دانشگاه سمنان

کنترل مدرن

رویت پذیری و کنترل پذیری

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

رویت پذیری و کنترل پذیری

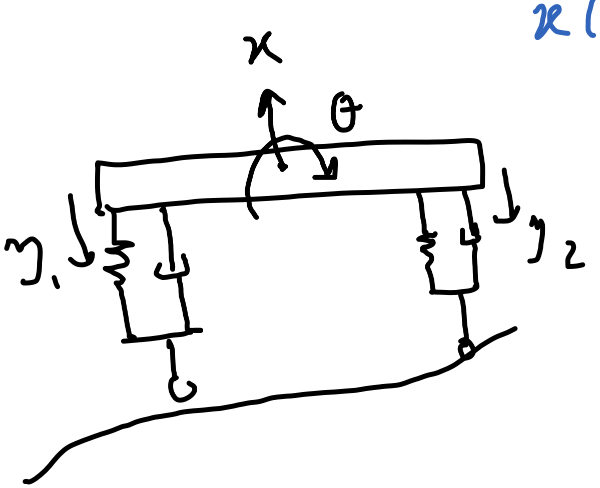
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

رویت پذیری ← ارتباط بین متغیرهای حالت و خروجی.

$y(t)$, $x(t)$

کنترل پذیری ← ارتباط بین ورودی و متغیرهای حالت.

$x(t)$, $u(t)$



$$X(t) = [x \quad \theta \quad \dot{x} \quad \dot{\theta}]^T$$

$$y(t) = x = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] X$$

رویت پذیری ← تعداد و نوع سنسورهای اندازه‌گیری

کنترل پذیری ← 〃 〃 محرکهای لازم

actuator

تعریف رویت پذیری: یک سیستم LTI رویت پذیر نامیده می شود اگر شرایط اولیه متغیرهای حالت، $x(0)=x_0$، را بتوان به صورت یکتا از اطلاعات مربوط به $y(t)$ و $u(t)$ در محدوده زمانی $t\in[0\ T]$ به دست آورد.

$$t\in[0\quad T],\ u(t)\checkmark,\ y(t)\checkmark \Rightarrow x_0 \longrightarrow \underline{x(t)}$$

$$x(t)=e^{At}\underline{x_0}+\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\underline{u(\tau)}\,d\tau \Rightarrow x(t)\longrightarrow[0\quad T]$$

$$y(t)\checkmark=\underbrace{Ce^{At}x_0}_{y_{zi}}+\underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau+Du(t)}_{y_{zs}\checkmark} \Rightarrow y_{zi}\checkmark=Ce^{At}x_0$$

$y_{zi}=y-y_{zs}$ باداشتن y_{zi} بتوان x_0 را بطور یکتا محاسبه کرد

تعریف متغیر حالت رویت ناپذیر

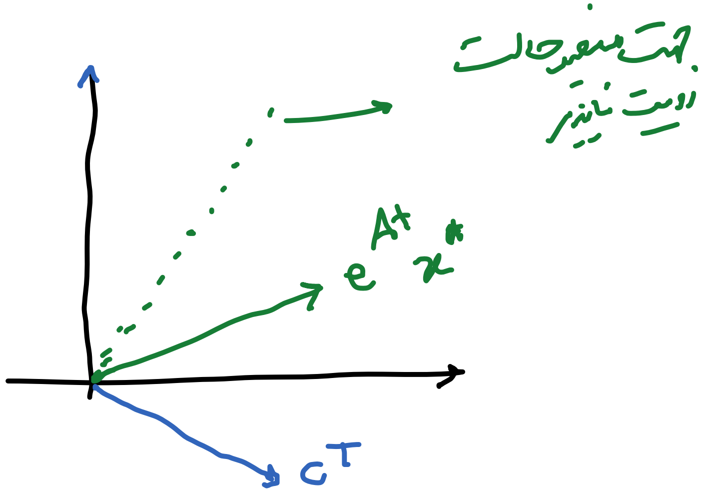
متغیر $x^* \neq 0$ رویت ناپذیر گفته می‌شود، اگر $y_{zi}(t)$ با شرایط اولیه $x_0 = x^*$ برای کلیه زمانها کاملاً صفر باقی بماند: $y_{zi} = ce^{At}x^* = 0$, for $\forall t$

if $\exists\, x^* \neq 0 \ni y_{zi} = ce^{At}x^* = 0$, for $\forall t$

$x^* \neq 0 \rightarrow x(t) \neq 0$,

$$y_{zi} = c^T \cdot (e^{At}x^*) = 0$$

بردار c^T بر $e^{At}x^*$ عمود است



قضیه رویت پذیری: یک سیستم LTI (زوج A و C) رویت پذیر است اگر و تنها اگر هیچ متغیر حالت رویت ناپذیر نداشته باشد.

