کنترل اتوماتیک

تحلیل پاسخ گذرا و ماندگار سیستمهای خطی

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

سیستم‌های مرتبه بالاتر

مرتبه اول

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{Ts+1}} \longrightarrow C(s)$$

مرتبه دوم استاندارد

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}} \longrightarrow C(s)$$

سیستم مرتبه دوم غیراستاندارد

$$G_1(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

$$G_2(s) = \frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$G(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

m صفر

n قطب

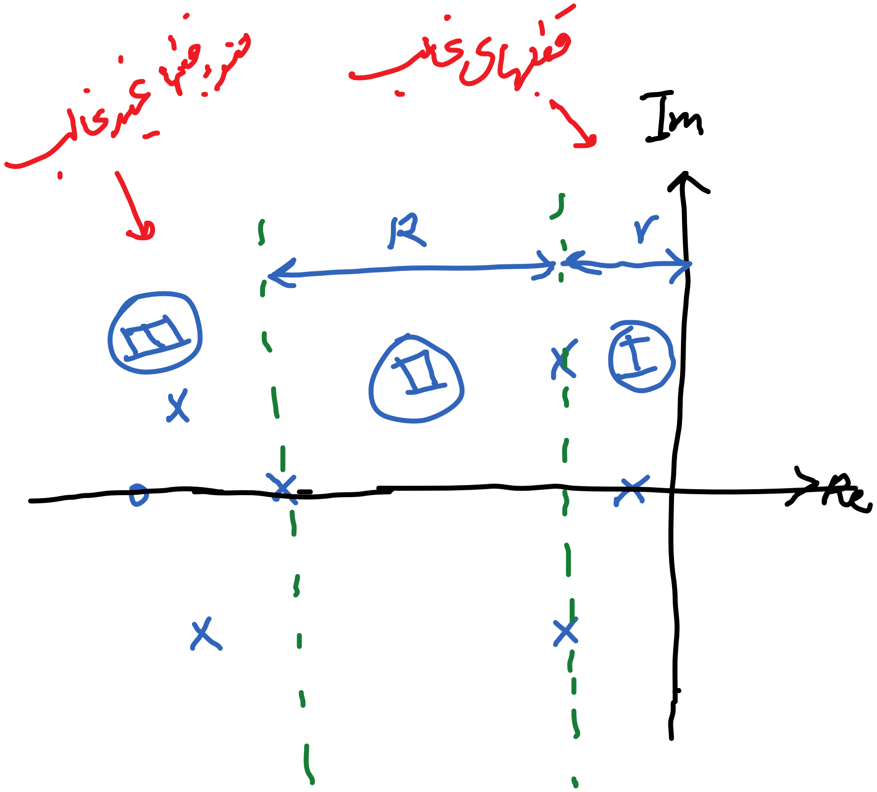
$m \le n$

- بسط به کسرهای جزئی
- شبیه سازی با نرم افزار MATLAB
- ساده سازی سیستم ← در صورت داشتن یک سری شرایط

قطب غالب :

$$R(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow C(s)$$

صفر و قطبهای $G(s)$ را در صفحه مختلط مشخص می‌کنیم



۱- در ناحیه I فقط قطب داشته باشیم

۲- در ناحیه II هیچ صفر و قطبی نداشته باشیم

۳- $R \geq 4r$

در این صورت می‌توان از کلیه صفر و قطبهای ناحیه III صرف نظر کرد

مثال :

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{(s+1)(s+8)}} \longrightarrow C(s)$$

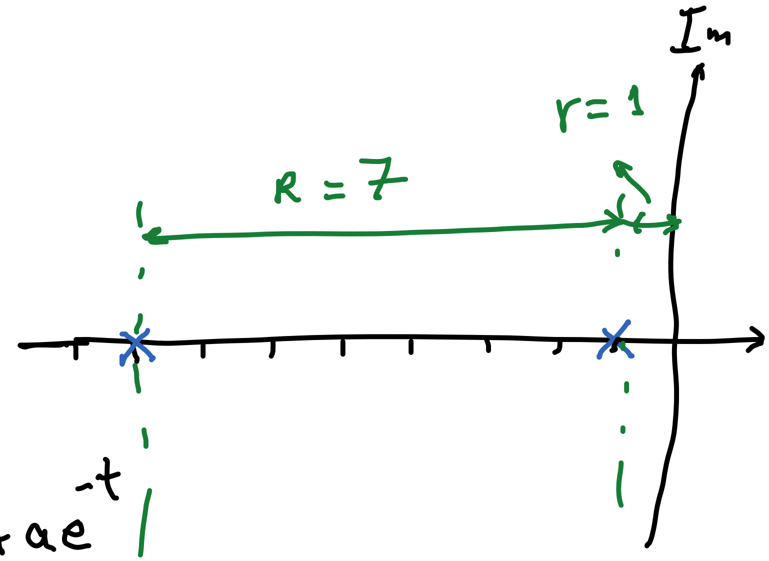
$$G_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+8)} \Leftarrow$$

$$G_2(s) = \frac{a}{s+1}$$

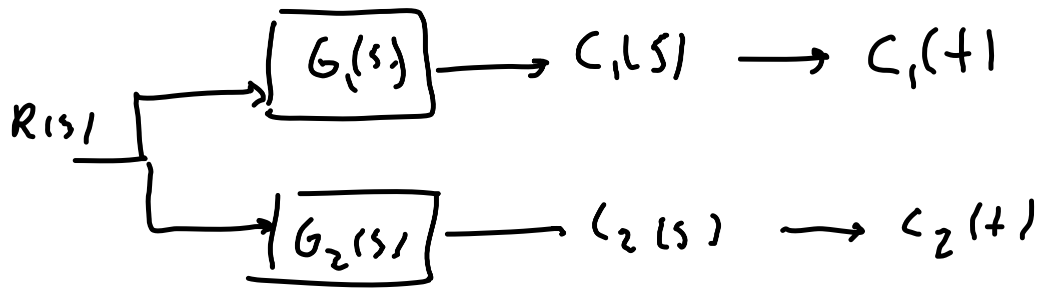
$$\Rightarrow G_1(s) = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+8}$$

$$R(s)=\frac{1}{s} \Rightarrow \;\longrightarrow c(t) = 1 + \underbrace{a_1 e^{-t}}_{2} + \underbrace{a_2 e^{-8t}}_{1} \simeq 1 + a e^{-t}$$

ترم یک در مقایسه با ترم 2 خیلی سریع صفر خواهد شد



$$R \geq 4r \Rightarrow 7 > 4 \;\checkmark$$



قضیه مقدار نهایی

$$\left.\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} c_1(t) &= \lim_{s\to 0} sC_1(s) \\ \lim_{t\to\infty} c_2(t) &= \lim_{s\to 0} sC_2(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{s\to 0} sC_1(s) = \lim_{s\to 0} sC_2(s)$$

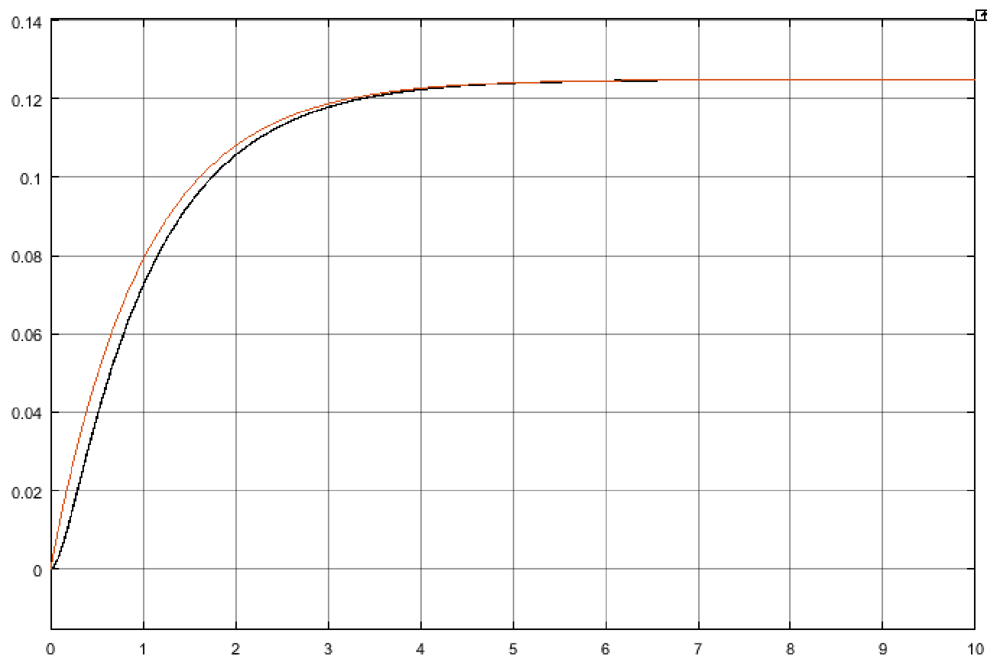
$$\Rightarrow \lim_{s\to 0} sRG_1(s) = \lim_{s\to 0} sRG_2(s)$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to 0} sR(s)\left[G_1(s) - G_2(s)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{s\to 0} G_1(s) = \lim_{s\to 0} G_2(s)}$$

