کنترل مدرن

پایداری

دکتر امین نیکوبین
دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک
anikoobin@semnan.ac.ir

تعریف نقطه تعادل، برای سیستم غیرخطی $\dot{x}=f(x,t)$ ، x^* یک حالت تعادل است اگر $f(x^*,t)=0$

مثال :

$$\ddot{\theta}+a\sin\theta=0$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2 & \Rightarrow 0=x_2 \\ \dot{x}_2=-a\sin x_1 & \Rightarrow 0=-a\sin x_1 \Rightarrow \sin x_1=0 \rightarrow x_1=k\pi\end{cases}$$

$$x_2=0$$

$$\dot{x}=Ax$$

برای سیستم خطی $\dot{x} = Ax \Rightarrow Ax^* = 0 \quad , A \in R^{n\times n}$

اگر $Rank(A) = n \rightarrow$ تنها جواب ممکن $x^* = 0$

اگر $Rank(A) < n$ باشد: $x^* = \mathcal{N}(A)$

مثال:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} x \Rightarrow A x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a_1 + 2a_2 = 0 \Rightarrow x^* = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad , \quad x^* = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تعریف پایداری به مفهوم لیاپانوف Stability in the sense of Lyapunov

یک سیستم با پاسخ یا مسیر $x(t)$ ($\in R^n$) و نقطه تعادل x^* ($\in R^n$)، در نظر بگیرید. این سیستم پایدار به مفهوم لیاپانوف است اگر

$$\forall \varepsilon > 0 , \quad \exists \delta > 0 , \quad \ni \| x(0) - x^* \| \leq \delta \Rightarrow \| x(t) - x^* \| \leq \varepsilon$$

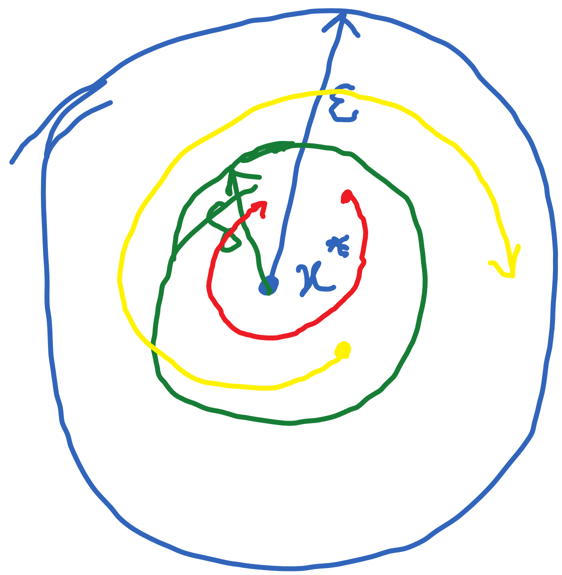
در اینجا $\|\cdot\|$ می‌تواند نرم اقلیدسی یا هر نرم دیگری باشد

$$\| x(t) \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\forall \varepsilon > 0 , \quad \exists\, \delta > 0 , \quad \ni \quad \| x(0) - x^* \| \leqslant \delta \Rightarrow \| x(t) - x^* \| \leqslant \varepsilon$$

$n = 2$ ، R^n در صفحه فاز اوکلیدی



می‌توان با انتخاب حالت اولیه مناسب،
تا حدی نزدیک به نقطه تعادل، از
دور شدن ازحالت از نقطه تعادل
جلوگیری کرد.

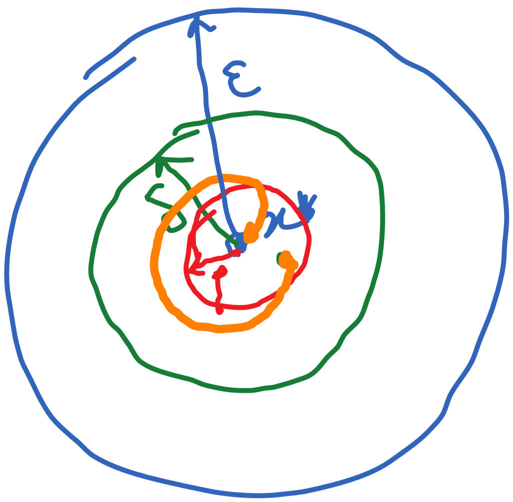
Asymptotic stability پایداری مجانبی لیاپانوف

حالت تعادل x^* پایدار مجانبی است اگر

الف - پایدار به مفهوم لیاپانوف باشد

ب -

$$\exists \rho>0 \ni \|x(0)-x^*\|<\rho \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\|x(t)-x^*\|\to 0$$



به شعاع ρ، شعاع همگرایی

پایداری داخلی: یک سیستم LTI پایدار داخلی است، اگر پاسخ سیستم بدون ورودی، x_{zi}، به ازای همه شرایط اولیه دلخواه به سمت صفر میل کند.