شرط لازم: درصورت وجود متغیر رویت ناپذیر، سیستم رویت ناپذیر است.

فرض کنید x^* متغیر رویت ناپذیر باشد

$$x^* \neq 0 \Rightarrow Ce^{At}x^* = 0$$

حال $\text{for } x_1(0) = x_1 \Rightarrow y_1 = Ce^{At}x_1$

و $\text{for } x_2(0) = x_1 + \alpha x^* \Rightarrow y_2 = Ce^{At}x_1 + \underbrace{\alpha Ce^{At}x^*}_{0} = Ce^{At}x_1 = y_1$

به ازای دو مقدار اولیه متفاوت (x_1, x_2) به پاسخ یکسان رسیدیم که این یعنی سیستم رویت پذیر نیست

شرط کافی: درصورت نبود متغیر رویت ناپذیر، سیستم باید رویت پذیر باشد.

$$\text{for } x(0)=x_0 \Rightarrow y(t)=Ce^{At}x_0$$

$$(Ce^{At})^T \Rightarrow (Ce^{At})^T y(t) = (Ce^{At})^T Ce^{At} x_0$$

$$\int_0^T \Rightarrow \int_0^T (Ce^{At})^T y(t)\,dt = \int_0^T (Ce^{At})^T Ce^{At} x_0\,dt$$

با تعریف $M(T)=\int_0^T (Ce^{At})^T (Ce^{At})\,dt$ داریم

$$\Rightarrow M(T)\,x_0 = \int_0^T (Ce^{At})^T y(t)\,dt$$

اگر $M(T)$ همواره وارون پذیر باشد

$$x_0 = M^{-1}(T)\int_0^T (Ce^{At})^T y(t)\,dt$$

ثابت می شود که $M(T)$ یک ماتریس متقارن و مثبت معین است

$$M^T=M$$

$$x_0^T M x_0 > 0$$

قضیه: شرط رویت پذیری: بردار x^* یک متغیر حالت رویت ناپذیر است اگر و تنها اگر

$$Ox^* = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x^* = 0$$

که در آن O ماتریس رویت پذیری گفته می شود

$\mathrm{Rank}(O) < n$ در صورتی که باشد، $x^* \neq 0$ جواب دارد

شرط لازم: اگر x^* یک متغیر حالت رویت ناپذیر باشد ← $\forall t>0:\ \underbrace{Ce^{At}x^*}_{f(t)} = 0$

$$f(t) = 0 \longrightarrow f(0)=0,\ f'(0)=0,\ f''(0)=0 \dots$$

$$\Rightarrow Ce^{At}x_0^*\Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow Cx^* = 0$$

$$\frac{d}{dt}Ce^{At}x^*\Big|_{t=0} = CAe^{At}x^*\Big|_{t=0} = CAx^* = 0 \quad \dots \Rightarrow \quad CA^2x^* = 0 \ \dots,\ CA^k x^* = 0$$

$$k = n-1$$

$$(1)\quad Cx^* = CAx^* = \cdots = CA^{n-1}x^* = 0 \Rightarrow Ce^{At}x^* = 0$$: شرط کافی

معادله مشخصه ماتریس A $\quad s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$

$$C.H. \Rightarrow A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$$

$$\Rightarrow A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \cdots - a_1 A - a_0 I$$

$$\Rightarrow \underline{CA^n x^*} = -a_{n-1}\cancel{CA^{n-1}x^*} - \cdots - a_1\cancel{CAx^*} - a_0\cancel{Cx^*} = 0$$

$$\overset{A}{\Rightarrow} A^{n+1} = -a_{n-1}A^n - \cdots - a_1 A^2 - a_0 A \Rightarrow CA^{n+1}x^* = 0$$

$$\cdots \Rightarrow Ce^{At}x^* = 0$$

مثال: آیا سیستم زیر رویت پذیر است؟

$$A=\begin{bmatrix}-3/2 & 1/2\\ 1/2 & -3/2\end{bmatrix},\quad C=[1\ \ -1] \qquad n=2$$

$$O=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(O)=1<2$$

پس سیستم رویت پذیر نیست

$$Ox^*=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^*\\ x_2^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow x_1^*-x_2^*=0$$