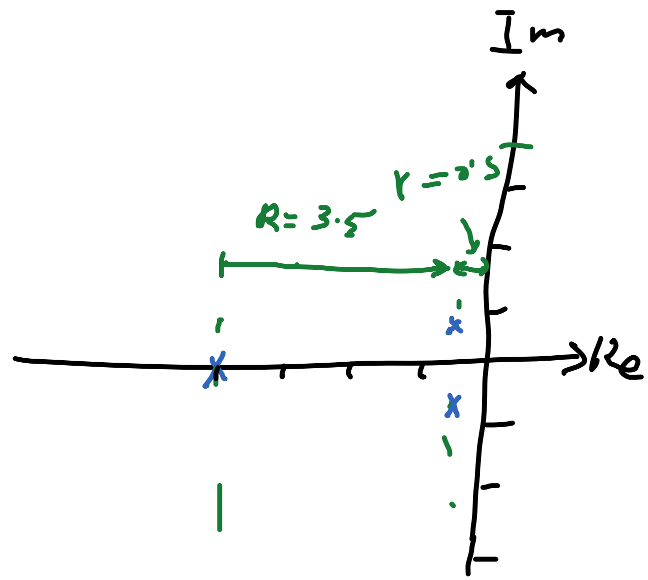
$$G_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+8)} \Rightarrow G_1(0) = G_2(0) \Rightarrow \frac{1}{8} = a$$

$$G_2(s) = \frac{a}{s+1} \Rightarrow G_2(s) = \frac{1/8}{s+1}$$



مثال: پاسخ سیستم زیر را به ورودی پله به دست آورده و مقدار t_p را محاسبه کنید

$$G(s)=\frac{4}{(s^2+s+1)(s+4)}$$



$$P_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-0.5\pm\frac{\sqrt{3}}{2}j$$

$$P_3=-4$$

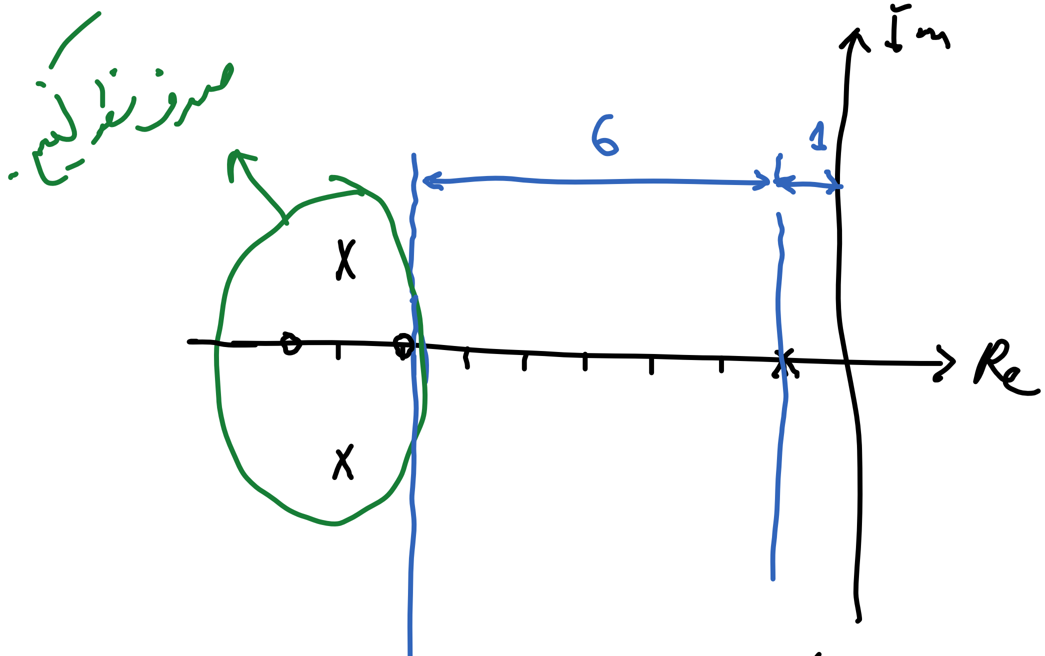
$$R\geq 4r \rightarrow 3.5>2 \checkmark$$

(غیرغالب) قطب دورتر حذف می‌شود

$$G_2(s)=\frac{a}{s^2+s+1}\quad,\quad G(0)=G_2(0)\Rightarrow \frac{4}{4}=a$$

$$\rightarrow G_2(s)=\frac{1}{s^2+s+1}\rightarrow \omega_n=1$$

$$2\zeta\omega_n=1\rightarrow \zeta=0.5$$



$$G(s) = \frac{(s+7)(s+9)}{(s+1)(s+8+2j)(s+8-2j)}$$

$$G(s) = \frac{(s+7)(s+9)}{(s+1)(s^2+16s+60)}$$

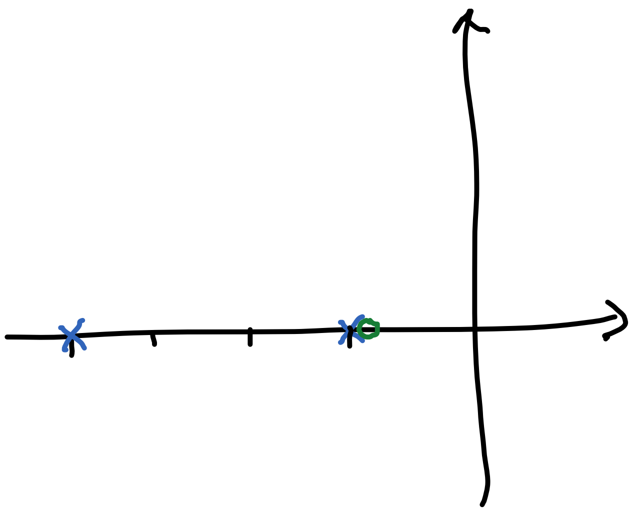
$R > 4r \Rightarrow 6 > 4$ ✓

$$\Rightarrow G'(s) = \frac{a}{s+1}$$

$$G(0) = G'(0) \Rightarrow \frac{7 \times 9}{60} = a \Rightarrow \boxed{a = \frac{63}{60}}$$

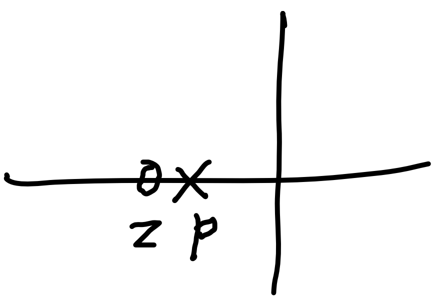
اثر صفر

در صورتی که یک صفر و قطب خیلی به هم نزدیک باشند می‌توان آن صفر و قطب را با یکدیگر ساده کرد.



$$G(s) = \frac{\cancel{(s+1)}}{\cancel{(s+1)}(s+4)} = \frac{1}{s+4}$$

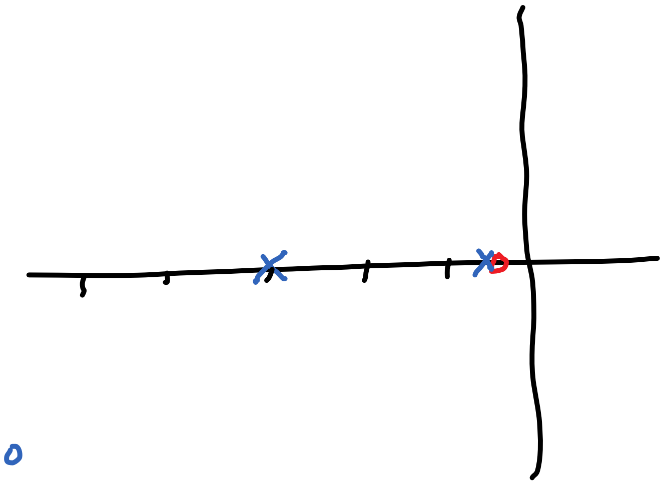
$$G(s) = \frac{s+0.95}{(s+1)(s+4)} \simeq \frac{a}{s+4}$$



$$\frac{|z-p|}{z} \times 100 < 5\%$$

مثال:

$$G(s)=\frac{25(s+0.48)}{8(s+3)(s+0.5)}$$



$$\frac{|0.5-0.48|}{0.5}\times 100 = 4\%$$

$$G'(s)=\frac{a}{s+3}=\frac{3}{s+3}$$

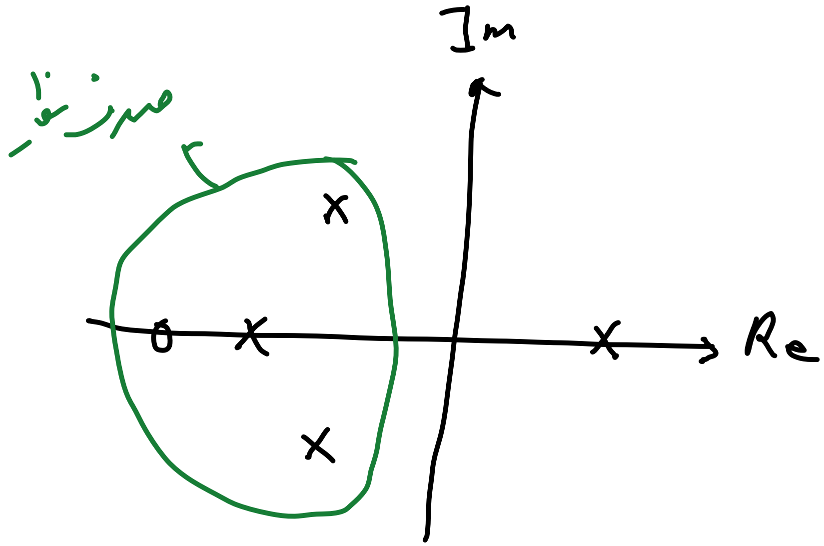
$$G(0)=G'(0) \Rightarrow a=3$$

$a_2 \simeq 0$

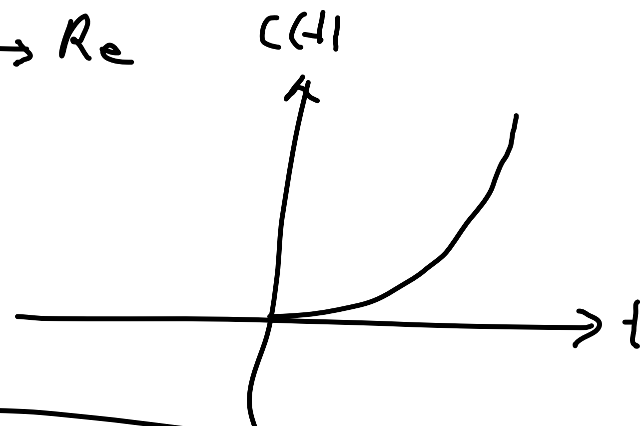
$$c(t)=1+a_1 e^{-3t}+\cancel{a_2} e^{-t} \simeq 1+ae^{-3t}$$

