ریاضی مهندسی پیشرفته

جبر خطی، نظریه طیفی ماتریسها

قطری سازی ماتریسها

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

جلسه هفتم

نظریه طیفی ماتریسها، spectral theorem

قطری سازی ماتریسها،

مقادیر ویژه‌ها و بردار ویژه‌ها،

تعریف: فرض کنید $A_{n\times n}$، ماتریس متناظر تبدیل خطی $T: V_n \to V_n$ باشد.

$x_i \qquad y_i$

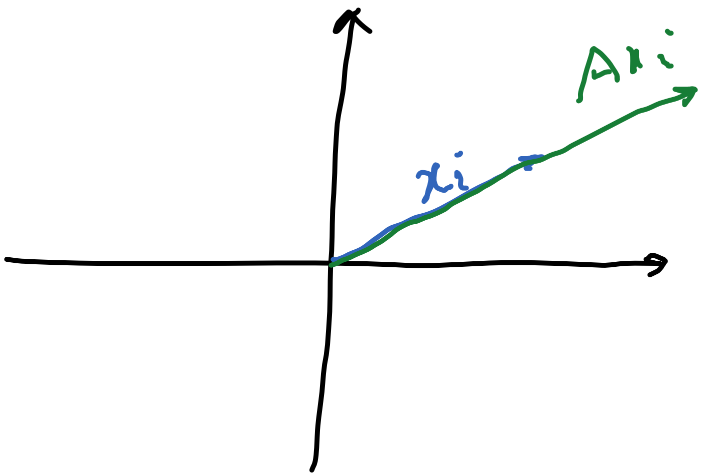
اگر برای $x_i \in V_n$ داشته باشیم:

$$A x_i = \lambda_i x_i$$

eigenvalue

آنگاه x_i را بردار ویژهٔ متناظر λ_i برای ماتریس A می‌گویند.

eigen vector



به عبارت دیگر بردار ویژه‌ها، جهت‌هایی در فضای n بعدی هستند که تحت تأثیر ماتریس A، تغییر جهت نمی‌دهند. و فقط طول آنها بزرگتر یا کوچکتر می‌شود.

برای یک ماتریس $A_{n\times n}$ ، فضای یک تبدیل تحت $T: V_n \to V_n$ ،

n بردار ویژه و n مقدار ویژه خواهیم داشت.

تعریف: مجموعه مقادیر ویژه‌های ماتریس A را $\{\lambda_i , i=1,\dots,n\}$ طیف ماتریس A گویند

$$Ax = \lambda x \Rightarrow Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0$$

این یک دستگاه معادلات همگن است و در صورتی جواب غیر صفر دارد $(x \neq 0)$ که،

$\det(A - \lambda I) = 0$ ، از حل این معادله مقادیر ویژه محاسبه شده. وسپس بردارویژه‌ها را بدست می‌آوریم.

قضیه: هر یک از شرایط زیر شرط لازم و کافی برای آن است که λ مقدار ویژه ماتریس $A_{n\times n}$ باشد

۱- بردار $x \neq 0$ وجود داشته باشد که $Ax = \lambda x$

۲- ماتریس $A - \lambda I$ تکین باشد. $\mathrm{Rank}(A - \lambda I) < n$

۳- $\Delta(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$

در حالت کلی $|A-\lambda I|$ یک چندجمله‌ای مرتبه n برحسب λ است که ریشه‌های آن مقدار ویژه‌های A می‌باشند. این چندجمله‌ای را، معادله مشخصه ماتریس A می‌گویند.

$$\Delta(\lambda) = \det(A-\lambda I) = |A-\lambda I| =$$

$$(-\lambda)^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

$$= (-1)^n (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

با مساوی صفر قرار دادن $\Delta(\lambda)=0$ ، مقادیر ویژه بدست می‌آید.

