کنترل مدرن

تحقق سیستم‌های خطی

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

تحقق سیستم های خطی

Realization

$$(A, B, C, D) \longrightarrow H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- تابع تبدیل یک نمایش یکتا از دینامیک ورودی و خروجی سیستم LTI ارائه می دهد
- برای یک تابع تبدیل، تعداد نامحدودی معادله حالت می توان ارائه کرد.
- هر یک از معادلات حالت که توصیف کننده یک تابع تبدیل باشد، یک تحقق برای آن تابع تبدیل گفته می شود.

مثال: دو تحقق برای تابع تبدیل زیر بنویسید.

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -x + au \\ y = \frac{1}{a} x \end{cases}$$

تعریف تحقق: یک معادله حالت-خروجی

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$$

یک تحقق برای تابع تبدیل $H(s)$ است، اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$H(s)=\underline{C(sI-A)^{-1}B}+D=\hat{H}(s)+D$$

$$H(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

- اگر $D=0$ ← $m<n$ ← $H(s)$ اکیداً سره (strictly proper) می‌باشد
- اگر $D\neq 0$ ← $m=n$ ← $H(s)$ سره می‌باشد: ← $H(s)=\hat{H}(s)+D$

که در آن $\hat{H}(s)$ اکیداً سره است و تحقق آن به صورت

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}$$

می‌باشد.

قضیه وجود تحقق : یک ماتریس $H(s)$ را می‌توان به صورت معادلات فضای حالت تحقق داد، اگر و تنها اگر $H(s)$ ماتریس گویای سره (یا اکیداً سره) باشد.

$m \leq n$

تحقق کاهش ناپذیر (Minimal realization)

مثال

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = x \end{cases}$$

تحقق کاهش ناپذیر

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

تحقق کاهش ناپذیر نیست

تعریف تحقق کاهش ناپذیر: تحقق یک تابع تبدیل $H(s)$ کاهش ناپذیر است، اگر هیچ تحقق با تعداد متغیر حالت کمتر از آن نتوان یافت.

قضیه: تحقق کاهش ناپذیر است، اگر و تنها اگر کنترل پذیر و رویت پذیر باشد.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow[\text{متمایز باشند} \ A \ \text{ویژه}]{\text{با فرض اینکه مقادیر}} \xrightarrow{\text{قطری}} \begin{cases} \dot{z}_i = s_i z_i + w_i^T B u, \quad i = 1, \dots, n \\ y = Cv_1 z_1 + Cv_2 z_2 + \dots + Cv_n z_n \end{cases}$$

$$A^T w_i = \lambda_i w_i$$

$\leftarrow$ سر کتابی

$$x = Tz \rightarrow T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix}$$

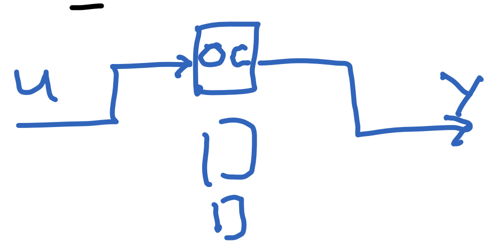
$$Av_i = \lambda_i v_i$$

$$\begin{cases} \dot{z}_i = s_i z_i + w_i^T B u, \quad i=1,\dots,n \\ y = c v_1 z_1 + c v_2 z_2 + \dots + c v_n z_n \end{cases} \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} \begin{cases} Z_i = \dfrac{1}{s-s_i} w_i^T B u \\ y(s) = \left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{s-s_i} \underbrace{(c v_i)(w_i^T B)}_{\neq 0} + D \right] u(s) \end{cases}$$

اگر سیستم کنترل پذیر و رویت پذیر باشد ← $c v_i \neq 0 \quad \forall i=1,\dots,n$

$w_i^T B \neq 0$

ضریب $\dfrac{1}{s-s_i}$ در تابع تبدیل حذف نشده است، پس تابع تبدیل دارای n قطب است که همان تعداد متغیرهای حالت است. ← این تحقق کاهش ناپذیر



شرط لازم ←

تحقق سیستم های تک ورودی - تک خروجی (SISO)

تابع تبدیل اکیدا سره زیر را در نظر بگیرید.

$$H(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

این تابع تبدیل را می خواهیم به فرم ماتریس A، B، C، D محقق کنیم.

