دانشگاه سمنان

ریاضی مهندسی پیشرفته

جبر خطی، معادلات دیفرانسیل معمولی

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

فصل چهارم: معادلات دیفرانسیل معمولی ، جلسه نهم

$$\dot{x} = a x, \quad x(0) = x_0 \;\Big|\rightarrow\; x(t) = e^{at} x(0) \rightarrow \dot{x}(t) = a e^{at} x(0)$$

$$\Rightarrow a e^{at} x(0) = a e^{at} x_0 \checkmark$$

حال اگر یک دسته معادله دیفرانسیل داشته باشیم

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = A x \quad \text{و} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

پس هدف حل یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی خطی است.

$$\dot{x} = Ax, \qquad A \in R^{n\times n}, \quad x \in R^{n\times 1}$$
$$x(0) = x_0$$

معادله بالا یک معادله همگن است. در حالت کلی معادله می‌تواند به صورت زیر باشد

u : ورودی گفته می‌شود

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu(t), & B \in R^{n\times r}, \quad u \in R^{r\times 1} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

مثال:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + t \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3x_2 + 2 \end{cases}$$

حل: $x(t) = \underset{x(0)}{x_h(t)} + \underset{u}{x_p(t)}$

- پاسخ همگن x_h، پاسخ دستگاه معادله دیفرانسیل به ازای شرایط اولیه $x(0)$ می‌باشد با فرض $u(t)=0$ که به آن x_{zi} گفته می‌شود.

- پاسخ خصوصی x_p، به ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ورودی $u(t)$ با فرض $x(0)=0$ که به آن x_{zs} گفته می‌شود.

با توجه به خطی بودن معادلات می‌توان نشان داد که جواب به صورت زیر خواهد بود

$$x(t) = x_h + x_p$$

در این فصل: دنبال حل معادله زیر هستیم

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

حل پاسخ همگن x_h ، $(u=0)$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \longrightarrow \ddot{x} = A\dot{x} = A(Ax) = A^2 x$$

$$\dddot{x} = A^3 x$$

$$\vdots$$

$$x^{(k)} = A^k x$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) \longrightarrow \dot{x}(0) = A\,x(0)$$

قرار می‌دهیم $t=0$

$$\ddot{x} = A^2 x \longrightarrow \ddot{x}(0) = A^2 x(0)$$

$$\dddot{x} = A^3 x$$

$$\vdots$$

$$x^{(k)} = A^k x \longrightarrow x^{(k)}(0) = A^k x(0)$$

$$\vdots$$

$$x \in R^{n\times 1}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

حالا بنویسیم بسط سری تیلور $x(t)$ حول نقطه صفر داریم

$$x(t) = x(0+t) = x(0) + \dot{x}(0)\,t + \ddot{x}(0)\frac{t^2}{2} + \cdots + x^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} + \cdots$$

$$= x(0) + At\,x(0) + A^2\frac{t^2}{2}x(0) + \cdots + \frac{A^k t^k}{k!}x(0) + \cdots$$

$$x(t) = x(0) + At\,x(0) + \frac{A^2 t^2}{2}x(0) + \cdots + \frac{A^k t^k}{k!}x(0) + \cdots$$

$$\Rightarrow x(t) = \underbrace{\left[I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \cdots + \frac{A^k t^k}{k!} + \cdots \right]}_{\varphi(t) = e^{At}} x(0)$$

$\varphi(t) = e^{At}$ → تابع ماتریسی
→ ماتریس نمایی
یا ماتریس انتقال حالت

$$e^{at} = 1 + at + \cdots + \frac{a^k t^k}{k!} + \cdots$$ ، a یک عدد اسکالر

مثال‌های بیشتر از توابع ماتریسی

$$\sin at = at - \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^5}{5!} + \cdots$$