متغیر حالت رویت ناپذیر عضو فضای ماتریس O هستند

$$x^*=\alpha\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \longrightarrow y_{zi}=Ce^{At}x^*=0 \ \checkmark$$

$$\longrightarrow \text{Null}(O) \longrightarrow Ox=0 \rightarrow x=\checkmark$$

موتور DC

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \times & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

a) $\theta \leftarrow C = [1 \quad 0 \quad 0] \rightarrow \text{Rank}(O) = 3$

b) $\omega \leftarrow C = [0 \quad 1 \quad 0] \rightarrow \text{Rank}(O) = 2$

c) θ, ω

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(O) = 3$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 1] \swarrow$$

آزمون بردار ویژه: زوج (A, C) رویت ناپذیر است، اگر و تنها اگر بردار ویژه v_i در A وجود داشته باشد که $C v_i = 0$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1 \longrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C v_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow$$

پس v یک مود رویت ناپذیر است.

$$\lambda_2 = -2 \longrightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow C v_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \longrightarrow$$

رویت پذیر

این سیستم رویت ناپذیر است.

آزمون بردار ویژه: برای حالتی که مقادیر ویژه تکراری داشته باشیم. (فرم جردن)

آزمون بردار ویژه عمدتاً برای بردار ویژه های اصلی انجام می گیرد.

(۲×۲

دو یا چند بلوک جردن داشته

اگر برای یک مقدار ویژه تکراری، دو بردار ویژه مستقل بتوان یافت سیستم رویت ناپذیر است.

در این صورت وقتی سیستم به فرم جردن نوشته می شود، در صورتی که شرایط زیر برقرار باشد، سیستم رویت پذیر است.

۱- دو بلوک جردن با یک مقدار ویژه برابر وجود نداشته باشد

اگر داشته باشد، ستونهای اول مربوط به بلوکهای جردن، مستقل از هم باشند

۲- هیچ یک از ستونهای اول ماتریس C مربوط به بلوکهای جردن همگی صفر نباشد.

۳- هیچ یک از ستونهای ماتریس C مربوط به مقادیر ویژه متمایز همگی صفر نباشد

برای سیستم های تک خروجی

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}}$$

رویت پذیر

یا

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

رویت ناپذیر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

رویت پذیر

رویت ناپذیر

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & & \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \hline & & & -3 & 1 \\ & & & 0 & -3 \end{array}\right]$$

$$C = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

رویت پذیر

$$C = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \rightarrow$$

رویت ناپذیر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} , \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

مستقل نشدند

$\left\{ [1], [2] \right\}$

رویت ناپذیر

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \longrightarrow \text{رویت پذیر}$$

رویت پذیر

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$c_1 \quad c_2$

$J \, , \, \Lambda$

رویت ناپذیر

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

رویت ناپذیر

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

مستقل نیستند

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{x = Tz} \begin{cases} \dot{z} = T^{-1}AT z + T^{-1}Bu \\ y = CT z + Du \end{cases}$$

$CT \rightarrow C$

زیرفضای رویت ناپذیر

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{x = Tz} \begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y = CTz + Du \end{cases}$$

قطری سازی

Z استفاده از آن بردار ویژه .

مثال : زیرفضای رویت ناپذیر را در صورت وجود، تعیین کنید .

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

برای رویت پذیری

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \dots \Rightarrow \text{Rank}(O) = 2$$

پس سیستم رویت ناپذیر است .

قطری سازی:

$$\lambda_1 = 0 \,, \quad \lambda_2 = -1 \,, \quad \lambda_3 = -3$$

$$\lambda_1 = 0 \longrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \longrightarrow C v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$$

$$\lambda_2 = -1 \longrightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \longrightarrow C v_2 = 0 \longrightarrow$$ مود رویت ناپذیر

$$\lambda_3 = -3 \longrightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 1 \end{bmatrix}^T \longrightarrow C v_3 = 2$$

رویت پذیر   رویت ناپذیر

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_3 & \vline & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow T^{-1} = \checkmark$$

$$\dot z = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu$$
$$y = CTz$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} z + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} z \end{cases}$$

مود رویت ناپذیر

به طور کلی

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \longrightarrow CT = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \end{bmatrix} \qquad \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$$

$$\begin{cases} \dot z_1 = \frac{1}{3}u \\ \dot z_2 = -3z_2 + \frac{1}{6}u \\ \dot z_3 = -z_3 + \frac{1}{2}u \end{cases} \qquad y = 2z_1 + 2z_2$$