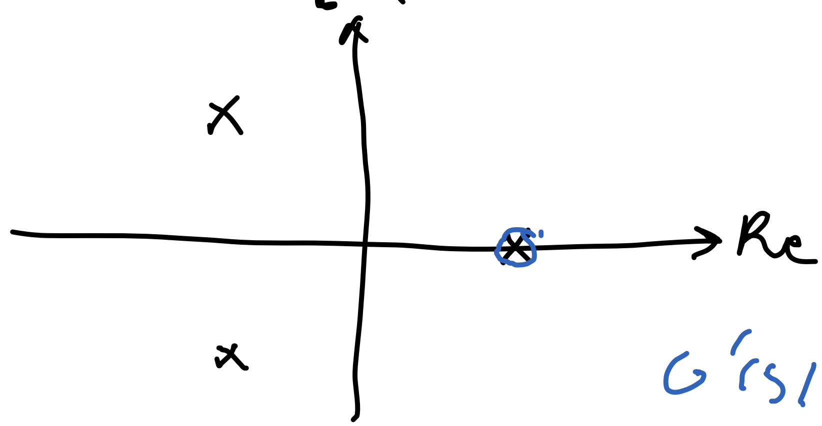
$a_2 \ll a_1 \rightarrow$ مثلا $a_1=1\ ,\ a_2=0.01$

اثر قطب ناپایدار را نمی‌توان با یک صفر ناپایدار از بین برد



$$G'(s) = \frac{a}{(s-1)}$$





$$G(s) = \frac{\cancel{s-1}}{\cancel{(s-1)}(s^2+s+1)}$$

$$G'(s) = \frac{a}{s^2+s+1}$$

در عمل اشتباه است.

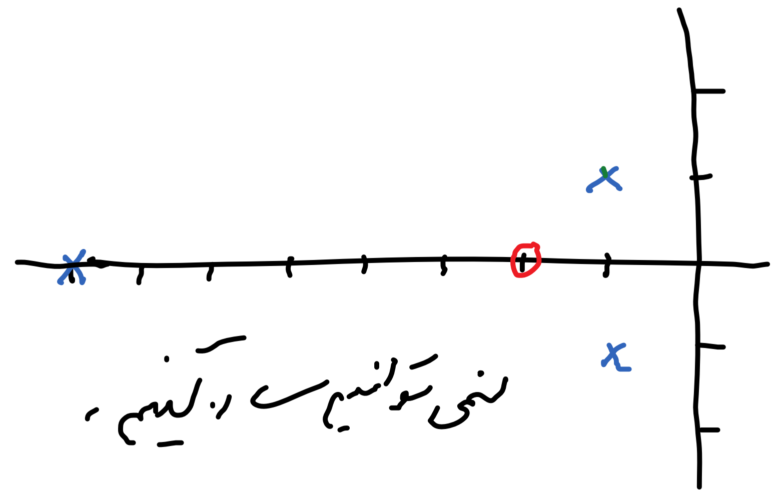
مثال:

$$G(s) = \frac{s+2}{(s^2+2s+3)(s+8)}$$

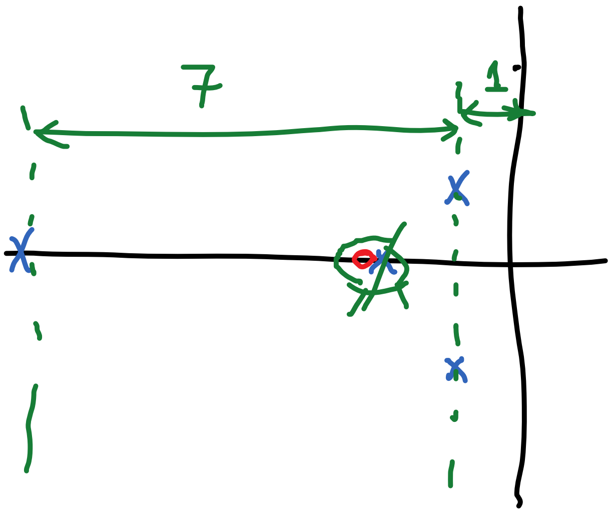
$z_1 = -2$

$p_1 = -8$

$p_{2,3} = -1 \pm j$



نمی‌توانیم س را [illegible]



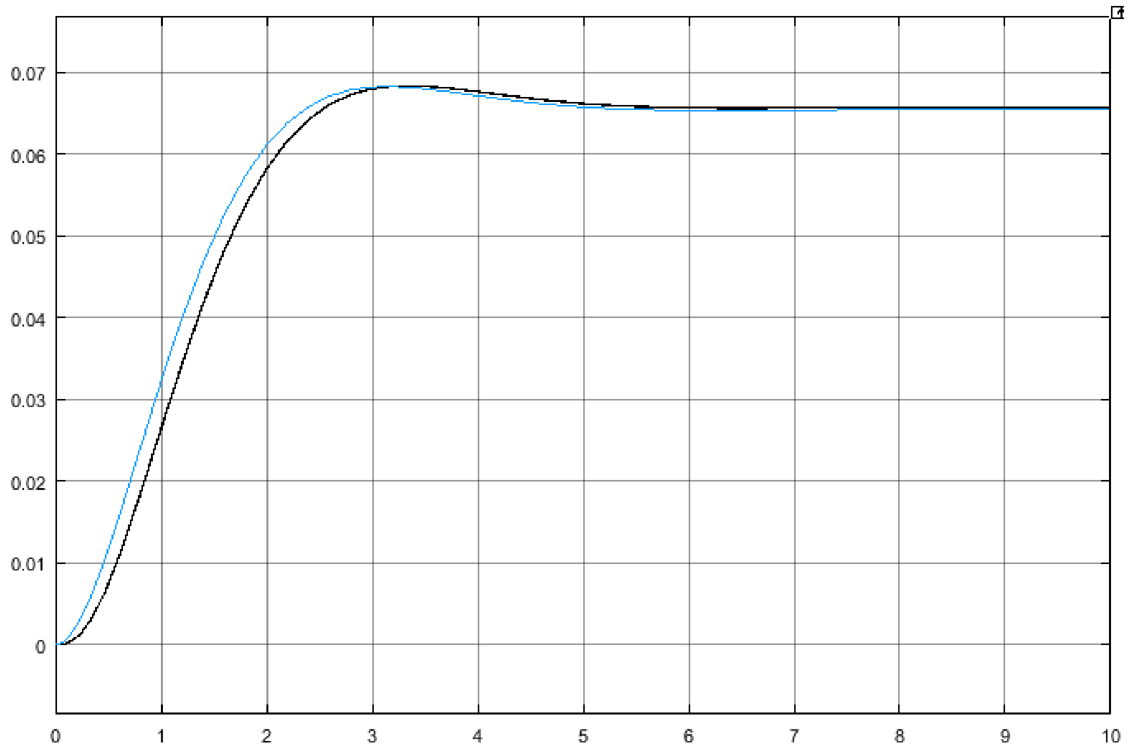
مثال:

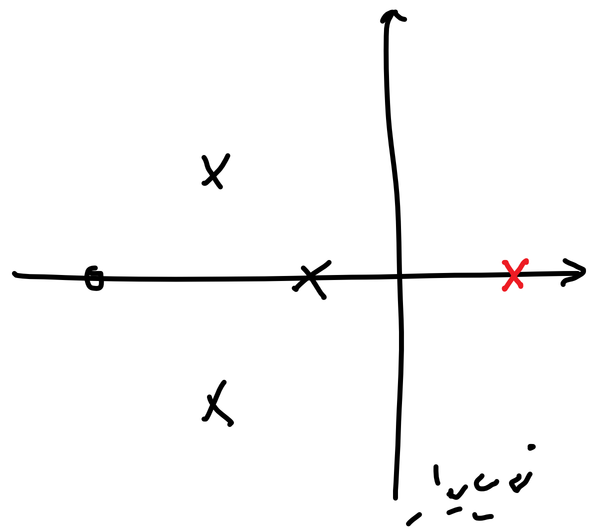
$$G(s) = \frac{\cancel{s+2}}{(s^2+2s+3)\,\cancel{(s+8)}\,(s+\cancel{1.9})}$$

$$\frac{\frac{2-1.9}{2} = \frac{0.1}{2} = 0.05 = 5\%}{}$$

$$\frac{2}{3\times 8\times 1.9} = \frac{a}{3} \Rightarrow \boxed{a = 0.131}$$

$$G'(s) = \frac{a}{s^2+2s+3}$$


0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10



$$G(s) = \frac{\cdots}{\cdots\ (s-1)}$$

$$R(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow C(s)$$

$$c(t) = r(t) + a_1 e^{p_1 t} + a_2 e^{p_2 t} + \cdots$$

$$a_1 e^{t} + a_1 e^{-2t} + \cdots$$

کنترل اتوماتیک

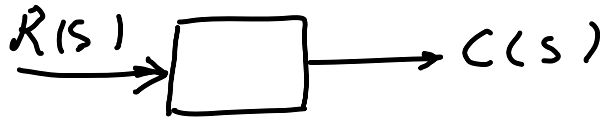
تحلیل پاسخ گذرا و ماندگار سیستمهای خطی
خطای حالت ماندگار

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

Steady state error   خطای حالت ماندگار

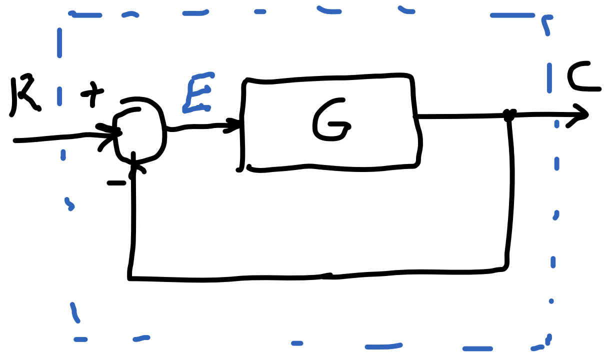


خطا = ورودی - خروجی

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

خطای حالت ماندگار $e_{ss} = \underset{t \to \infty}{e(t)} = \checkmark$

خطاهای حالت ماندگار



$$E(s) = R(s) - C(s)$$

برای سیستم بالا :

$$C = EG$$

$$\Rightarrow E = R - EG$$

$$\Rightarrow E + EG = R$$

$$\Rightarrow E(1+G) = R$$

$$\Rightarrow E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s)$$

از قضیه مقدار نهایی داریم

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \frac{s}{1+G(s)} R(s)$$

$$G(s) = \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{s^N (T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots}$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)} R(s)$$

$$G(s) = \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{s^{N}(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots}$$