مثال‌های بیشتر از توابع ماتریسی

$$\sin at = at - \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^5}{5!} + \cdots$$

$$\sin At = At - \frac{(At)^3}{3!} + \frac{(At)^5}{5!} - \cdots$$

یک جور موجودی هم

تعمیم: اگر $f(z)$ در ناحیه دایره‌ای شکلی در صفحه اعداد مختلط که شامل تمام مقادیر ویژه A است تحلیلی باشد، می‌توان تابع ماتریسی $f(A)$ را به صورت سری توانی نمایش داد یا تعریف کرد.

$$f(at) = e^{at} \longrightarrow f(At) = e^{At}$$

$$f = \frac{1}{at} \longrightarrow f(A) = \frac{1}{At} \quad \times$$

نمی‌توان تعریف کرد.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \longrightarrow x(t) = e^{At}x(0)$$

برای حل این معادله باید e^{At} را محاسبه کنیم.

روش های مختلفی جهت محاسبه ماتریس نمایی e^{At} ارائه شده است.

- روش کیلی همیلتون ✓
- روش تبدیل لاپلاس
- روش مودال

قضیه کیلی همیلتون

هر ماتریس در معادله مشخصه خود صدق می کند

$$\Delta(\lambda) = |A-\lambda I| = (-\lambda)^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + C_1\lambda + C_0 = 0$$

$$\Delta(A) = (-1)^n A^n + C_{n-1}A^{n-1} + \cdots + C_1 A + C_0 I = 0$$

محاسبه وارون ماتریس

$$A^{-1}\Delta(A) = 0$$

$$(-1)^n A^{n-1} + C_{n-1}A^{n-2} + \cdots + C_1 I + C_0 A^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{C_0}\left[(-1)^n A^{n-1} + C_{n-1}A^{n-2} + \cdots + C_2 A + C_1 I\right]$$

مثال ۴-۱ را انجام دهید

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)-1$$

$$\Rightarrow \Delta(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0$$

$$\Delta(A) = A^2 - 5A + 5I = 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{5}(A - 5I) = \checkmark$$

کاهش مرتبه یک چندجمله‌ای برحسب A (کاربرد دیگر قضیه کیلی همیلتون)

اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای اسکالر با درجه m و $P_1(x)$ ـ ـ ـ ـ ـ n بشرط $m>n$ داریم

$$\underbrace{P(x)}_{m} = \underbrace{Q(x)}_{m-n}\,\underbrace{P_1(x)}_{n} + \underbrace{R(x)}_{n-1}$$

$$\begin{array}{r|l} P(x) & P_1(x) \\ \hline & Q(x) \\ \vdots & \\ \overline{\quad R(x) \quad} & \end{array}$$

از طرف دیگر هر چندجمله‌ای ماتریسی مانند $P(A)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P(A) = Q(A)\,P_1(A) + R(A)$$

$$\begin{cases} P(\lambda) = Q(\lambda)P_1(\lambda) + R(\lambda) \\ P(A) = Q(A)P_1(A) + R(A) \end{cases}$$

اگر $P_1(\lambda)$ را چندجمله‌ای معادله مشخصه ماتریس A در نظر بگیریم

$$P_1(\lambda) = \Delta(\lambda) = 0 \longrightarrow P(\lambda) = R(\lambda)$$

به طوری که $P_1(A) = \Delta(A) = 0$

$$\underbrace{P(A)}_{m} = \underbrace{R(A)}_{n-1}$$

محاسبه توابع ماتریسی با روش کیلی همیلتون

معادله مشخصه ماتریس A

$$f(x) = Q(x)\,\Delta(x) + R(x) \Rightarrow \begin{cases} \text{if } x=\lambda_i \Rightarrow f(\lambda_i) = R(\lambda_i) \\ \text{if } x = A \Rightarrow f(A) = R(A) \end{cases}$$

$A \in R^{n\times n} \rightarrow \Delta(\lambda)$ مرتبه n

$R(\lambda)$ یک چندجمله‌ای درجه $n-1$ است.

$$R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1}$$

α_i ها مجهول هستند و باید حساب شوند. n مجهول داریم.