مثال: مقادیر ویژه ها و بردار ویژه های ماتریس زیر را حساب کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = (1-\lambda)(3-\lambda) - 4$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5} \quad \text{و}$$

MATLAB

eig(A)

$$\lambda_1 = 2-\sqrt{5}, \qquad Av = \lambda_1 v$$

معادلات (1) و (2) مستقل نیستند
و ما از یکی از آنها استفاده می‌کنیم

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (2-\sqrt{5}) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1)\quad x_1 + 2x_2 = (2-\sqrt{5})\,x_1 \\ (2)\quad 2x_1 + 3x_2 = (2-\sqrt{5})\,x_2 \end{cases}$$

فرض $x_1 = 1 \rightarrow$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

$$2x_2 = -1 + 2 - \sqrt{5} = 1 - \sqrt{5} \rightarrow x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$x_1 = 1$

$$3x_2 - 2x_2 + \sqrt{5}\,x_2 = -2 \Rightarrow (1+\sqrt{5})\,x_2 = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{-2}{1+\sqrt{5}}$$

$$x_2 = \frac{-2}{1+\sqrt{5}} \times \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{1-5} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_2 = 2+\sqrt{5} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (2+\sqrt{5}) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 + 2x_2 = (2+\sqrt{5})x_1 \longrightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \frac{2+\sqrt{5}-1}{2}$$

باید $v_1 \perp v_2$ چون ماتریس A متقارن است.

v =

-0.8507	0.5257
0.5257	0.8507

$$v_1 = \begin{bmatrix} -0.8507 \\ 0.5257 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0.5257 \\ 0.8507 \end{bmatrix}$$

0.8506

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

0.38

مثال: مقدار ویژه‌ها و بردار ویژه‌های ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\Rightarrow |A-\lambda I|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&0\\-1&2-\lambda&-1\\0&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(-1)^{1+1}(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&-1\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix}-1&-1\\0&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda)-1\right]+\left[(\lambda-1)\right]$$

$$=(1-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda)-1-1\right]=(1-\lambda)\left[\lambda^2-3\lambda+2-2\right]$$

$$=(1-\lambda)\lambda(\lambda-3)$$

$$\lambda_1=0$$
$$\lambda_2=1$$
$$\lambda_3=3$$

$$(A-\lambda I)v=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1)\quad x_1-x_2=0 \rightarrow x_1=x_2 \\ (2)\quad -x_1+2x_2-x_3=0 \\ (3)\quad -x_2+x_3=0 \end{cases}$$

$(1)+(2) \longrightarrow (3)$ ✓

معادله (3) وابسته به (1) و (2) می‌باشد.

$$(2) \rightarrow -x_1+2x_1-x_3=0 \Rightarrow x_1=x_3 \Rightarrow v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 \longrightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_3 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ یا } v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال: مقادیر ویژه و بردار ویژه ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 1-\lambda \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)\left[(1-\lambda)(5-\lambda)-4\right] + 4\left[-2(5-\lambda)-8\right] + 2\left[-4-4(1-\lambda)\right]$$

$$-\lambda^3+4\lambda^2+27\lambda-90=0$$

$$\Rightarrow \lambda^3-4\lambda^2-27\lambda+90=0 \quad , \quad (\lambda-3)$$

$$\lambda=3 \Rightarrow 3^3-4\times 9-27\times 3+90=0$$

$$
\begin{array}{l|l}
\lambda^3-4\lambda^2-27\lambda+90 & \lambda-3 \\ \cline{2-2}
\underline{\lambda^3-3\lambda^2} & \lambda^2-\lambda-30 \\
\quad -\lambda^2-27\lambda & \\
\quad \underline{-\lambda^2+3\lambda} & \\
\qquad -30\lambda+90 & \\
\qquad \underline{-30\lambda+90} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$$\longrightarrow \Delta(\lambda)=(\lambda^2-\lambda-30)(\lambda-3)$$

$$=(\lambda-3)(\lambda+5)(\lambda-6)$$

$$\begin{cases} \lambda_1=-5 \\ \lambda_2=3 \\ \lambda_3=6 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = -5 \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 6 \rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 16 \end{bmatrix}$$

تعمیم: اگر λ مقدار ویژه ماتریس $A_{n\times n}$ و x بردار ویژه آن باشد

- $\alpha\lambda$ مقدار ویژه αA با همان بردار ویژه است.
- $(\lambda-\mu)$ مقدار ویژه $(A-\mu I)$ است با همان بردار ویژه
- اگر A ناتکین باشد $(\lambda_i \neq 0)$ آنگاه مقادیر ویژه A^{-1} ، λ^{-1} می‌باشند
با همان بردار ویژه‌ها
- λ^m مقدار ویژه A^m است. با همان بردار ویژه‌ها