خطای حالت ماندگار به ورودی پله $R(s)=\frac{1}{s}$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s}}{1+G(s)} \times \frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G(s)}$$

sys. type نوع سیستم : N

ثابت خطای ایستای موقعیت $K_p = \lim_{s\to 0} G(s) \Rightarrow K_p = \begin{cases} K & N=0 \\ \infty & N \geq 1 \end{cases}$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} \Rightarrow e_{ss} = \begin{cases} \frac{1}{1+K} & N=0 \\ 0 & N\geq 1 \end{cases}$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)} R(s)$$

$$G(s) = \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{s^N (T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots}$$

خطای حالت ماندگار به ورودی شیب $r(t)=t$ ، $R(s)=\frac{1}{s^2}$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)} \times \frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+sG(s)}$$

ثابت خطای سرعت K_v ، ایستای سرعت

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) \Rightarrow K_v = \begin{cases} 0 & N=0 \\ K & N=1 \\ \infty & N\geq 2 \end{cases}$$

sys. type نوع سیستم : N

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s+sG(s)} \Rightarrow = \lim_{s\to 0}\frac{1}{sG(s)} = \frac{1}{K_v}$$

$$e_{ss} = \begin{cases} \infty & N=0 \\ \frac{1}{K} & N=1 \\ 0 & N\geq 2 \end{cases}$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)} R(s)$$

$$G(s) = \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{s^{N}(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots}$$

$r(t) = \frac{t^2}{2}$

خطای حالت ماندگار به ورودی سهمی $R(s) = \frac{1}{s^3}$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)} \times \frac{1}{s^3} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2+s^2G(s)}$$

ثابت خطای ایستای شتاب $K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) \Rightarrow K_a = \begin{cases} 0 & N=0 \\ 0 & N=1 \\ K & N=2 \\ \infty & N\geq 3 \end{cases}$

sys. type نوع سیستم: $\underline{N}$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2+s^2G(s)} \Rightarrow = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2G(s)} = \frac{1}{K_a}$$

$$e_{ss} = \begin{cases} \infty & N=0 \\ \infty & N=1 \\ \frac{1}{K} & N=2 \\ 0 & N\geq 3 \end{cases}$$

به ورودی پله $e_{ss} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+K} & N=0 \\ 0 & N \geq 1 \end{cases}$

$e_{ss} = \dfrac{1}{1+K_p}$

$K_p = \lim_{s \to 0} G(s)$

شیب $e_{ss} = \begin{cases} \infty & N=0 \\ \dfrac{1}{K} & N=1 \\ 0 & N \geq 2 \end{cases}$

$e_{ss} = \dfrac{1}{K_v}$

$K_v = \lim_{s \to 0} s\,G(s)$

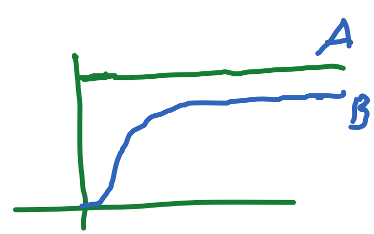
سهمی $e_{ss} = \begin{cases} \infty & N=0 \\ \infty & N=1 \\ \dfrac{1}{K} & N=2 \\ 0 & N \geq 3 \end{cases}$

$e_{ss} = \dfrac{1}{K_a}$

$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$

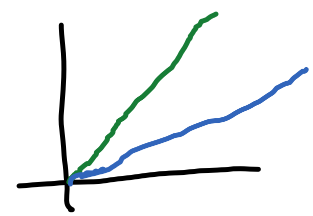
e_{ss}	$\frac{1}{s}$ 1 پله	$\frac{1}{s^2}$ t شیب	$\frac{1}{s^3}$ $\frac{t^2}{2}$ سهمی	$\frac{1}{s^4}$ $\frac{t^3}{6}$
$N=0$	$\frac{1}{1+K_p}$	∞	∞	∞
$N=1$	0	$\frac{1}{K_v}$	∞	∞
$N=2$	0	0	$\frac{1}{K_a}$	∞
$N=3$	0	0	0	$\frac{1}{K}$

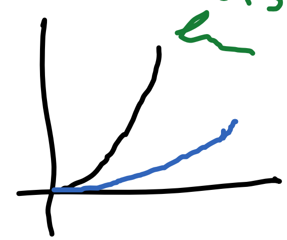
$K \to \lim s^3 G(s)$

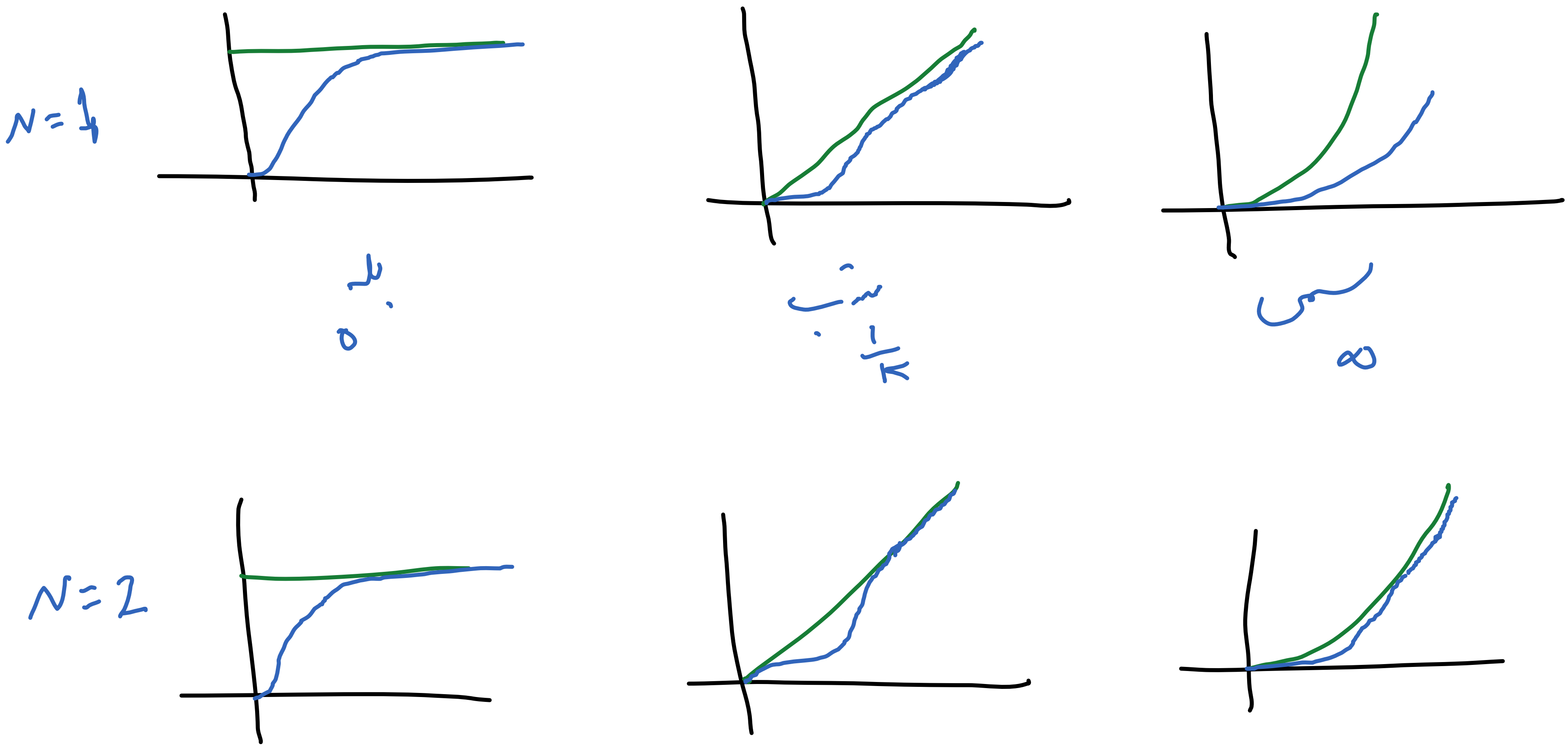


$N=0$

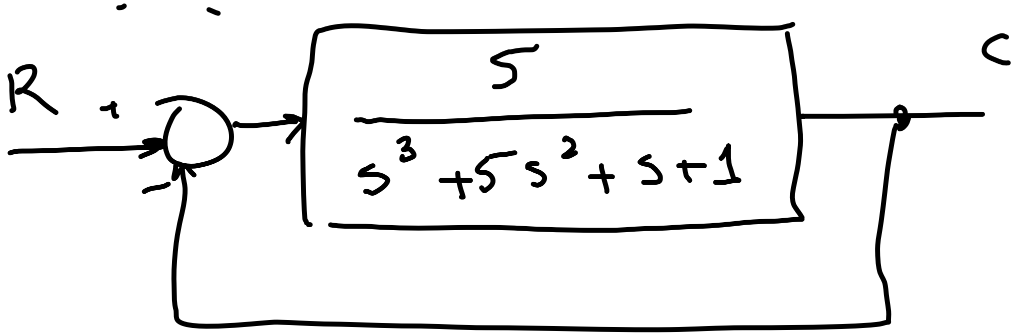
$\boxed{B} \to \boxed{A}$






N=1
پله
0
شیب
1/K
سهمی
∞
N=2

مثال: خطای حالت ماندگار سیستم زیر را به ورودی پله، شیب و سهمی محاسبه کنید



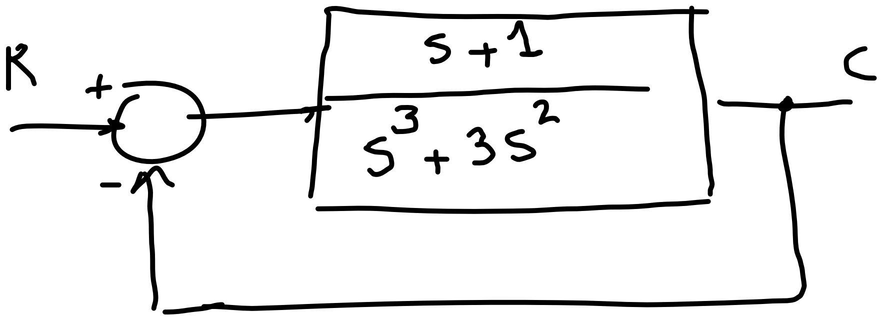
$$N = 0$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = 5$$