پایداری ورودی-خروجی BI-BO

یک سیستم LTI پایدار ورودی-خروجی است اگر به ازای ورودی محدود (BI) و شرایط اولیه صفر، پاسخ بدون شرایط اولیه، y_{zs}، محدود باقی بماند.

تعریف، پایداری داخلی،

یک سیستم LTI پایدار داخلی است، اگر و تنها اگر کلیه مقادیر ویژه‌های ماتریس A در نیمه چپ صفحه اعداد موهومی قرار بگیرند.

$Re[\lambda_i] < 0$

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots c_n e^{\lambda_n t} v_n$$

مقادیر ویژه تکراری $= \ldots\ t^k e^{\lambda_i t}\ \ldots$

First method of Lya

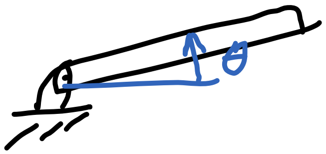
- پایداری به روش اول لیاپانوف،

$$\dot{x} = f(x,t) \longrightarrow x^*$$

$$A = \left.\begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \vdots & & & \\ \partial f_n/\partial x_1 & \cdots & \cdots & \partial f_n/\partial x_n \end{bmatrix}\right|_{x^*} \longrightarrow \dot{x} = Ax$$

مقادیر ویژه‌های ماتریس

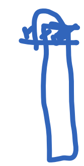
مثال:



$$I\ddot{\theta} + mgl_c\cos\theta + b\dot{\theta} = T$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{I}\left(T - mgl\cos x_1 - b x_2\right) \end{cases} \Rightarrow \quad x_1^* = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2^* = \begin{bmatrix} -\pi/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ناپایدار



پایدار

ناپایدار

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{mgl}{I}\sin x_1 & -\dfrac{b}{I} \end{bmatrix} \Rightarrow A\big|_{x_1^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{mgl}{I} & -\dfrac{b}{I} \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$A\big|_{x_2^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{mgl}{I} & -\dfrac{b}{I} \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}j}{2}$$

پایدار

$\rightarrow Re[\lambda_i] < 0$

$m = g = l = I = 1$

تعریف: یک سیستم LTI، تک ورودی تک خروجی (SISO)، پایدار BIBO است اگر و تنها اگر کلیه قطبهای تابع تبدیل در سمت چپ صفحه اعداد موهومی واقع باشد.

مثال: برای سیستم زیر پایداری ورودی خروجی و پایداری مجانبی (داخلی) را بررسی کنید.

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

برای پایداری داخلی (مجانبی)، مقادیر ویژه A

$$\det(sI - A) = (s-1)(s+1) = 0$$

$$s_1 = 1 \quad , \quad s_2 = -1$$

مود ناپایدار

پایدار مجانبی نیست.

$$H(s) = C(sI-A)^{-1}B = \frac{s-1}{s^2-1} = \frac{1}{s+1}$$

پایداری BI-BO دارد.

Second method　　پایداری جانبی به روش دوم لیاپانوف (روش مستقیم)
direct

یک سیستم غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ با نقطه تعادل $x^* = 0$ را درنظر بگیرید این نقطه تعادل پایدار جانبی به مفهوم لیاپانوف است اگر یک تابع اسکالر $V(x)$ بتوان یافت که دو شرط زیر صدق کند.

$E : T + V$

1- $V(x)$ یک تابع مثبت معین باشد (Pd)

- تابع $V(x)$ در محدوده فعل مبدأ پیوسته و دارای مشتق جزئی پیوسته باشد
- $V(x) > 0 \quad x \neq 0$

$V(0) = 0 \quad x = 0$

2- تابع $\dot{V}(x)$ منفی معین باشد (Nd)

- پیوسته باشد

$\dot{V}(x) < 0 \quad x \neq 0$

$\dot{V}(0) = 0$

مثال: سیستم غیرخطی زیر را با نقطه تعادل $x^* = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ در نظر بگیرید. پایداری نقطه تعادل را به روش دوم لیاپانوف بررسی کنید.

تابع $V(x)$ را به صورت زیر انتخاب کنید

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 - x_2^3\end{cases}$$

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 \longrightarrow \text{Challenge}$$

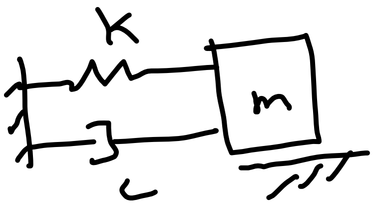
$$\longrightarrow \text{Pd}$$

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = x_1(-x - 2x_2^2) + 2x_2(x_1x_2 - x_2^3)$$

$$= -x_1^2 - 2x_2^4 = -(x_1^2 + 2x_2^4) \longrightarrow \text{Nd}$$

نقطه تعادل پایدار است

مثال :