نحوه محاسبه α_i ها:

$$\begin{cases} f(\lambda_1) = R(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) = R(\lambda_2) \\ \vdots \\ f(\lambda_n) = R(\lambda_n) \end{cases}$$

n معادله و n مجهول داریم که با حل آن α_i ها محاسبه می‌شود.

$$f(A) = R(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1}$$

به طور خلاصه جهت محاسبه تابع ماتریسی A به روش کیلی هامیلتون

۱- محاسبه معادله مشخصه ماتریس A ، $\Delta(\lambda) = 0$

و محاسبه مقادیر ویژه‌های A　$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

۲- محاسبه α_i ها　$f(\lambda_i) = R(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$

۳- محاسبه $f(A)$

$f(A) = R(A)$

مثال: e^{At} را برای ماتریس زیر محاسبه کنید

$n=3$

$$A=\begin{bmatrix} -5 & -6 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=-1 \,,\; \lambda_2=-2 \,,\; \lambda_3=-3$$

$$f(A)=e^{At} \longrightarrow f(\lambda)=e^{\lambda t}$$

$$f(\lambda)=R(\lambda) \Rightarrow e^{\lambda t}=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2$$

$$\begin{array}{l} \lambda_1=-1 \longrightarrow \\ \lambda_2=-2 \longrightarrow \\ \lambda_3=-3 \longrightarrow \end{array} \begin{cases} e^{-t}=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2 \\ e^{-2t}=\alpha_0-2\alpha_1+4\alpha_2 \\ e^{-3t}=\alpha_0-3\alpha_1+9\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2=\frac{1}{2}e^{-3t}+\cdots \\ \alpha_1=\cdots \\ \alpha_0=\cdots \end{cases}$$

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2$$

مثال: ماتریس انتقال حالت را برای سیستم زیر محاسبه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} , \quad e^{At} ,$$

$$Q(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ 1 & \lambda+5 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+5)+6$$

$$\Rightarrow Q(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda+2)(\lambda+3)$$

$$\rightarrow \lambda_1 = -2 , \quad \lambda_2 = -3$$

$$e^{At} \xrightarrow{MATLAB} expm(A)$$

$$f(\lambda) = R(\lambda) \Rightarrow e^{\lambda t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -2 \longrightarrow \\ \lambda_2 = -3 \longrightarrow \end{array} \begin{cases} e^{-2t} = \alpha_0 - 2\alpha_1 & (1) \\ e^{-3t} = \alpha_0 - 3\alpha_1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \longrightarrow \quad \alpha_1 = e^{-2t} - e^{-3t} \quad , \quad \alpha_0 = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}$$

$$f(A) = e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A = \alpha_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \alpha_1 A + \alpha_0 I =$$

$$\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} + \left(3e^{-2t} - 2e^{-3t}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \\ -e^{-2t} + e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

```
[ 3*exp(-2*t) - 2*exp(-3*t), 6*exp(-2*t) - 6*exp(-3*t)]
[     exp(-3*t) - exp(-2*t), 3*exp(-3*t) - 2*exp(-2*t)]
```

مثال: برای ماتریس زیر، $\sin At$ را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3$$

$$f(\lambda) = \sin \lambda t, \qquad f(A) = \sin At$$

$$f(\lambda) = R(\lambda) \longrightarrow \sin \lambda t = \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -2 \longrightarrow \\ \lambda_2 = -3 \longrightarrow \end{array} \begin{cases} \sin(-2t) = \alpha_0 - 2\alpha_1 \\ \sin(-3t) = \alpha_0 - 3\alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_0 , \alpha_1 = \checkmark$$

$$\sin(At) = \alpha_0 I + \alpha_1 A$$

$$f(\lambda)=R(\lambda)$$

$$f(\lambda_i)=R(\lambda_i)$$

$$\left.\frac{d f(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda_i}=\left.\frac{dR(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda_i}$$

$$\left.\frac{d^2 f(\lambda)}{d\lambda^2}\right|_{\lambda_i}=\left.\frac{d^2R(\lambda)}{d\lambda^2}\right|_{\lambda_i}$$