ورودی پله $e_{ss} = \dfrac{1}{1+K_p} = \dfrac{1}{6}$

شیب $e_{ss} = \infty$

سهمی $e_{ss} = \infty$



$$G(s) = \frac{s+1}{s^{2}(s+3)}$$

$$N = 2$$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) = \lim_{s \to 0} \cancel{s^2} \frac{s+1}{\cancel{s^2}(s+3)} = \frac{1}{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N = 0 \longrightarrow K_p = G(s) \\ N = 1 \longrightarrow K_v = sG(s) \\ N = 2 \longrightarrow K_a = s^2 G(s) \end{array} \right.$$

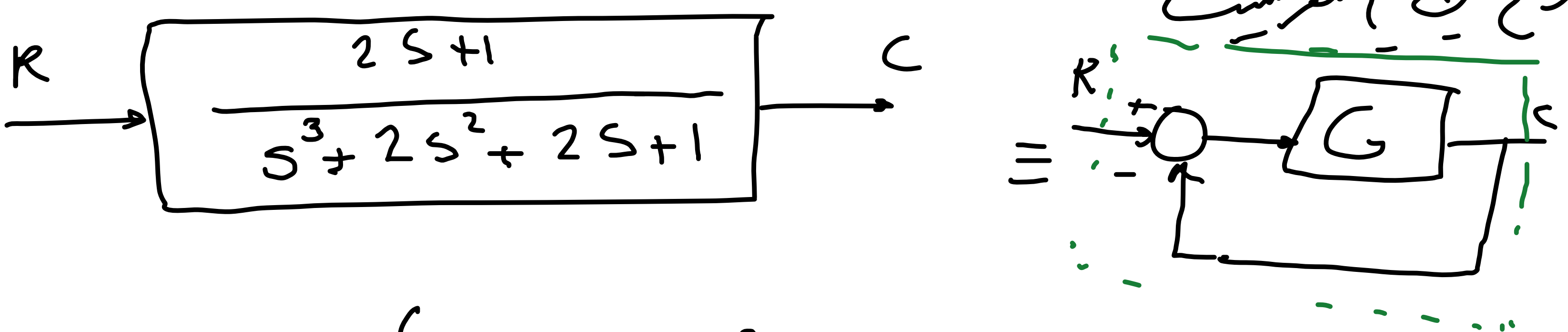
به ورودی سهمی $e_{ss} = \frac{1}{K_a} = 3$

شیب $e_{ss} = 0$

پله $e_{ss} = 0$

خطای حالت ماندگار به ورودی های مختلف را برای سیستم زیر حساب کنید

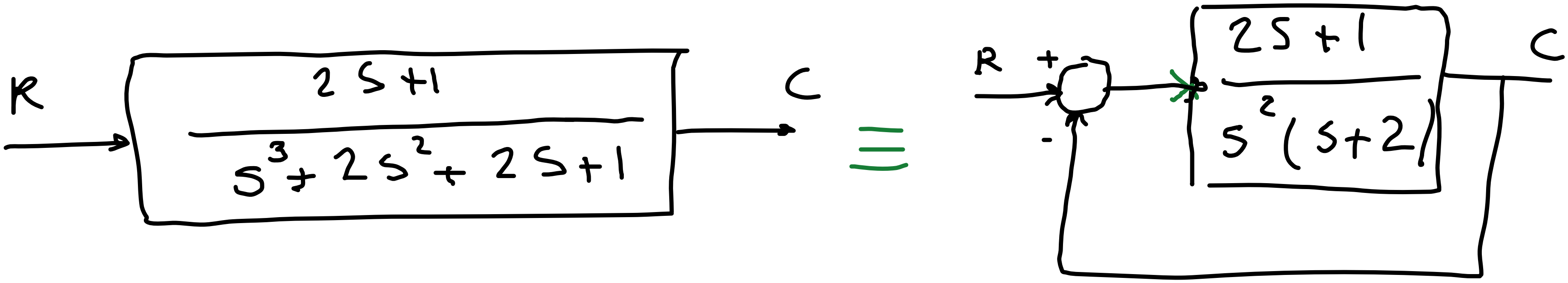
توجه که این سیستم حلقه بسته نیست



$$\frac{C}{R}=\frac{2S+1}{S^3+2S^2+2S+1}=\frac{G}{1+G}\Rightarrow(S^3+2S^2+2S+1)G=2S+1+(2S+1)G$$

$$\Rightarrow S^3G+2S^2G+\cancel{2S}G+\cancel{G}-\cancel{2S}G-\cancel{G}=2S+1$$

$$\Rightarrow G(S^3+2S^2)=2S+1\Rightarrow G=\frac{2S+1}{S^3+2S^2}=\frac{2S+1}{S^2(S+2)}$$



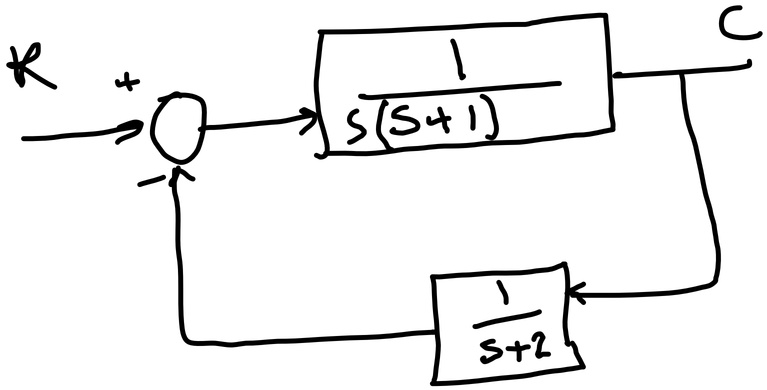
$$N = 2 \Rightarrow K_a = \lim s^2 G(s) = \frac{1}{2}$$

به ورودی سهمی $e_{ss} = \frac{1}{k_a} = 2$

به شیب $e_{ss} = 0$

به پله $e_{ss} = 0$

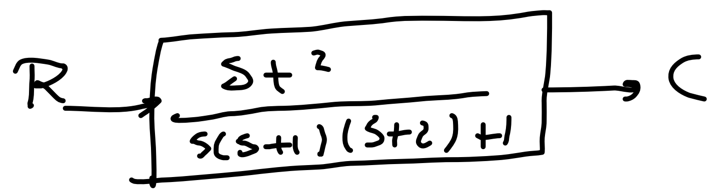
مثال :



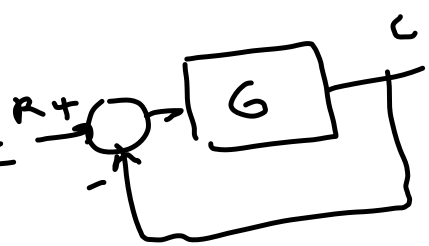
$$\Rightarrow \frac{C}{R} = \frac{\frac{1}{s(s+1)}}{1 + \frac{1}{s(s+1)(s+2)}}$$

$$\Rightarrow \frac{C}{R} = \frac{s+2}{s(s+1)(s+2)+1}$$

$\Rightarrow$

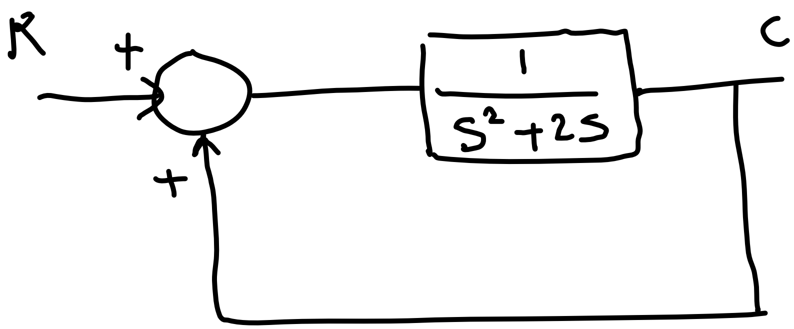


$\equiv$



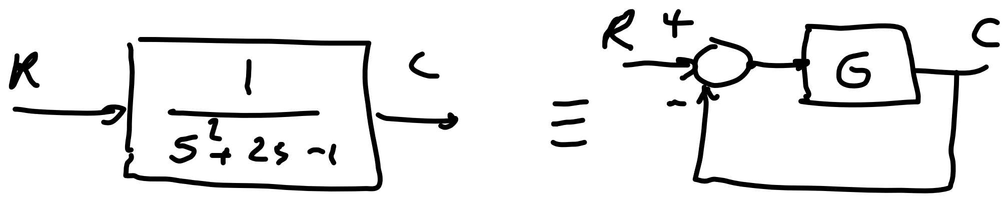
$$\Rightarrow \frac{s+2}{s(s+1)(s+2)+1} = \frac{G}{1+G}$$

$$\Rightarrow G = \checkmark \longrightarrow N = \checkmark \longrightarrow e_{ss}$$



$$\Rightarrow \quad \frac{C}{R} = \frac{\frac{1}{s^2+2s}}{1 - \frac{1}{s^2+2s}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{C}{R} = \frac{1}{s^2+2s-1} \longrightarrow$$



$$\frac{1}{s^2+2s-1} = \frac{G}{1+G} \Rightarrow 1+G = G(s^2+2s-1)$$

$$\Rightarrow \quad 1 = G(s^2+2s-2) \Rightarrow \quad G = \frac{1}{s^2+2s-2}$$

$$\Rightarrow \quad N=0 \Rightarrow K_p = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{لذا}} e_{ss} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