$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$$

$$V(x)=\frac{1}{2}mx_2^2+\frac{1}{2}kx_1^2$$

انرژی کل

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=\frac{1}{m}\left[-cx_2-kx_1\right]\end{cases}$$

$$\dot{V}(x)=mx_2\dot{x}_2+kx_1\dot{x}_1=\cancel{m}\,x_2\frac{1}{\cancel{m}}(-cx_2-kx_1)+kx_1x_2$$

$$=-cx_2^2-k\cancel{x_1}x_2+k\cancel{x_1}x_2=-cx_2^2$$

+ لازال → NdV

منفی معین نیست،

$$\text{منفی معین}\begin{cases}\forall x\neq 0 \quad \dot{V}(x)<0 \longrightarrow x=\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}\rightarrow \dot{V}(x)=0\rightarrow\\ x=0\rightarrow \dot{V}(0)=0\end{cases}$$

نقض کرده است،

طبق قضیه کراسوفسکی - لازال، باید نشان دهیم که $x\neq 0$
در همه حالات دینامیکی سیستم صدق نمی‌کند.

$$\dot V(x) = 0 \longrightarrow x_2 = 0 \longrightarrow \dot x_2 = 0$$

$$\longrightarrow \dot x_1 = 0$$

$$\begin{cases}\dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = \frac{1}{m}\left[-cx_2 - kx_1\right]\end{cases} \longrightarrow 0 = \frac{1}{m}\left[-c\cancel{\overset{0}{x_2}} - kx_1\right]$$ لذا $x_1 = 0$

پس $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ که در آن $a \neq 0$ باشد پاسخی از سیستم نیست،

پس طبق قضیه لاسال $\dot V(x)$ نیمه منفی معین است و نقطه تعادل پایدار است

قضیه: پایداری سیستم‌های خطی به روش دوم لیاپانوف

سیستم داده شده با معادله $\dot{x} = Ax$ پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر برای ماتریس مثبت معین داده شده Q، پاسخ معادله لیاپانوف $(A^TP + PA = -Q)$، P مثبت معین باشد.

(LE) معادله لیاپانوف

$$V(x) = x^T P x \longrightarrow \dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (Ax)^T P x + x^T P A x$$

$$= x^T A^T P x + x^T P A x = x^T (A^T P + PA) x = -x^T Q x$$

با فرض $A^T P + PA = -Q$ که Q یک ماتریس pd باشند

شرط کافی

شرط لازم ← خودتان بخوانید.

مثال: پایداری نقطه تعادل سیستم زیر را به روش لیاپانوف بررسی کنید.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

- می‌توان $Q = I$ در نظر گرفت

- ① $A^T P + PA = -Q$

- P متقارن مجهول $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$

①

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2P_{11} + 2P_{12} = -1 \\ -2P_{11} - 5P_{12} + P_{22} = 0 \\ -4P_{12} - 8P_{22} = -1 \end{cases} \Rightarrow P_{11} = \frac{23}{60}, \quad P_{12} = \frac{-7}{60}, \quad P_{22} = \frac{11}{60}$$

$$P = \frac{1}{60}\begin{bmatrix} \boxed{23} & -7 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$$

بررسی کنیم که آیا P، مثبت است یا نه،

$$P_{11} > 0 \rightarrow 23 > 0 \quad \checkmark$$

$$\det P > 0 \rightarrow 23 \times 11 - 7 \times 7 > 0$$

پس P مثبت معین است و نقطه تعادل پایدار است.

مثال:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -3k \\ 2k & -5k \end{bmatrix} x$$

$$A^T P + PA = -Q \Rightarrow \quad P_{11} = \frac{7}{12k}, \quad P_{12} = \frac{-1}{4k}, \quad P_{22} = \frac{1}{4k}$$

$$\Delta_1 = \frac{7}{12k} > 0 \rightarrow k > 0$$

نقطه تعادل $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ به ازای همه K ، پایدار است

$$|P| = \frac{1}{12k^2}$$

مثبت معین بودن ماتریس A

- یا به عبارتی کلیه مقادیر ویژه های A مثبت باشند، $\lambda_i > 0$

or

- یا کهادهای اصلی مقدم A مثبت باشند، $\Delta_i > 0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} > 0 \;,\; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \;,\; |A| > 0 \;\; \cdots$$

اگر $\lambda_i \geq 0$ ← ماتریس A، نیمه مثبت معین. semi P.d.

یا $\Delta_i \geq 0$ ← ~ ~ ~

$$V(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 x_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$V(x) = x^T A x$,

Quadratic form,

برای اینکه V مثبت معین باشد کافی است
نشان دهیم A مثبت است

$$a_{11} = 1 > 0$$

$$|A| = 2 - 0.5 \times 0.5 > 0 \longrightarrow \underset{Pd}{A} \longrightarrow V \longrightarrow Pd$$

برای منفی معین بودن ماتریس A

- یا به کلیه مقادیر ویژه های A منفی باشند: $\lambda_i < 0$

or

- یا کهادهای اصلی مقدم A به صورت زیر باشد

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} < 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad , \quad |A| < 0 \quad \dots$$

$$\Delta_1 < 0 \ , \ \Delta_2 > 0 \ , \ \Delta_3 < 0 \ , \ \dots$$

$V = x^T A x \to$ V منفی معین خواهد بود