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \underset{v_1}{\lambda_1 = -5}, \quad \underset{v_2}{\lambda_2 = 3}, \quad \underset{v_3}{\lambda_3 = 6}$$

$$A^{-1} \longrightarrow \underset{v_1}{\lambda_1 = -\frac{1}{5}}, \quad \underset{v_2}{\lambda_2 = \frac{1}{3}}, \quad \underset{v_3}{\lambda_3 = \frac{1}{6}}$$

$$2A \longrightarrow \lambda_1 = -10, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 12$$

بردار ویژه‌ها تغییر نمی‌کنند همان بردار ویژه‌های ماتریس A هستند:

$v_1, \ v_2, \ v_3$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda_1 = -3 , \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 8$$

$$A^2 \longrightarrow \lambda_1 = 25, \lambda_2 = 9 , \lambda_3 = 36$$

خواص مقادیر ویژه و بردار ویژه

در ماتریس

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

با مقادیر ویژه λ_1 و $\lambda_2 \dots \lambda_n$ خواص زیر برقرار است.

۱- جمع عناصر روی قطر اصلی A برابر است با حاصل جمع مقادیر ویژه ها

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

۲- دترمینان ماتریس A برابر است با حاصلضرب مقادیر ویژه

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

اگر یکی از λ_i ها صفر شود، دترمینان A صفر خواهد شد.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -5, \ \lambda_2 = 3, \ \lambda_3 = 6$$

$$tr(A) = -2 + 1 + 5 = -5 + 3 + 6 = 4$$

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -3 \times 5 \times 6 = -90$$

۳- مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی) عناصر روی قطر اصلی هستند.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 5\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$ و $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-3$

۴- مقادیر ویژه‌های A و A^T باهم برابر هستند.

بردارهای ویژه‌های A و A^T، برابر نیستند.

۴ - مقادیر ویژه مزدوج ترانهاده A (A^H) ، مزدوج مقادیر ویژه A هستند.

(ماتریس های موهومی)

$$A=\begin{bmatrix} 1+2i & -3i & 1+4i \\ 2+3i & 2 & 3-5i \\ 1+2i & 1+i & 1+3i \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1=\sigma_1+i\omega_1 \text{ و } \lambda_2=\sigma_2+i\omega_2 \text{ و } \lambda_3=\sigma_3+i\omega_3$$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 1-2i & +3i & 1-4i \\ 2-3i & 2 & 3+5i \\ 1-2i & 1-i & 1-3i \end{bmatrix} , \quad \bar{A}^T=A^H=\begin{bmatrix} 1-2i & 2-3i & 1-2i \\ 3i & 2 & 1-i \\ 1-4i & 3+5i & 1-3i \end{bmatrix}$$

$$A^H \longrightarrow \lambda_1=\sigma_1-i\omega_1 , \quad \lambda_2=\sigma_2-i\omega_2 , \quad \lambda_3=\sigma_3-i\omega_2$$

5- ماتریس مرجعی A را ناقص می‌گویند اگر به ازای یک مقدار ویژه تکراری (k بار) تعداد بردارهای ویژه مستقل کمتر از k باشد.

در این حالت ماتریس به طور کامل قطری نمی‌شود و به فرم جردن در می‌آید.

قضیه: ماتریس $A_{n\times n}$ را ساده گویند اگر ماتریس ناتکین T وجود داشته باشد بطوری که $T^{-1}AT=\Omega$، Ω نمایش قطری ماتریس A است، و

$$\Omega=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

ضمناً می‌بینیم ستون‌های ماتریس T از بردارهای ویژه تشکیل شده است

۶- خصوصیت ماتریسهای متقارن و هرمیتی:

- دارای مقادیر ویژه‌های حقیقی، متمایز هستند.

- به ازای هر مقدار ویژه، یک بردار ویژه به دست می‌آید و بردار ویژه‌ها یک مجموعه متعامد را تشکیل می‌دهند

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 2-3i \\ 1-2i & 2 & 5j \\ 2+3i & -5j & -4 \end{bmatrix}$$

Hermitian Matrix

۷ - مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس مثبت معین هرمیتی همواره مثبت هستند، عکس آن نیز درست است.

$$\forall x \neq 0 \quad x^T A x > 0 \longrightarrow \lambda_i > 0$$

۸ - مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس متقارن حقیقی، خوش وضعیت (Well - conditioned) هستند. یعنی با کوچکترین تغییر در درایه‌های ماتریس، مقادیر ویژه هم به طور جزئی تغییر می‌کنند.

۹- در حالت کلی، مقادیر ویژه و بردار ویژه های یک ماتریس با پس ضرب کردن یا پیش ضرب کردن یک ماتریس ناتکین دیگر تغییر می کند.