کنترل اتوماتیک

تحلیل پاسخ گذرا و ماندگار سیستمهای خطی
معیار پایداری روث

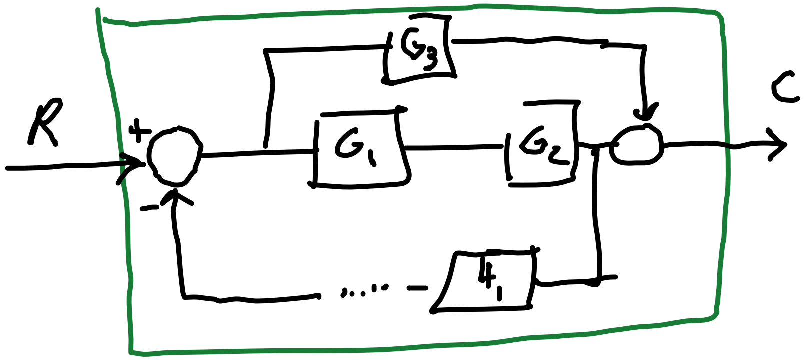
دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

Stability پایداری

یک سیستم کنترلی پایدار است، اگر و تنها اگر تمام قطبهای حلقه بسته آن در نیمه چپ صفحه اعداد
موهومی باشد.



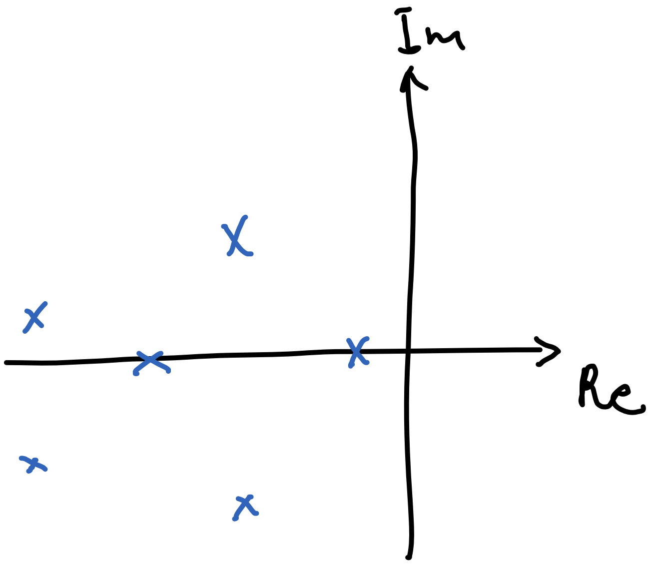
قطبهای سیستم حلقه بسته، ریشه‌های معادله مشخصه هستند

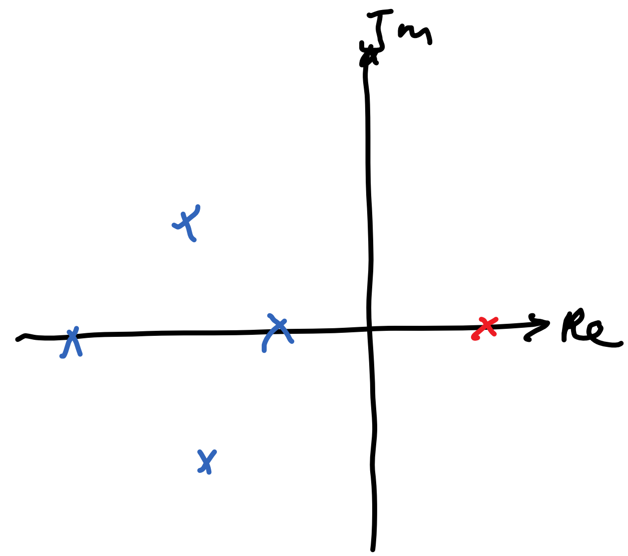
$$G(s)=\frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

معادله مشخصه

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

معادله مشخصه $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \Rightarrow p_1, p_2, \ldots, p_n$





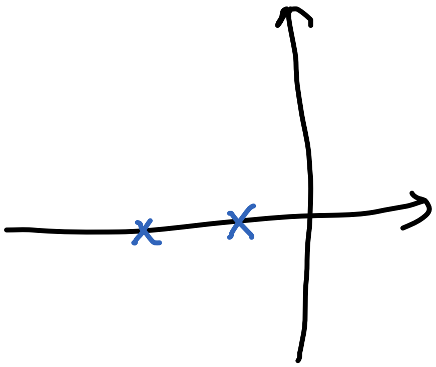
ناپایدار

اگر همه قطبها (p_i ها) سمت چپ بودند یا
به عبارت دیگر بخش Real آنها منفی بود،
سیستم پایدار است

$$\frac{C}{R} = G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

معادله مشخصه و : $(s+1)(s+2) = 0$

$$P_1 = -1, \quad P_2 = -2$$



$$\Rightarrow c(t) = r(t) + a_1 e^{-t} + a_2 e^{-2t}$$

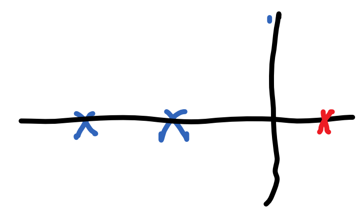
در حالت کلی

$$c(t) = r(t) + a_1 e^{P_1 t} + a_2 e^{P_2 t} + \dots + a_n e^{P_n t}$$

شرط لازم و کافی پایداری $Re[P_i] < 0$ برای $i = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{C}{R} = \frac{1}{(s-1)(s+2)(s+3)}$$

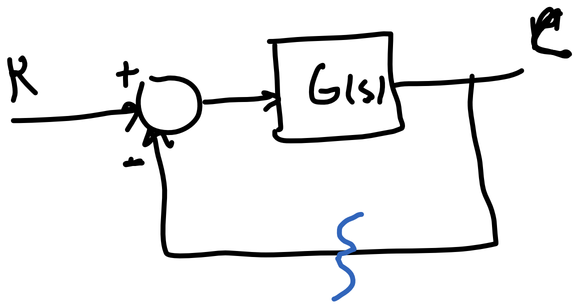
$$P_1 = 1, \quad P_2 = -2, \quad P_3 = -3$$



$$\Rightarrow c(t) = r(t) + a_1 e^{t} + a_2 e^{-2t} + a_3 e^{-3t}$$

$$t \to \infty \Rightarrow a_1 e^{t} \to \infty$$

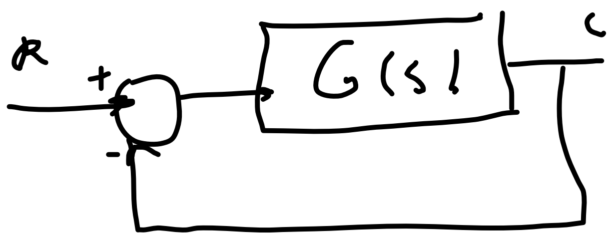
مربوط به بحث خطای حالت ماندگار



$$G(s) \longrightarrow N \longrightarrow e_{ss}$$

به $G(s)$ تابع تبدیل حلقه باز گفته می‌شود.

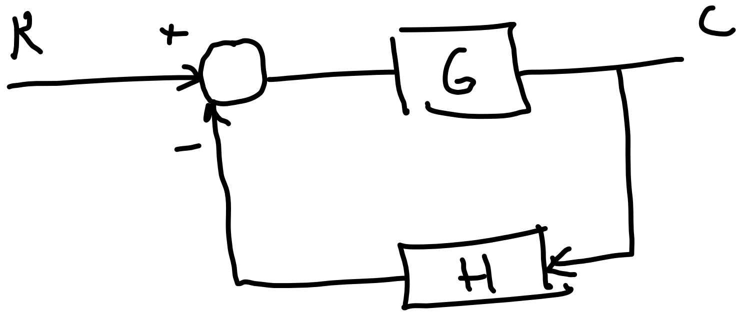
مثال: تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم با فیدبک واحد به صورت زیر است. خطای حالت ماندگار را محاسبه کنید.



$$G(s) = \frac{1}{s^2+s+2}$$

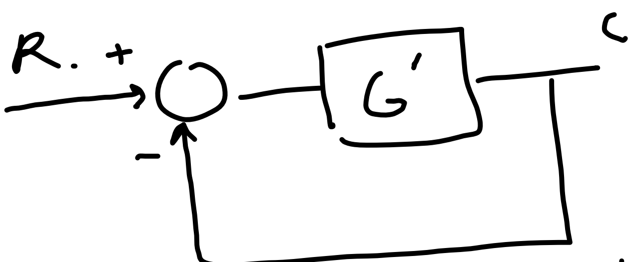
$$N = 0 \longrightarrow K_p = \frac{1}{2}$$

به ورودی پله $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$



تابع تبدیل حلقه باز : GH
(همان هندسی است)

تابع تبدیل حلقه بسته : $\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH}$



$\Rightarrow G' = $ ✓

تابع تبدیل حلقه باز با فیدبک واحد

و

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

محاسبه ریشه‌های معادله مشخصه در حالت کلی، $(n \geq 3)$ کار مشکلی است.

Routh، معیار پایداری روث، بدون محاسبه ریشه‌ها می‌توان تعداد ریشه‌های ناپایدار را محاسبه کرد.

$$s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 4s + 1 = 0 \longrightarrow$$

تعداد ریشه‌ها با بخش حقیقی مثبت را تعیین می‌کند.