در ابتدا حذف صفر و قطب مشترک در تابع تبدیل

مثال

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+3s+2} = \frac{\cancel{s+1}}{(\cancel{s+1})(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

Controller Cannonical Realiz— تحقق کانونی کنترل کننده

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \cdots - a_0 x_1 + u \\ y = b_{n-1}x_n + b_{n-2}x_{n-1} + \cdots + b_1 x_2 + b_0 x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\text{zero}}{0} & & & 1 \\ & & \iddots & \\ & 1 & & \\ & 1 & & \underset{\text{المانهای غیرصفر}}{*} \\ 1 & & & \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(\mathcal{C}) = n$$

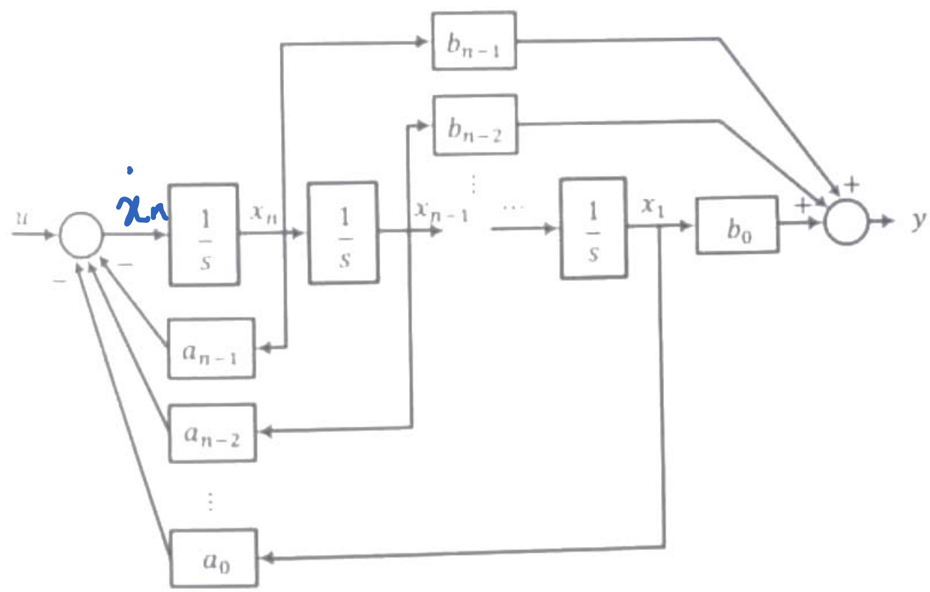
این تحقق حتماً کنترل پذیر است.

رویت پذیر بودن بستگی به نداشتن مودهای پنهان دارد.

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \cdots - a_0x_1 + \underline{u}$$
$$y = b_{n-1}x_n + b_{n-2}x_{n-1} + \cdots + b_1x_2 + b_0x_1$$

اشت:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{n-1}]x$$



شکل ۶-۱: دیاگرام بلوکی تحقق کانونی کنترل کننده

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & * \end{bmatrix} \rightarrow \text{Rank}(\mathcal{O}) = n$$

Observer C. R.

تحقق کانونی رویت کننده

قبلی

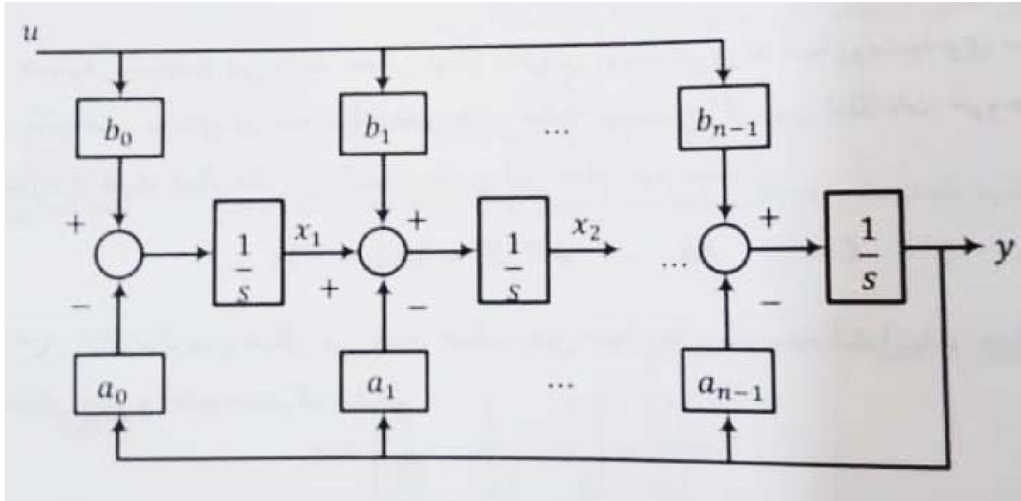
$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}^{A} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{B} u$$

$$y = \underbrace{[b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{n-1}]}_{C} x$$

$$\dot{x} = A^T x + C^T u$$
$$y = B^T x$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \overbrace{\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}}^{C^T} u$$

$$y = \underbrace{[0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1]}_{B^T} x$$