A و AT و TA

پس ضرب کردن A در T

پیش ضرب

۱۰- ماتریس های متشابه، مقادیر ویژه یکسانی دارند.

$$A = T^{-1} B T$$

اما عکس این قضیه درست نیست. دو ماتریس که دارای مقادیر ویژه یکسان هستند لزوماً متشابه نیستند.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، A و B متشابه نیستند.

جلسه هشتم

قطری سازی

$A_{n\times n}$ مقادیر ویژه ماتریس A متمایز باشند:

بنابراین به ازای هر مقدار ویژه λ_i یک بردار ویژه v_i خواهیم داشت.

$$\begin{cases} Av_1=\lambda_1 v_1 \\ Av_2=\lambda_2 v_2 \\ \vdots \\ Av_n=\lambda_n v_n \end{cases} \Rightarrow A\underbrace{\begin{bmatrix} \overset{v_1}{x_1} & x_2 & \cdots & \overset{v_n}{x_n}\end{bmatrix}}_{M\ :\ \text{modal Matrix}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Omega}$$

ستونهای ماتریس M، بردارهای ویژه ماتریس A هستند.

$$\Rightarrow AM = M\Omega \Rightarrow M^{-1}AM=\Omega$$

بردار ویژه‌ها مستقل هستند و $\operatorname{Rank}(M)=n$. ماتریس M همواره معکوس پذیر است.

$$\Rightarrow \quad M^{-1}AM = \Omega = M'^{-1}AM'$$

ماتریس A و Ω متشابه هستند. و تمام خواص ماتریس‌های متشابه که قبلاً گفته شد را دارا هستند.

ماتریس مودال (M) یکتا نیست، چون اگر v_1 بردار ویژه A باشد، αv_1 بردار ویژه A خواهد بود.

$$M=[v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]$$

$$M'=[\alpha_1 v_1 \quad \alpha_2 v_2 \quad \dots \quad \alpha_n v_n]$$

مشکلی در فرآیند قطری سازی پیش نمی‌آید.

$\alpha_i \neq 0$ دلخواه

مثال: نمایش قطری ماتریس زیر را به دست آورید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = 1, \; \lambda_3 = 3$$

مقادیر ویژه ها متمایز هستند

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M = [v_1 \; v_2 \; v_3] \Rightarrow M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad M^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} A M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} v_2 & v_1 & v_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \Omega = M^{-1} A M = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Omega = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 3 \end{bmatrix}$$

مثال: نمایش قطری ماتریس زیر را به دست آورید:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[\lambda^2 + 1\right] = 0$$

$$v_2'' = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = i \ , \ \lambda_3 = -i$$

$$\lambda_2 = i \longrightarrow (A - \lambda_2 I)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -ix_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - ix_2 = 0 \rightarrow x_1 = ix_2 \\ (1-i)x_3 = 0 \longrightarrow x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}$$

یا $v_2' = \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$

$v_2' = -v_2$

$$\lambda_1 = 1 \longrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = -i \longrightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M = [v_1 \ \ v_2 \ \ v_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \bar{v}_3$$

$$M^{-1} A M = \Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

$[M \ \Omega] = \text{jordan}(A) \longleftarrow$ MATLAB در نرم افزار

مقادیر ویژه تکراری

در حالت کلی فرض کنید که مقادیر ویژه‌های ماتریس A به صورت زیر باشد:

$$\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \underbrace{\lambda_i , \lambda_i , \dots , \lambda_i}_{\text{بار تکرار شد } m_i} , \lambda_{i+1} , \dots , \lambda_n$$

در چنین حالتی ابتدا باید شاخص تباهیدگی (Degeneracy) را به صورت زیر محاسبه کنیم.

$$q_i = n - \mathrm{Rank}(A - \lambda_i I) \quad , \quad 1 \leqslant q_i \leqslant m_i$$

q_i تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی است که به ازای λ_i می‌توان محاسبه کرد.

حالت اول $q_i = m_i$

اگر چه مقادیر ویژه‌ها تکراری هستند اما به ازای هر مقدار ویژه یک بردار ویژه مستقل خواهیم داشت و ماتریس A را شبیه به حالت قبل (مقادیر ویژه غیرتکراری) می‌توان قطری کرد.