معیار پایداری روث :

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

- $a_n \neq 0$ ،

$$s^3 + 4s^2 + 3s = 0 \Rightarrow s(s^2 + 4s + 3) = 0$$

$$\Rightarrow s^2 + 4s + 3 = 0$$

- شرط لازم پایداری : $a_i > 0$

$$s^3 + 4s^2 + 3s + 2 = 0 \longrightarrow \checkmark$$

$$s^3 - 4s^2 + 3s + 2 = 0 \longrightarrow \times \longrightarrow$$ حتماً ناپایدار است. ریشه مثبت دارد.

$$s^3 + 4s^2 + 2 = 0 \quad , \quad a_2 = 0 \quad \times$$ ناپایدار

$$-s^3 - 4s^2 - 3s - 2 = 0 \Rightarrow s^3 + 4s^2 + 3s + 2 = 0 \quad \checkmark$$

شرط کافی برای پایداری: المانهای ستون اول جدول روث همگی مثبت باشند.

نکته: به تعداد تغییر علامت در ستون اول جدول روث، قطب ناپایدار داریم.

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

$$\begin{array}{llll}
s^n: & a_0 & a_2 & a_4 \\
s^{n-1}: & a_1 & a_3 & a_5 \\
s^{n-2}: & b_1 & b_2 & b_3 \\
s^{n-3}: & c_1 & c_2 & c_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
s^1: & f_1 & f_2 & \\
s^0: & g_1 & &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

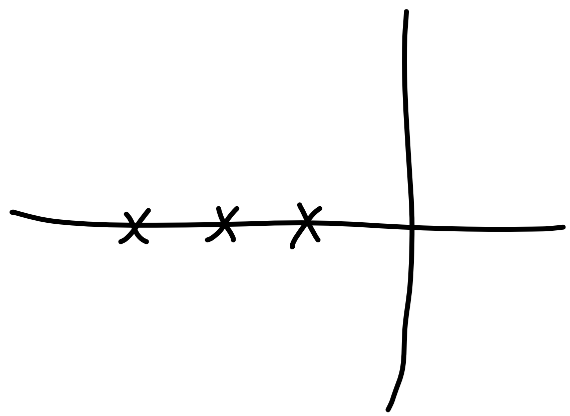
$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

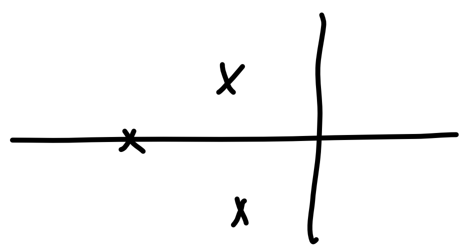
معادله مشخصه یک سیستم بصورت زیر داده شده، پایداری آن را بررسی کنید.

$$s^3 + 4s^2 + 3s + 2 = 0$$

$$\begin{array}{llll}
+\ s^3: & 1 & 3 & 0 \\
+\ s^2: & 4 & 2 & 0 \\
+\ s^1: & \dfrac{3\times4-1\times2}{4} = 2.5 & 0 & \\
+\ s^0: & \dfrac{2\times2.5-4\times0}{2.5} = 2 & 0 &
\end{array}$$

پایدار است.





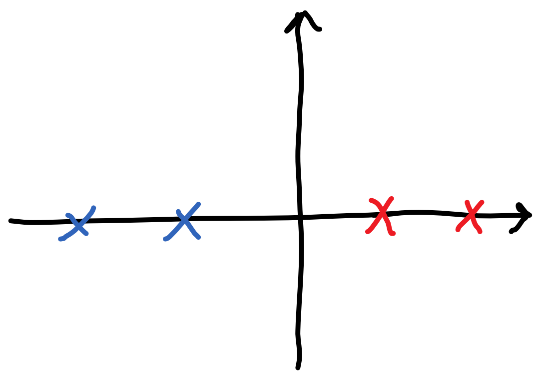
مثال:

$$s^4 + 3s^3 + s^2 + 9s + 12 = 0$$

$+$	s^4 :	1	1	12	0
$+$	s^3 :	3	9	0	0
$-$	s^2 :	-2	12	0	
$+$	s^1 :	27	0		
$+$	s^0 :	12			

$$\frac{-2\times 9 - 3\times 12}{-2} = 27$$

ناپایدار است. دو ریشه ناپایدار داریم



مثال : حالت خاص ، صفر شدن المان اول یک سطر

$$s^5+2s^4+2s^3+4s^2+11s+10=0 \qquad \epsilon>0$$

+	s^5 :	1	2	11	0
+	s^4 :	2	4	10	0
+	s^3 :	$0 \to \epsilon$	6	0	
−	s^2 :	$\frac{4\epsilon-12}{\epsilon} \to \delta$	$\frac{10\epsilon}{\epsilon} \to 10$	0	
+	s^1 :	$\frac{6\delta-10\epsilon}{\delta} \to 6$	0		
+	s^0 :	10			

$$\frac{4\epsilon-12}{\epsilon}=\delta<0 \qquad \delta \to -\infty$$

$$\frac{6\delta-10\epsilon}{\delta}=6$$

$\epsilon \to 0$

$\delta \to -\infty$

دو ریشه ناپایدار دارد.

مثال: حالت خاص: صفر شدن همه المانهای یک سطر

$$s^5+2s^4+24s^3+48s^2-25s-50=0 \rightarrow$$

ناپایدار است چون شرط لازم را ندارد.

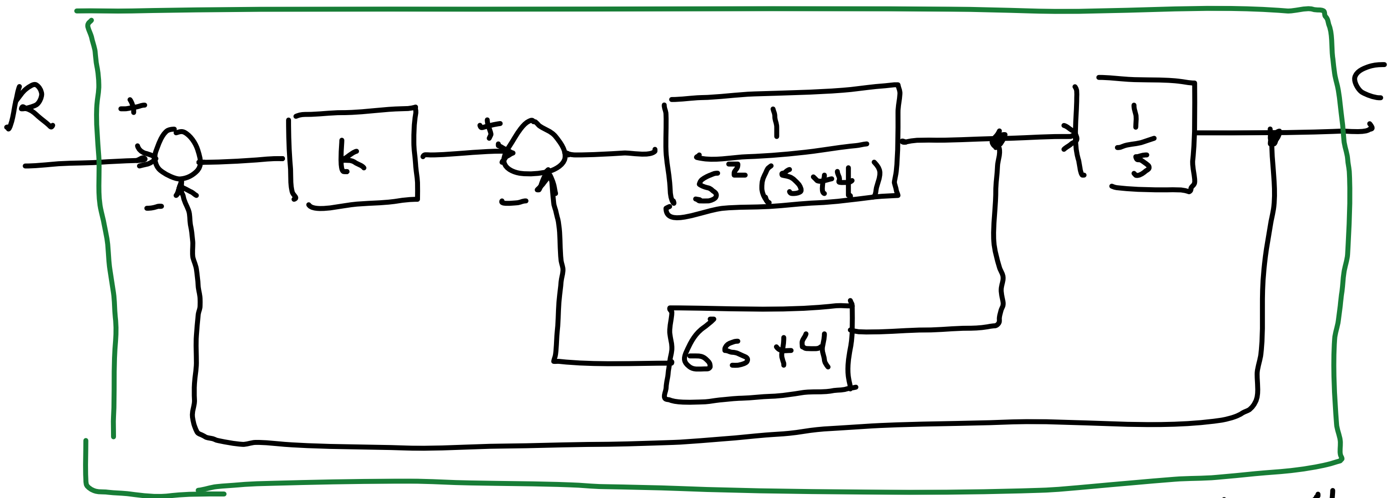
$+\ s^5:$	1	24	-25
$+\ s^4:$	2	48	-50
$+\ s^3:$	$\cancel{0}\ 8$	$\cancel{0}\ 96$	0
$+\ s^2:$	24	-50	
$+\ s^1:$	112.5		
$-\ s^0:$	-50		

$$\Rightarrow P(s)=2s^4+48s^2-50$$

$$\Rightarrow \frac{dP(s)}{ds}=8s^3+96s$$

یک قطب ناپایدار داریم و سیستم ناپایدار است.

مثال: به ازای چه محدوده ای از K سیستم زیر پایدار است.



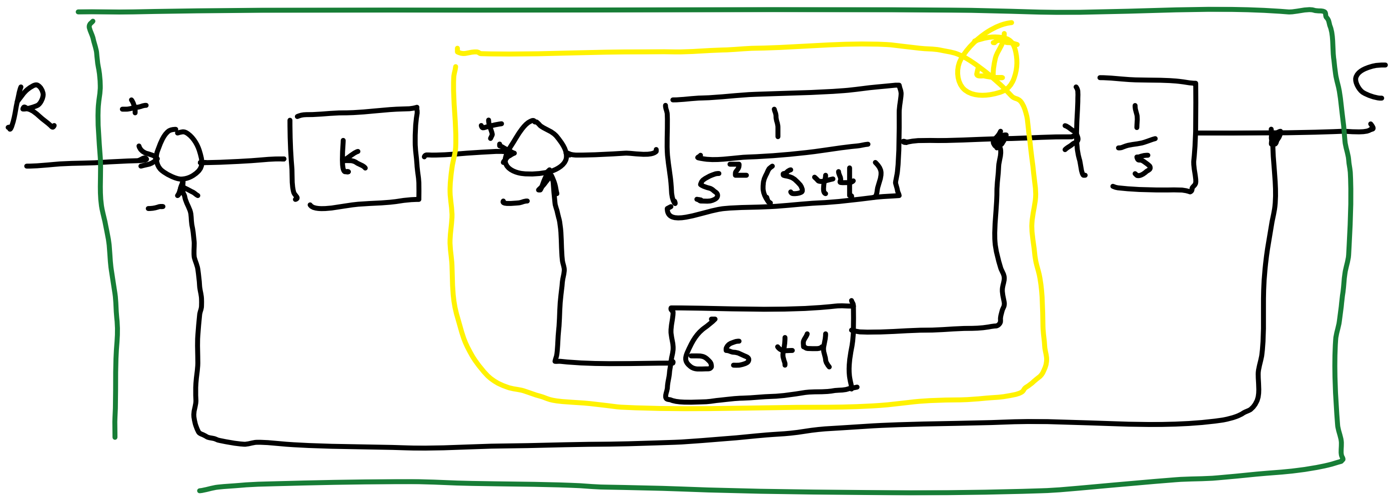
$$\frac{4\times 6 - 1\times 4}{4}$$

تابع تبدیل حلقه بسته

$$\frac{C}{R} = \frac{K}{s^4+4s^3+6s^2+4s+K}$$

s^4 :	1	6	K
s^3 :	4	4	0
s^2 :	5	K	
s^1 :	$\frac{20-4K}{5}$	0	
s^0 :	K		

$$0 < K < 5 \Leftarrow \begin{cases} 20-4K > 0 \Rightarrow K < 5 \\ K > 0 \end{cases}$$



$$\frac{C}{R} = \frac{K}{s^4+4s^3+6s^2+4s+K}$$

$$\frac{\frac{1}{s^2(s+4)}}{1+\frac{6s+4}{s^2(s+4)}} = \frac{1}{s^2(s+4)+6s+4} = \frac{1}{s^3+4s^2+6s+4}$$