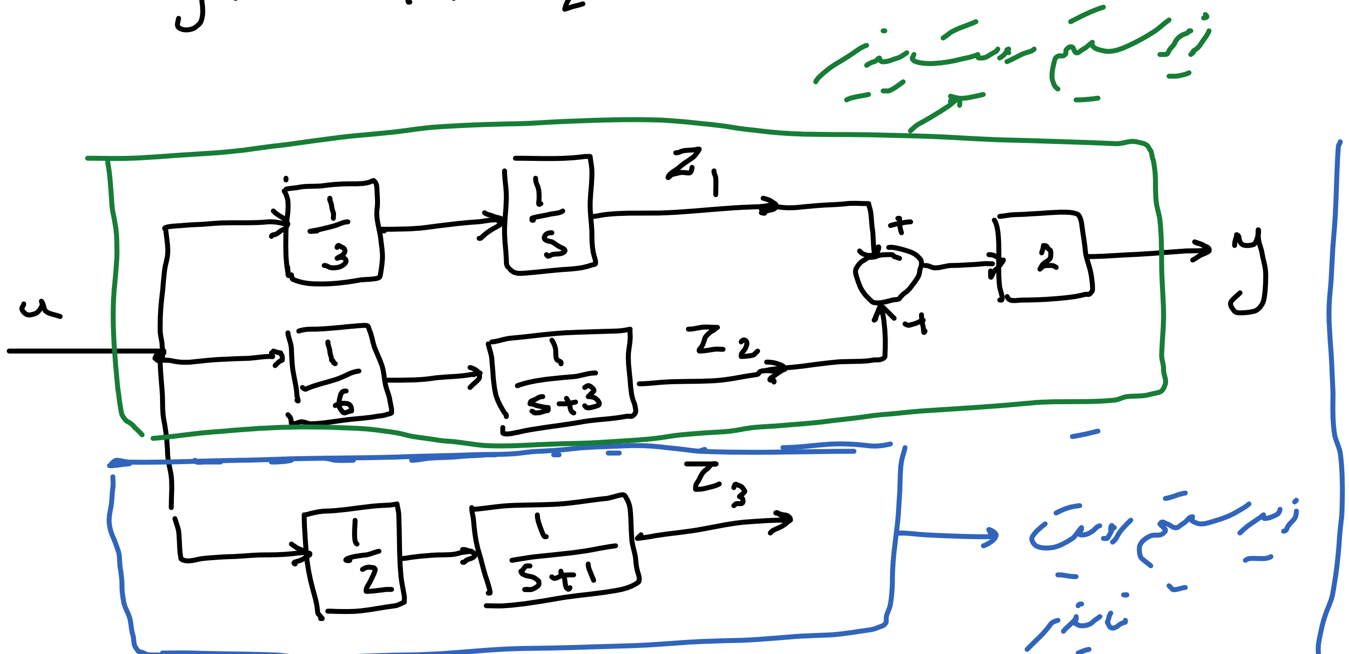
چون مود $\lambda_1 = 0$ رویت پذیر است
پس سیستم آشکارپذیر است.
اما رویت پذیر نیست.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \frac{1}{3}u & \longrightarrow \quad sZ_1(s) = \frac{1}{3}u \Rightarrow Z_1 = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{3}u\right) \\ \dot{z}_2 = -3z_2 + \frac{1}{6}u & \longrightarrow \quad (s+3)Z_2 = \frac{1}{6}u \\ \dot{z}_3 = -z_3 + \frac{1}{2}u & \longrightarrow \quad (s+1)Z_3 = \frac{1}{2}u \Rightarrow Z_3 = \frac{1}{(s+1)}\left(\frac{1}{2}u\right) \end{cases}$$

$$y = 2z_1 + 2z_2$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$



$$t \to \infty \Rightarrow z_3 \to 0$$

مثال:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$\mathrm{Rank}(O) = 2 \longrightarrow$ رویت ناپذیر

$\lambda_1 = 0 \longrightarrow v_1 = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \longrightarrow Cv_1 = 0$

$\lambda_2 = 1 \longrightarrow v_2^0 = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix} \longrightarrow Cv_2^0 \neq 0$

$\lambda_3 = 1 \longrightarrow v_2^1 = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} \longrightarrow X$

$\Rightarrow T = \begin{bmatrix}v_2^0 & v_2^1 & v_1\end{bmatrix}$

$$\dot{z} = \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right]z + \begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 2\end{bmatrix}u$$

$$y = \left[\begin{array}{cc|c}-1 & 0 & 0\end{array}\right]z$$

غیر صفر است و مود $\lambda = 1$ رویت پذیر

مود مربوط $\lambda = 0$ رویت ناپذیر است

آشکارپذیری: detectable

- سیستمی را آشکارپذیر گویند اگر همه مودهای ناپایدار سیستم رویت پذیر باشد.