اگر مقادیر ویژه ها تکراری باشند.

$$\underbrace{\lambda_i, \lambda_i, \dots, \lambda_i}_{m_i \text{ بار تکرار شده باشند}}$$

$$\vdots$$

$$\left.\frac{d^{m_i-1} f(\lambda)}{d\lambda^{m_i-1}}\right|_{\lambda_i}=\left.\frac{d^{m_i-1}R(\lambda)}{d\lambda^{m_i-1}}\right|_{\lambda_i}$$

مثال: برای ماتریس زیر، تابع ماتریسی e^{At} را محاسبه کنید.

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\27&-27&9\end{bmatrix} \longrightarrow \Delta(\lambda)=(3-\lambda)^3 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3$$

$$f(\lambda)=R(\lambda) \longrightarrow e^{\lambda t}=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2$$

$$\frac{d f(\lambda)}{d\lambda}=\frac{dR}{d\lambda} \longrightarrow t e^{\lambda t}=\alpha_1+2\alpha_2\lambda$$

$$\frac{d^2 f}{d\lambda^2}=\frac{d^2 R}{d\lambda^2} \longrightarrow t^2 e^{\lambda t}=2\alpha_2$$

$$\lambda = 3 \Rightarrow \begin{cases} e^{\lambda t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 \\ t e^{\lambda t} = \alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda \\ t^2 e^{\lambda t} = 2\alpha_2 \end{cases}$$

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2$$

ص ۶۸ کتاب

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{3t} = \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 \\ t e^{3t} = \alpha_1 + 6\alpha_2 \\ t^2 e^{3t} = 2\alpha_2 \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \checkmark$$

$$\alpha_1 = t e^{3t} - 3 t^2 e^{3t}$$

$$\alpha_2 = \frac{t^2 e^{3t}}{2}$$

[exp(3*t) - 3*t*exp(3*t) + (9*t^2*exp(3*t))/2, t*exp(3*t) - 3*t^2*exp(3*t), (t^2*exp(3*t))/2]
[(27*t^2*exp(3*t))/2, -exp(3*t)*(9*t^2 + 3*t - 1), (t*exp(3*t)*(3*t + 2))/2]
[27*t*exp(3*t) + (81*t^2*exp(3*t))/2, - 27*t*exp(3*t) - 27*t^2*exp(3*t), exp(3*t) + 6*t*exp(3*t) + (9*t^2*exp(3*t))/2]

مثال

$$A=\begin{bmatrix}2&1&4\\0&2&0\\0&3&1\end{bmatrix},\quad \Delta(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

$$\lambda_1=\lambda_2=2,\quad \lambda_3=1$$

$$f(\lambda)=R(\lambda)\rightarrow e^{\lambda t}=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2$$

$$\frac{df}{d\lambda}=\frac{dR}{d\lambda}\rightarrow te^{\lambda t}=\alpha_0+2\alpha_2\lambda$$

$$\begin{aligned}\lambda_3=1&\rightarrow e^{3t}=\alpha_0+3\alpha_1+4\alpha_2\\ \lambda_1=2&\rightarrow e^{2t}=\alpha_0+2\alpha_1+4\alpha_2\\ \lambda_1=2&\rightarrow te^{2t}=\alpha_0+4\alpha_2\end{aligned}\rightarrow \alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2=\checkmark$$

$$e^{At}=\alpha_0 I+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2$$

جلسه دهم

خصوصیات ماتریس نمایی e^{At}

1- $e^{A0} = I \quad , \; A \in R^{n\times n} , \; \to I_{n\times n}$

2- $e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2} = e^{At_2} e^{At_1}$

3- $\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}$

4- $\left(e^{At}\right)^{T} = e^{A^T t}$

5- $Ae^{At} = e^{At}A$, $AB \neq BA$ درحالت کلی

6- $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$

$\dot{x} = Ax$, $x(t) = e^{At}x_0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{At}x_0\right) = Ae^{At}x_0 \Rightarrow \frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$