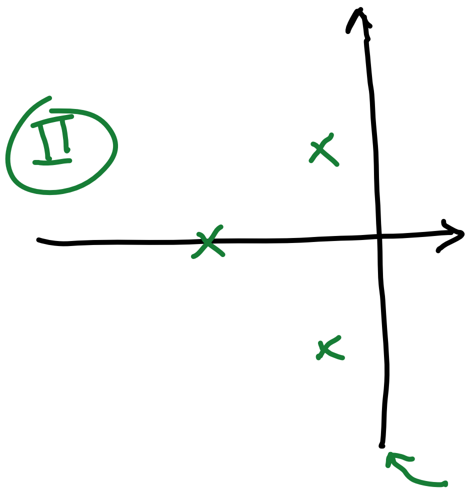
$$\frac{\frac{K}{s(s^3+4s^2+6s+4)}}{1+\frac{K}{s(s^3+4s^2+6s+4)}} = \frac{K}{s(s^3+4s^2+6s+4)+K}$$

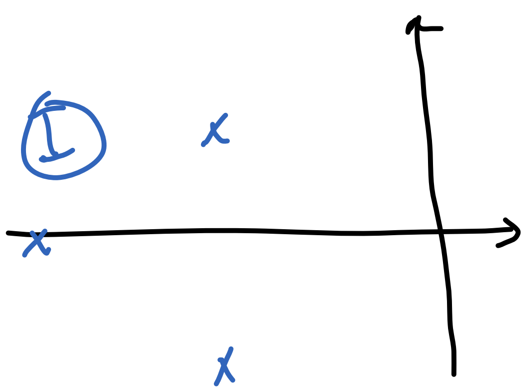
تحلیل پایداری نسبی:

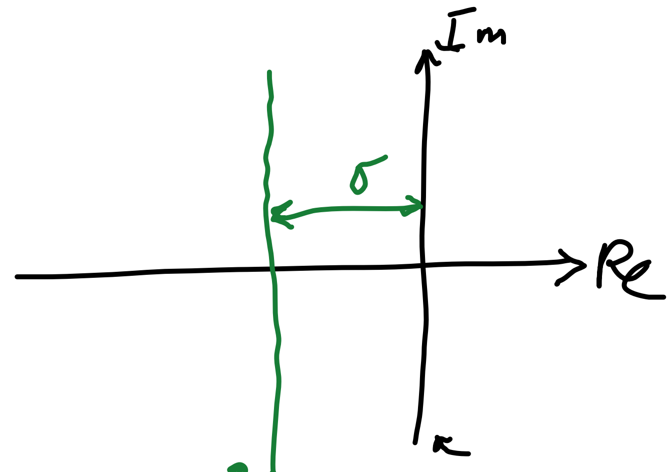
هرچه قطبهای غالب از محور موهومی دورتر باشند

سیستم پایدارتر است

سیستم I از سیستم II پایدارتر است.



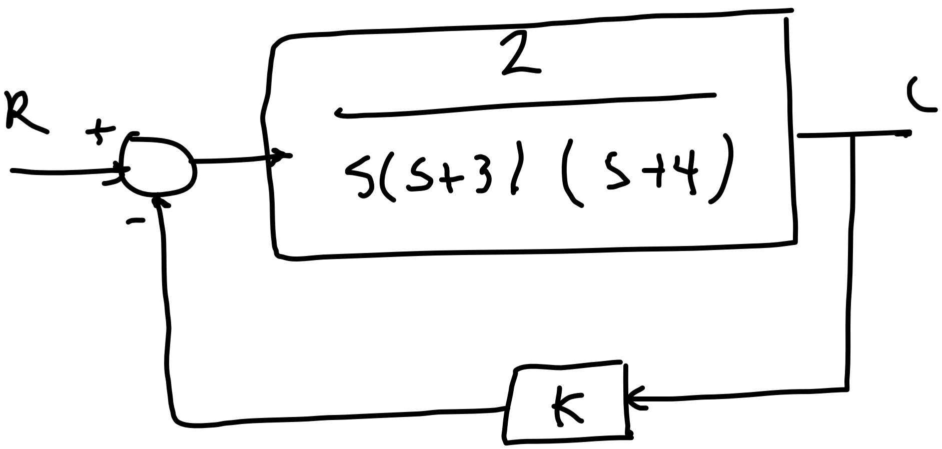




$$s \rightarrow (\hat{s} - \sigma)$$

مثال:

محدوده K جهت پایداری سیستم:



$$\frac{C}{R} = \frac{2}{s^3+7s^2+12s+2K}$$

$$s^3+7s^2+12s+2K=0$$

$$\begin{array}{lll}
s^3: & 1 & 12 \\
s^2: & 7 & 2K \\
s^1: & \frac{7\times 12-2K}{7} & 0 \\
s^0: & 2K &
\end{array}$$

$\longrightarrow 7\times 12 - 2K > 0 \Rightarrow 42 > K$

$\longrightarrow K > 0$

$0 < K < 42$

برای مثال قبل محدوده K را به نحوی تعیین کنید که قطبهای غالب حداقل یک واحد از محور موهومی دور باشند.

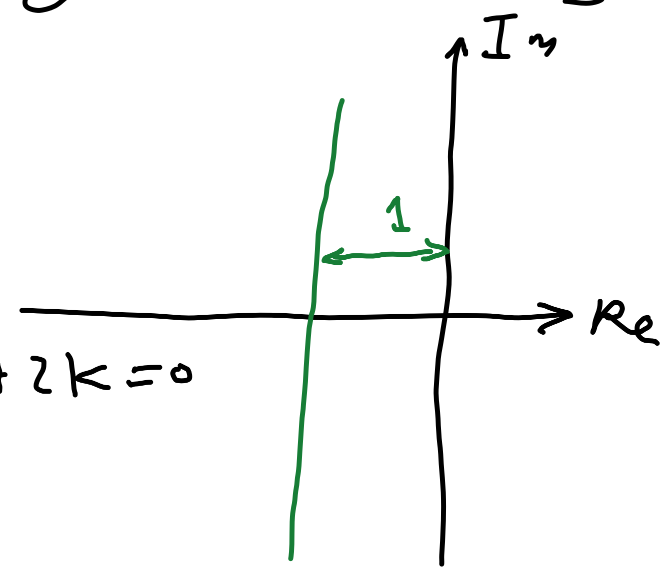
$$s^3+7s^2+12s+2K=0$$

$$s \longrightarrow \hat{s}-1$$

$$(\hat{s}-1)^3+7(\hat{s}-1)^2+12(\hat{s}-1)+2k=0$$

$$\Rightarrow \hat{s}^3-3\hat{s}^2+3\hat{s}-1+7\hat{s}^2-14\hat{s}+7+12\hat{s}-12+2k=0$$

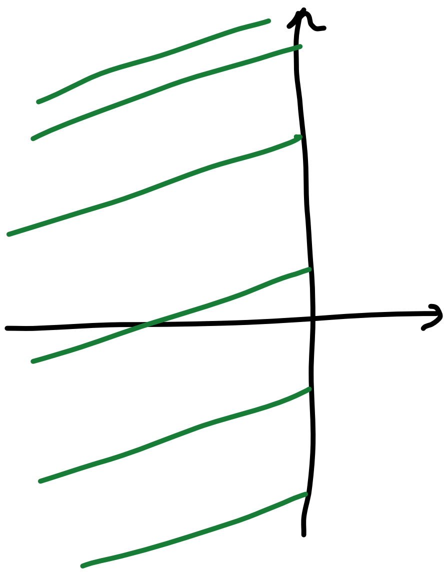
$$\Rightarrow \hat{s}^3+4\hat{s}^2+\hat{s}-6+2k=0$$



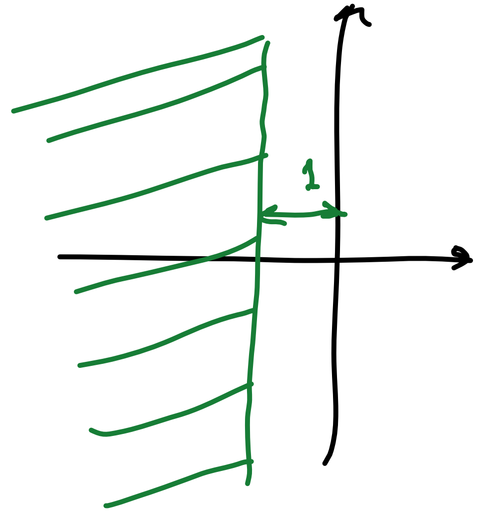
$$\hat{s}^3+4\hat{s}^2+\hat{s}-6+2K=0$$

$$\begin{array}{l|lll}
\hat{s}^3: & 1 & 1 & 0 \\
\hat{s}^2: & 4 & 2k-6 & \\
\hat{s}^1: & \dfrac{4-2k+6}{4} & 0 & \longrightarrow \quad 10-2K>0 \Rightarrow K<5 \\
\hat{s}^0: & 2k-6 & & \longrightarrow \quad 2k-6>0 \Rightarrow K>3
\end{array}$$

$$3<K<5$$



$0 < K < 42$



$3 < K < 5$