مود ناپایدار: مودی که قسمت حقیقی مقدار ویژه آنها غیر منفی باشد.

$Re[\lambda_i] \geq 0$ → ناپایدار $\xrightarrow{\text{رویت پذیر بوده باشند}}$ آشکارپذیر

$Re[\lambda_i] < 0$ → پایدار

اگر همه مودهای سیستم رویت پذیر باشد ← رویت پذیر

اگر فقط مودهای ناپایدار سیستم رویت پذیر باشند ← آشکارپذیر

شرط رویت پذیری یک شرط قوی تری است.

پایدار

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & -2 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} z + \cdots$$

ناپایدار

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

رویت ناپذیر

نه رویت پذیر است

$\Rightarrow$ نه آشکارپذیر است

آشکارپذیر نیست.

یک سیستم ناپایدار را نمی‌توان با کنترلری وادار کرد که سیستم را پایدار کند.

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{bmatrix} z$$

پایدار

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} z$$

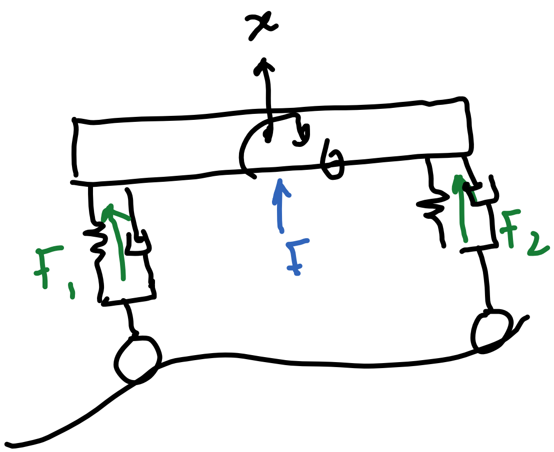
مود رویت ناپذیر

سیستم آشکارپذیر است

اما رویت پذیر نیست.

در عمل می‌توان یک کنترلر مناسب برای آن طراحی کرد.

Controllability کنترل پذیری



عملگر F → کنترل پذیر نیست

F_1 , F_2 → کنترل پذیر

x , θ

کنترل پذیری به تعداد و محل چیدمان محرکها می پردازد

$T>0$

تعریف کنترل پذیری: به ازای هر متغیر حالت $x_1(T)$ ، تلاش کنترلی $u(t)$ را در بازه $0<t<T$ بتوان چنان یافت که سیستم از شرایط اولیه $x_0=0$ در زمان صفر به x_1 در زمان T برسد.

$$x(0) \xrightarrow[\text{بتوان یافت}\;\; 0<t<T]{u(t)} x_1(T)$$

رویت پذیری $y_{zi}=Ce^{At}x_0$

$$x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow\quad \underset{\checkmark}{x(T)}=e^{AT}\underset{\checkmark}{x_0}+\underbrace{\int_0^T e^{A(T-\tau)}B\underline{u(\tau)}d\tau}_{x_{zs}}$$

$$\underline{x_{zs}} = \int_0^T e^{A(T-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau$$

$$x_{zs} = x(T) - e^{AT} x_0$$

تعریف متغیر حالت کنترل ناپذیر:

متغیر حالت $x^* \neq 0$ را کنترل ناپذیر گویند اگر پاسخ خصوصی (x_{zs}) در کلیه زمانها $\forall t$ و همه ورودیها $u(t)$ عمود بر x^* باشد.

$$x^{*T} \int_0^t e^{At} Bu(t-\tau)\, d\tau = x^* \cdot \int_0^t e^{At} Bu(t-\tau)\, d\tau = 0$$

$$x^{*T} x_{zs} = 0 \quad \text{or} \quad x^* \cdot x_{zs} = 0$$

$$x^{*T}\int_0^t e^{At} B\, u(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \underbrace{\left(x^{*T} e^{At} B\right)} u(t-\tau)\,d\tau = 0$$

$\forall u(t)$ و $\forall t$

باید $x^{*T} e^{At} B = 0 \quad \forall t$

$$\left(x^{*T} e^{At} B\right)^T = 0 \xleftarrow{\text{transpose}} \Rightarrow B^T e^{A^T t} x^* = 0$$

$C e^{At} x^* = 0$ در مقایسه با متغیر حالت رویت ناپذیر

مسئله کنترل پذیری دوگان (dual) مسئله رویت پذیر است. یعنی کافی است

به جای $A \rightarrow A^T$ و به جای $C \rightarrow B^T$ را در قضیه های رویت پذیری جایگذاری کنیم

قضیه: یک سیستم LTI (زوج (A,B)) کنترل پذیر است، اگر و تنها اگر، هیچ حالت کنترل ناپذیر نداشته باشد.