شکل ۶-۲: دیاگرام بلوکی تحقق کانونی رویت‌کننده

این تحقق دوگان تحقق قبلی

$A^T \rightarrow A$ و $B^T \rightarrow C$ و $C^T \rightarrow B$

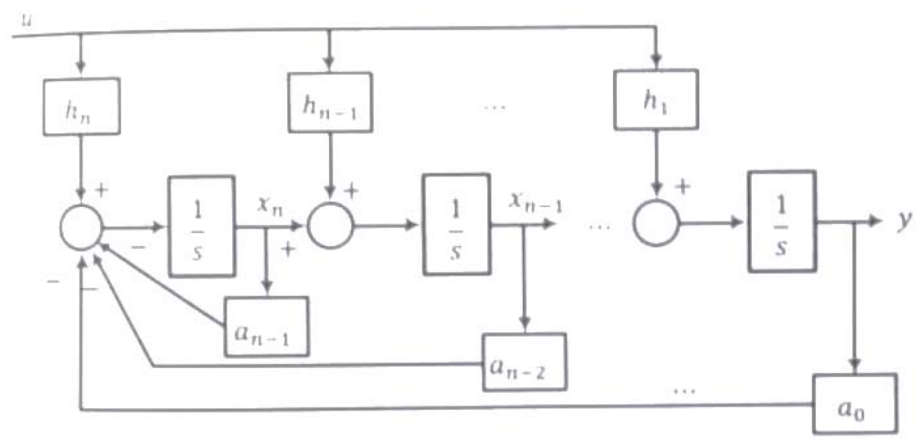
تحقق کانونی رویت پذیری

observable C.R.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = I$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]x$$



شکل ۶-۳: دیاگرام بلوکی تحقق کانونی رویت‌پذیری

پارامترهای مارکوف h_i

$$h_i = CA^{i-1}B \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}$$

h_i ها، پارامترهای مارکوف به ازای تحقق مختلف نامتغیر هستند

$CB \,,\quad CAB \,,\quad CA^2B \,,\, \dots \,,\quad CA^{n-1}B$

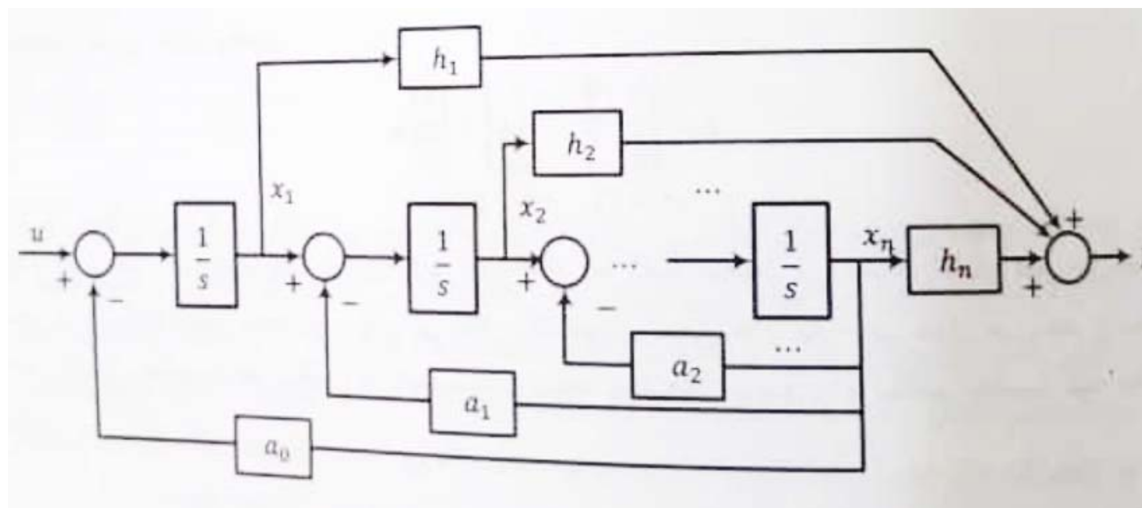
تحقق کانونی کنترل پذیری

این تحقق دوگان تحقق کانونی رویت پذیری است

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad \cdots \quad h_n] x$$

$$\mathcal{C} = I$$



مثال: برای تابع تبدیل زیر، تحقق های مختلف را بدست آورید.

$$H(s) = \frac{s^2+1}{s^3+6s^2+11s+5} \qquad H(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$n=3,\quad b_2=1,\quad b_1=0,\quad b_0=1$$

$$a_2=6,\quad a_1=11,\quad a_0=5$$

تحقق به صورت کنترل کننده

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{n-1}]x$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 1]\, x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{دوران حالت جبلی}]{\text{رویت کننده}}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

تحقق کانونی رویت پذیری

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$n=3$

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 11 & 6 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 26 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 26 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

تحقق کانونی جردن

$$H(s)=\frac{e_{11}}{(s+s_1)^3}+\frac{e_{12}}{(s+s_1)^2}+\frac{e_{13}}{s+s_1}+\frac{e_2}{s+s_2}+\frac{e_3}{s+s_3}$$

$$\dot{x}=\left[\begin{array}{ccc|c|c} -s_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -s_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -s_3 \end{array}\right]x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}u$$

تحقق کانونی جردن
کنترل پذیر

$$y=\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_2 & e_3 \end{bmatrix}x$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

تحقق با روش جردن

رویت پذیر

مثال‌های کتاب را بخوانید.