حالت دوم $q_i = 1$

فقط یک بردار ویژه برای λ_i به دست می‌آید برای مابقی بردارهای ویژه‌ها ($m_i - 1$) باید بردار ویژه تعمیم یافته را حساب کنیم.

نحوهٔ محاسبه بردارهای ویژه تعمیم یافته

(از نظریهٔ جردن)

$$
\begin{cases}
(A-\lambda_1 I)v_1 = 0 \\
(A-\lambda_1 I)v_2 = v_1 \\
\quad \vdots \\
(A-\lambda_1 I)v_k = v_{k-1}
\end{cases}
$$

$$
M = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_k] \Rightarrow M^{-1}AM = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{bmatrix}
$$

در این حالت ماتریس به طور کامل قطری نمی‌شود. (شبه قطری) (فرم جردن)

حالت سوم $1 < q_i < m_i$

در اینجا ترکیبی از دو حالت قبل خواهد شد.

q_i تعداد بلوک جردن می باشد.

مثال: $\lambda_1 , \lambda_1 , \lambda_1 , \quad q_1 = 2$

$$\left.\begin{array}{l} v_1^0 \longrightarrow v_1^1 \\ v_2^0 \end{array}\right\} \Rightarrow M = \begin{array}{ccc} \text{اصلی} & \text{عمومی} & \text{اصلی} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$M = \begin{bmatrix} v_1^0 & v_1^1 & v_2^0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M^{-1}AM = J = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_1 \end{array}\right]$$

مثال: ماتریس زیر را قطری کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \ , \quad \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_3 = 1 \longrightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rank}(A - 2I) = 1$$

$$q = n - \operatorname{Rank}(A - 2I) = 3 - 1 = 2$$

$$\lambda = 2$$

$$(A-2I)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3 \Rightarrow v_1^{0} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2^{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نیازی به بردار ویژه‌های تعمیم یافته نیست

$$M = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{M^{-1}AM} \Omega = \begin{bmatrix} 2 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

مثال: ماتریس زیر را قطری کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$\lambda = 1 \rightarrow$

$$A - \lambda I = A - I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathrm{Rank}(A - \lambda I) = 2$$

فقط یک بردار ویژه مستقل می توان یافت

$$q = n - \mathrm{Rank}(A - \lambda I) = 3 - 2 = 1$$

حالت دوم یک بلوک جردن

$$(A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$2x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$4x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

درست است $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$(A-\lambda I)v_1^1 = v_1^0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

دلخواه

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 1 & \longrightarrow x_2 = \frac{1}{2} \\ 4x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow v_1^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda I)v_1^2 = v_1^1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_3 = 0.5 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x_2 = \frac{5}{16}, \quad v_1^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/16 \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} v_1^0 & v_1^1 & v_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 5/16 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}AM = J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

یک بلاک جردن

$$(A-\lambda I)v_2 = v_1 \Rightarrow \begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

دلخواه

$$\Rightarrow \begin{cases}2x_2+3x_3=1 \longrightarrow x_2=\frac{1}{2}\\ 4x_3=0 \Rightarrow x_3=0\end{cases} \longrightarrow v_1^1=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda I)v_1^2=v_1^1 \Rightarrow \begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0.5\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}2x_2+3x_3=0\\ 4x_3=0.5\end{matrix}$$

$$x_2=\frac{-3}{2}x_3=\frac{-3}{16}$$

$$\Rightarrow x_3=\frac{1}{8} \Rightarrow x_2=\frac{-3}{16}, \quad v_1^2=\begin{bmatrix}0\\ -3/16\\ \frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} A M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال : فرم قطری ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = |A_{11}-\lambda I| \times |A_{22}-\lambda I|$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1+\lambda)\left[\lambda(2+\lambda)+1\right]$$

$$= \lambda(1+\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1) = \lambda(\lambda+1)^3 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1 \\ \lambda_4=0 \end{cases}$$