آزمون‌های کنترل پذیری

رویت پذیری

$$\dot{x} = Ax$$
$$y = Cx$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$O x^* = 0$$

کنترل پذیری

$$\dot{x} = A^T x$$
$$y = B^T x$$

$$O' = \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix} , \quad O' x^* = 0$$

$$O' = \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix} , \quad O' x^* = 0 \Rightarrow x^{*T} O'^T = 0$$

$$x^{*T} \overbrace{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}}^{\mathbb{C}} = 0 \Rightarrow x^{*T} \mathbb{C} = 0$$

$\text{Rank}(\mathbb{C}) = n \longrightarrow$ سیستم کنترل پذیر (A, B)

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

مثال :

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow Rank(\mathbb{C}) = 1$$

سیستم کنترل پذیر نیست.

$$x^{*T}\mathbb{C} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow a+b=0$$

$$x^{*} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

← مود کنترل ناپذیر

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} , \quad B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

آزمون بردار ویژه،

$$C v_i = 0 \longrightarrow B^T v_i = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{w_i^T B = 0} \quad \text{و}$$

w_i بردار ویژه A^T می باشد

$$\boxed{A^T w_i = \lambda_i w_i} \quad , \quad \det(A^T - \lambda I) = \det\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 9 - 1 = 0 \rightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda+2)(\lambda+4) = 0$$

$$\lambda_1 = -2 \rightarrow w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_i^T B} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

مود کنترل ناپذیر

$$\lambda_2 = -4 \rightarrow w_2 = \cdots \quad w_i^T B \neq 0$$

مود کنترل پذیر

کنترل پذیری برای فرم جردن

یک سیستم خطی با n متغیر و r ورودی را به فرم بلوک جردن به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_p \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_p \end{bmatrix} u(t), \qquad u \in R^{r\times 1}, \quad y \in R^{m\times 1}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_p \end{bmatrix}$$

اگر آخرین ردیف های زیرماتریس B_i را با b_{il}^T معرفی کنیم، سیستم کنترل پذیر است اگر و تنها اگر

۱- اگر $J_1, J_2, \dots, J_p$ بلوکهای جردن با مقدار ویژه یکسان λ_i باشند، آنگاه $\{b_{1l}\; b_{2l} \dots b_{pl}\}$ یک مجموعه مستقل خطی باشند:

۲- اگر J_p تنها بلوک جردن با مقدار ویژه λ_p باشد، آنگاه $b_{pl} \neq 0$

بررسی رویت پذیری برای فرم جردن

اگر اولین ستون زیر ماتریس‌های C_i را با C_{i1} نمایش دهیم. سیستم رویت پذیر است اگر و تنها اگر

۱- اگر بلوک‌های جردن $J_1, J_2, \dots, J_p$ با مقادیر ویژه یکسان باشند، آنگاه $\{C_{11}, C_{21}, \dots, C_{p1}\}$ یک مجموعه مستقل خطی باشد.

۲- اگر تنها یک بلوک جردن J_p با مقدار ویژه λ_p باشد، آنگاه $C_{p1} \neq 0$

مثال: رویت پذیری و کنترل پذیری سیستم زیر را بررسی کنید.

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & 0 & & \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & & \\ \hline & & & -2 & 1 \\ & & & 0 & -2 \end{array}\right] x + \begin{array}{c} \\ B_1 \\ \\ B_2 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{1} \\ \hline 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{1} \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow b_{1l}^T \\ \\ \rightarrow b_{2l}^T \end{array} u$$

$$y = \begin{array}{c} \quad\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{C_1} \ \overbrace{\qquad\quad}^{C_2} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \\ \quad c_{1l} \qquad\qquad\quad c_{2l} \end{array} x$$

$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ مستقل نیستند

سیستم کنترل پذیر نیست.

$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ مستقل خطی هستند. $\longrightarrow$ رویت پذیر است

$$A = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & -2 & \\ 0 & & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow$$ کنترل پذیر

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow$$ کنترل ناپذیر است، وجود $\lambda = -3$

موجب کنترل ناپذیر است.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow$$ کنترل ناپذیر

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \checkmark \\ \leftarrow \checkmark \end{matrix}$$ کنترل پذیر

پایدار پذیری: سیستم پایدار پذیر است، اگر کلیه مودهای ناپایدار آن کنترل پذیر باشد.