پاسخ کامل معادلات حالت

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$e^{-At}\left(\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t)\right)$$

$$\Rightarrow e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}A\,x(t) = e^{-At}Bu(t)$$

5 $$\Rightarrow e^{-At}\dot{x}(t) - Ae^{-At}x(t) = e^{-At}Bu(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right) = e^{-At}Bu(t)$$

از دو طرف معادله انتگرال می‌گیریم

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right) = e^{-At}Bu(t)$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}\left(e^{-A\tau}x(\tau)\right)d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \left[e^{-A\tau}x(\tau)\right]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$\left[e^{-A\tau} x(\tau) \right]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} B u(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow e^{At}\left(e^{-At} x(t) - e^{-At_0} x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} B u(\tau)\, d\tau \right)$$

حال دو طرف معادله را در e^{At} ضرب می‌کنیم

$$\Rightarrow x(t) - e^{A(t-t_0)} x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau$$

$$x(t) - e^{A(t-t_0)} x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)} x(t_0)}_{x_h} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau}_{x_p}$$

$$x(t) = x_{zi} + x_{zs}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{zi} = e^{A(t-t_0)} x(t_0) \xrightarrow{t_0=0} x_{zi} = e^{At} x(0) \checkmark \\ x_{zs} = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau) \end{cases}$$

← روش انتگرال گیری مستقیم جهت محاسبه x_p

روش تبدیل لاپلاس

$$\mathcal{L}\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ x(0) = x_0\end{cases} \Rightarrow sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$\Rightarrow sX(s) - AX(s) = x(0) + BU(s)$$

$$\Rightarrow (sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$\Rightarrow X(s) = (sI-A)^{-1}x(0) + (sI-A)^{-1}BU(s)$$

از فصل دوازده

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$X(s) = (sI-A)^{-1}x(0) + (sI-A)^{-1}BU(s)$$

معادل

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$$

$$\mathcal{L}\left[e^{A(t)}x(0)\right] = (sI-A)^{-1}x(0) \Rightarrow \mathcal{L}\left[e^{At}\right] = (sI-A)^{-1} = \Phi(s)$$

$$\Phi(t) = e^{At} \longrightarrow \mathcal{L}[\Phi(t)] = \Phi(s) = (sI-A)^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$$

* امرس ستیل دالا

$$(sI-A)^{-1} B U(s) \longleftrightarrow \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau\right] = (sI-A)^{-1} B U(s) = \Phi(s) B U$$

انتگرال کانولوشن

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\right] = F(s)\, G(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \Phi(t-\tau) B u(\tau)\, d\tau\right] = \Phi(s) B U(s)$$

برای محاسبه پاسخ خصوصی x_p

$$x_p(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\Phi(s)\, B\, U(s)\right]$$

در روش کیلی همیلتون فقط x_h محاسبه می‌شد؛

$$x(t) = x_h(t) + x_p = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1} B\, U(s)\right]$$

مثال: پاسخ همگن و پاسخ خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را به ازای ورودی پله محاسبه کنید. $u(t)=1\ ,\ U(s)=\frac{1}{s}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$x_h(t) = e^{At} x(0) \quad , \quad e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1} \right]$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$SI-A = \begin{bmatrix} S & -1 \\ 3 & S+4 \end{bmatrix} \Rightarrow (SI-A)^{-1} = \frac{1}{S^2+4S+3} \begin{bmatrix} S+4 & 1 \\ -3 & S \end{bmatrix}$$