$\lambda = -1$

مستقل

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0+1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0+1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rank}(A - \lambda I) = 2, \quad q = n - \text{Rank}(A - \lambda I) = 4 - 2 = 2$$

$$(A + I)v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_4 \end{cases}$$

$$v_1^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda I)\, v_1^0 = v_1^1 \xRightarrow{\text{حل}} v_1^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_4 = 0 \longrightarrow v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} & \text{اصلی} & \text{فرعی} & \text{اصلی} & & \\ M = \Big[& v_1^0 & v_1^1 & v_2^0 & v_4 & \Big] \end{array} \Rightarrow M^{-1}AM = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال: فرم جردن یک ماتریس 5×5 را با فرض اطلاعات زیر بدون محاسبه بردارهای ویژه بدست آورید:

$$\lambda_1=\lambda_2=2 \quad \longrightarrow \quad q_1 = n-\mathrm{Rank}(A-2I) = 5-4=1$$

$$\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=-2 \longrightarrow q_2 = n-\mathrm{Rank}(A+2I) = 5-3=2$$

$$M = \begin{bmatrix} v_1^0 & v_1^1 & v_2^0 & v_2^1 & v_3^0 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1}AM = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ \hline & & -2 & 1 & \\ & & & -2 & \\ \hline & & & & -2 \end{array}\right]$$

مثال: با فرض اینکه مقادیر ویژه ماتریس A به صورت زیر باشد فرم جردن ماتریس $A \in R^{5\times 5}$ را محاسبه کنید.

a) $\lambda = \lambda = \lambda = \lambda = \lambda \quad , \quad q = 1$

یک بلوک جردن

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$q = 5,$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$q = 2$,

$v_1^0 \longrightarrow v_1^1$

$v_2^0 \longrightarrow v_2^1 \longrightarrow v_2^2$

$$J = \left[\begin{array}{cc|ccc} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & & & \\ \hline & & \lambda & 1 & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{array}\right]$$

$$M = \begin{bmatrix} v_1^0 & v_1^1 & v_1^0 & v_2^1 & v_2^2 \end{bmatrix}$$

$q = 2$,

v_1^0

$v_2^0 \to v_2^1 \to v_2^2 \to v_2^3$

$$M = \begin{bmatrix} v_1^0 & v_2^0 & v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \end{bmatrix}$$

$$J = \left[\begin{array}{c|cccc} \lambda & & & & \\ \hline & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{array}\right]$$

دو بلوک جردن

$q = 3$

$v_1^0 \longrightarrow v_1^1$

$v_2^0 \longrightarrow v_2^1$

v_3^0

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \lambda & \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

3 بلوک جردن

$$M = \begin{bmatrix} v_1^0 & v_1^1 & v_2^0 & v_2^1 & v_3^0 \end{bmatrix}$$

مثال :

$$\lambda_1 = 1 \;, \quad \lambda_{2,3,4} = 3 \;, \quad \lambda_{5,6} = 4$$

$$\lambda_{2,3,4} \downarrow \; q = 2 \qquad \lambda_{5,6} \downarrow \; q = 1$$

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & \underbrace{v_2^{0} \quad v_2^{1} \quad v_2^{0'}}_{} & \underbrace{v_5^{0} \quad v_5^{1}}_{} \end{bmatrix}$$

$$J = \left[\begin{array}{c|cc|c|cc} 1 & 0 & & & & \\ \hline & 3 & 1 & & & \\ & & 3 & 0 & & \\ \hline & & & 3 & & \\ \hline & & & & 4 & 1 \\ & & & & & 4 \end{array}\right]$$

مقادیر ویژه مختلط،

$$\lambda_{1,2} = \sigma_1 \pm j\omega_1 \,,\quad \lambda_{3,4} = \sigma_3 \pm j\omega_3 \,,\ \dots,\ \lambda_{m,m+1} = \sigma_m \pm j\omega_m$$

$$v_1, v_2 \qquad\qquad v_3, v_4 \qquad \dots \qquad v_m, v_{m+1}$$

$$v_1 = a + bj$$

$$v_2 = a - bj$$

$$M = \left[Re(v_1), Im(v_1), Re(v_3), Im[v_3], \dots, Re[v_m], Im[v_m] \right]$$

$$\Lambda = M^{-1} A M = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 & & & & & 0 \\ -\omega_1 & \sigma_1 & & & & & \\ & & \sigma_3 & \omega_3 & & & \\ 0 & & -\omega_3 & \sigma_3 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \sigma_m & \omega_m \\ 0 & & 0 & & & -\omega_m & \sigma_m \end{bmatrix}$$

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 1j \Rightarrow v_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \pm j \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1+0j \\ -1+1j \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1-j \end{bmatrix}$$

$$T = \left[Re(v_1) \quad Im(v_1) \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال

$$\lambda_{1,2} = \sigma \pm \omega j \quad , \quad \lambda_3 = a \ , \ \lambda_4 = b$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \sigma & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$