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

تجزیه کالمن سیستم های LTI

مثال:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

$$\Rightarrow H(s) = C(sI-A)^{-1}B$$

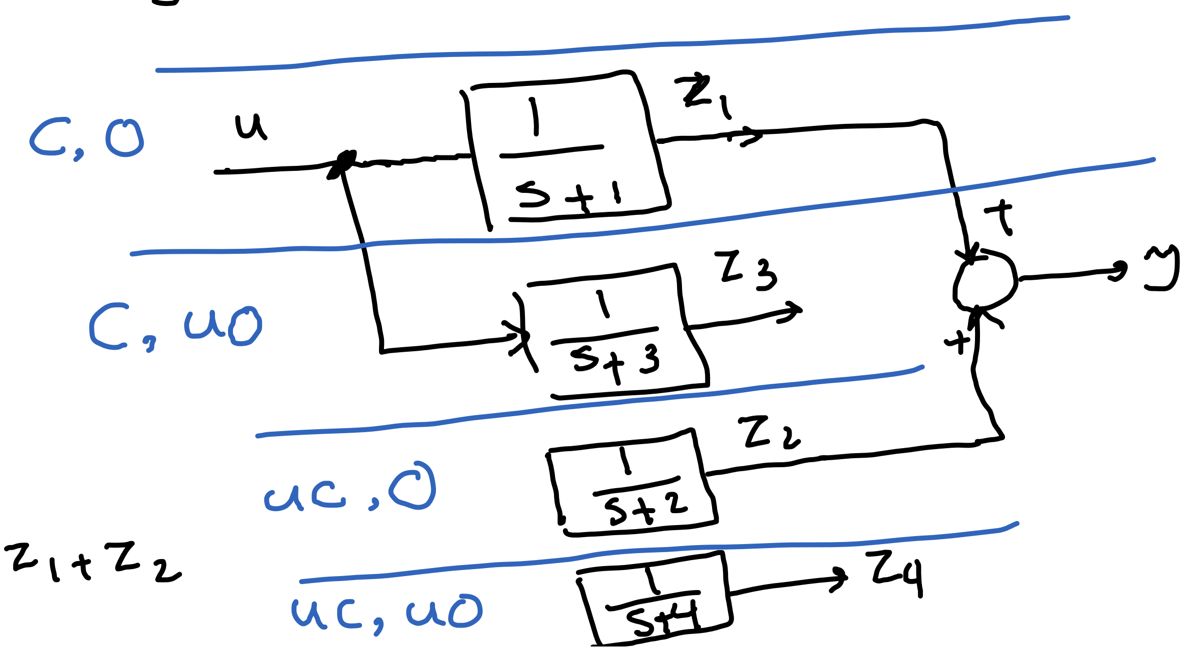
$$H(s) = \frac{\cancel{(s+2)}\cancel{(s+3)}\cancel{(s+4)}}{(s+1)\cancel{(s+2)}\cancel{(s+3)}\cancel{(s+4)}} = \frac{1}{s+1}$$