و $S^2+4S+3 = (S+1)(S+3)$

$$\Rightarrow (SI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{S+4}{(S+1)(S+3)} & \frac{1}{(S+1)(S+3)} \\ \frac{-3}{(S+1)(S+3)} & \frac{S}{(S+1)(S+3)} \end{bmatrix}$$

inv Laplace $\xrightarrow{\text{MATLAB}}$ ilaplace

عکس تبدیل لاپلاس، از روش ساده به کسرهای جزئی

$$G_1=\frac{s+4}{(s+1)(s+3)}=\frac{a_1}{s+1}+\frac{a_2}{s+3}=\frac{1.5}{s+1}+\frac{-0.5}{s+3}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$a_1=\lim_{s\to -1}\left[(s+1)G_1\right]=\lim_{s\to -1}\frac{s+4}{s+3}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 1.5e^{-t}-0.5e^{-3t}$$

$$a_2=\lim_{s\to -3}\left[(s+3)G_1\right]=\frac{s+4}{s+1}=\frac{1}{-2}$$

(3*exp(-t))/2 - exp(-3*t)/2

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ -3e^{-t} + 3e^{-3t} & -e^{-t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

اگر فقط محاسبه e^{At} مد نظر باشد

یعنی فقط پاسخ x_h را بخواهیم

$$x_h = e^{At} x(0)$$

روش کیلی همیلتون مناسب تر است.

توصیه می شود فصل سوم و چهارم درس کنترل اتوماتیک (مروری بر تبدیل لاپلاس) مطالعه شود.

$$X_p(s) = (sI - A)^{-1} B\, U(s)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+4}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{-3}{(s+1)(s+3)} & \frac{s}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)(s+3)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s(s+1)(s+3)} \\ \\ \dfrac{1}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}, \quad x_{p_1}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)(s+3)}\right]$$

$$x_{p_2}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+3)}\right]$$

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s+1} + \frac{a_3}{s+3} = \frac{\frac{1}{3}}{s} + \frac{\frac{-1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{6}}{s+3}$$

$$a_1 = \lim_{s \to 0}\left[s\,G_1(s)\right] = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \lim_{s \to -1}\left[(s+1)G_1(s)\right] = \frac{1}{-1 \times 2} = \frac{-1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{-3(-2)} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x_{p1}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[X_{p1}(s)\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t}$$

به طور مشابه: $\quad x_{p2}(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$

$$x_h = e^{At} x(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ -3e^{-t} + 3e^{-3t} & -e^{-t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$x_h = \begin{bmatrix} x_{h1} \\ x_{h2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a(3e^{-t} - e^{-3t}) + b(e^{-t} - e^{-3t}) \\ a(-3e^{-t} + 3e^{-3t}) + b(-e^{-t} + 3e^{-3t}) \end{bmatrix}$$

$$x_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \\ \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \end{bmatrix}, \quad x(t) = x_h + x_p = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

روش مودال یا قطری سازی

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

و

می‌توان با تعریف یک ماتریس تبدیل

با جایگذاری این تبدیل مشخص است، معادلات را قطری کرد

T یک ماتریس تبدیل، وارون پذیر است.

$$x = T\hat{x} \rightarrow \dot{x} = T\dot{\hat{x}}$$

$$\Rightarrow T\dot{\hat{x}} = AT\hat{x} + Bu \xRightarrow{T^{-1}} \begin{cases} \dot{\hat{x}} = T^{-1}AT\hat{x} + T^{-1}Bu \\ \hat{x}(0) = T^{-1}x(0) \end{cases}$$

$$x(0) = T\hat{x}(0) \Rightarrow$$

می‌توان T را هر ماتریس وارون‌پذیری در نظر گرفت.

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}} = T^{-1}AT\hat{x} + T^{-1}Bu \\ \hat{x}(0) = T^{-1}x(0)\end{cases}$$

اگر T را ماتریس مودال انتخاب کنیم $T=M$ که ستون‌های آن متشکل از بردارهای ویژه ماتریس A باشند.

$$Av_i = \lambda v_i$$

$$M = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dot{\hat{x}} = M^{-1}AM\hat{x} + M^{-1}Bu \\ \hat{x}(0) = M^{-1}x(0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{\hat{x}} = J\hat{x} + M^{-1}Bu \\ \hat{x}(0) = M^{-1}x(0)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}} = J\hat{x} + M^{-1}Bu \\ \hat{x}(0) = M^{-1}x(0)\end{cases} \rightarrow \hat{x}(t) = \hat{x}_h(t) + \hat{x}_p(t)$$

