\theta_m \\ K_G(\theta_m-\theta_L) - C_L\dot\theta_L = J_L\ddot\theta_L \end{cases}$$