$$,\ \lambda_i = -1, -2, -3, -4$$

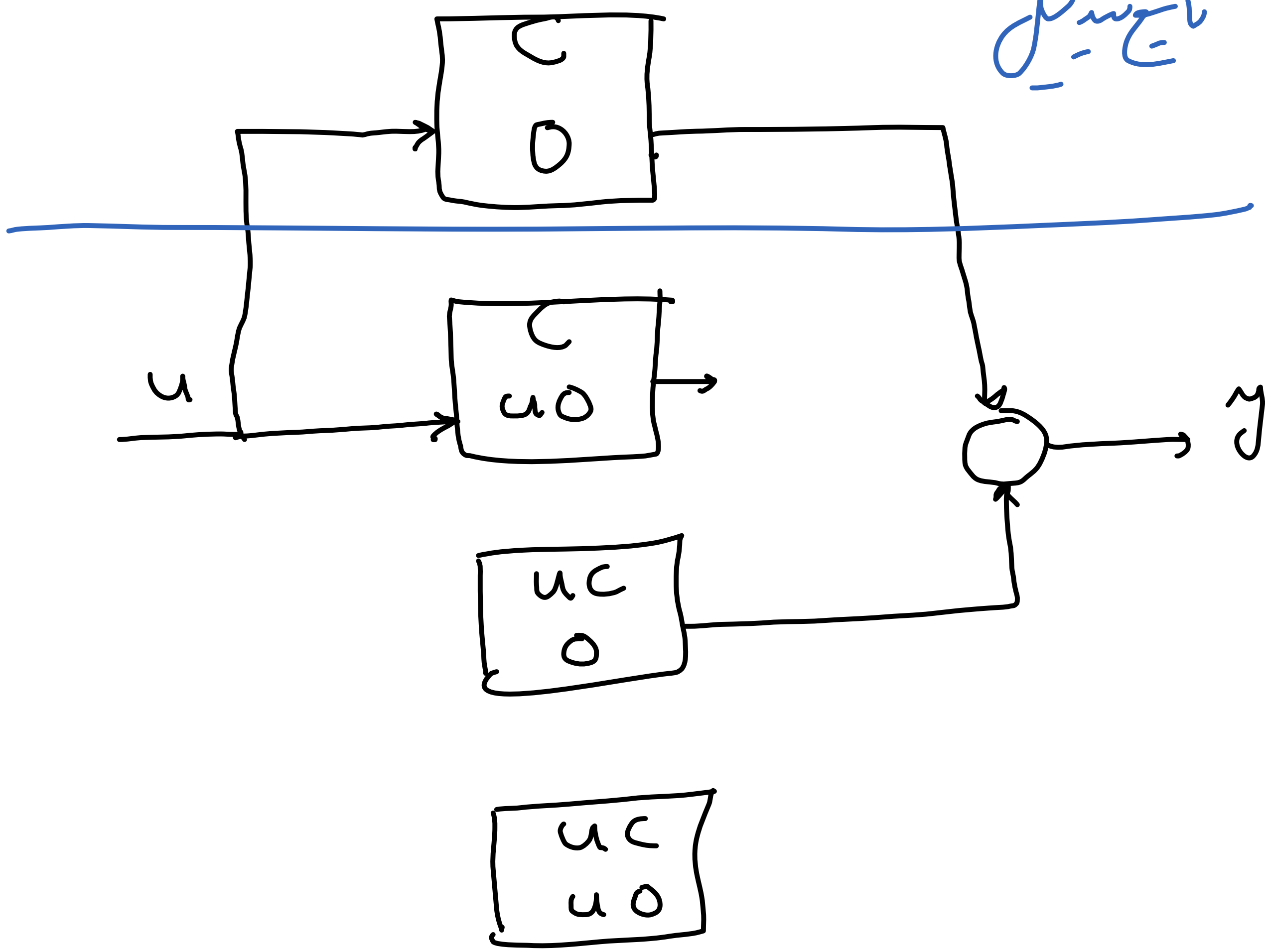
$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

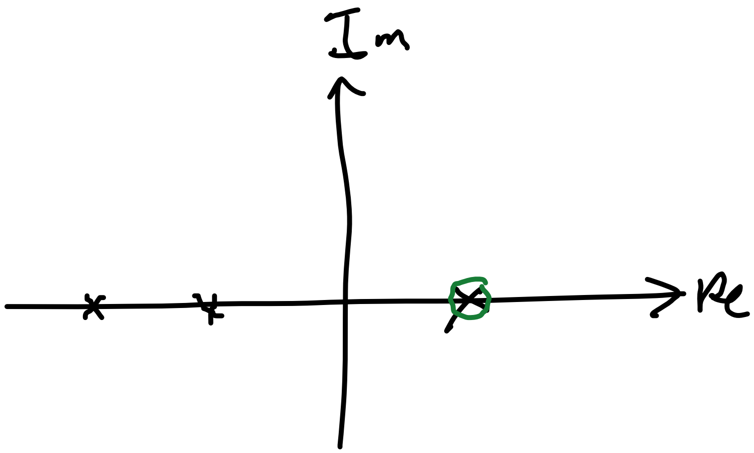
$$
\begin{cases}
\dot{z} = \begin{bmatrix} -1 & & & 0 \\ & -2 & & \\ & & -3 & \\ 0 & & & -4 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\
y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} z(t)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dot{z}_1 = -z_1 + u \\
\dot{z}_2 = -2z_2 \\
\dot{z}_3 = -3z_3 + u \\
\dot{z}_4 = -4z_4
\end{cases}
\quad , \quad y = z_1 + z_2
$$



تابع تبدیل





$$H(s) = \frac{\cancel{(s-2)}}{\cancel{(s-2)}(s+3)(s+4)} = \frac{1}{(s+3)(s+4)}$$