چون J تقریباً ماتریس قطری است

محاسبه e^{Jt} بسیار راحت‌تری می‌باشد

$$\Rightarrow \hat{x}_h(t) = e^{Jt}\hat{x}(0)$$

از طرف دیگر داشتیم

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ x(0) = x_0\end{cases}, \quad x_h = e^{At}x(0)$$

داشتیم $x = M\hat{x} \Rightarrow x_h = M\hat{x}_h = Me^{Jt}\hat{x}(0) = Me^{Jt}M^{-1}x(0)$

از طرف دیگر $x_h = e^{At}x(0)$

$$\left.\begin{aligned} x_h &= e^{At}\,x(0) \\ x_h &= M e^{Jt} M^{-1}\,x(0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow e^{At} = M e^{Jt} M^{-1}$$

$$\begin{cases} x_p = M\hat{x}_p \\ x_h = M e^{Jt} M^{-1}\,x(0) \end{cases} \leftarrow$$

یک بخش پاسخ خصوصی

قضیه: اگر ماتریس های A ، B و M همگی $n\times n$ باشند و $B=MAM^{-1}$ و $f(\lambda)$ تابعی دلخواه باشد که روی A تعریف می‌شود آنگاه.

$$f(B)=Mf(A)M^{-1}$$

این قضیه برای تابع نمایی اثبات شد

$$J=M^{-1}AM$$

$$f(J)=M^{-1}f(A)M \rightarrow Mf(J)M^{-1}=f(A)$$

$$\Rightarrow e^{At}=Me^{Jt}M^{-1}$$

جلسه یازدهم

محاسبه e^{Jt}

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

تک بلوک جردن

$$f' = \frac{df}{d\lambda}$$

$$f(J_1) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ & f(\lambda) & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & & f'(\lambda) \\ 0 & & & & f(\lambda) \end{bmatrix}$$

تابع ماتریس

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ 0 & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

$$f(\lambda) = e^{\lambda t}$$

$$f(J_1) = e^{J t}$$

$$F(J_1) = e^{J_1 t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2 e^{\lambda t}}{2!} & \frac{t^3 e^{\lambda t}}{3!} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2 e^{\lambda t}}{2!} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

$$f'(\lambda) = te^{\lambda t}$$

$$f''(\lambda) = t^2 e^{\lambda t}$$

$$f'''(\lambda) = t^3 e^{\lambda t}$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix} \Rightarrow F(J) = \begin{bmatrix} F(J_1) & & 0 \\ & F(J_2) & \\ 0 & & F(J_3) \end{bmatrix}$$

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc|c} -1 & 1 & & & \\ & -1 & & & \\ \hline & & -2 & 1 & \\ & & & -2 & \\ \hline & & & & -3 \end{array}\right] \Rightarrow e^{Jt} = \left[\begin{array}{cc|cc|c} e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-3t} \end{array}\right]$$

مثال: برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ ، e^{At} را به روش قطری سازی محاسبه کنید.

$$|\lambda I - A| = (\lambda-1)^3 = 0 \rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$$

$$q = n - \text{Rank}(A-\lambda I) = 1$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} , \quad J = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \vec{v}_1^{\,0} & \vec{v}_1^{\,1} & \vec{v}_1^{\,2} \end{matrix}$$

$$e^{At} = M e^{Jt} M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2 e^t}{2} \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t - te^t + \frac{t^2}{2} e^t & \times & \times \\ \frac{t^2}{2} e^t & \times & \times \\ te^t + \frac{t^2}{2} e^t & \times & \times \end{bmatrix}$$

مثال: برای ماتریس زیر، e^{At} را به روش قطری سازی محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda_1 = 0 , \quad \lambda_2 = -2$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow J = M^{-1} A M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{array}$$

۷۴ ص

$$e^{At} = M e^{Jt} M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{1}{e^{0t}} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-e^{-2t}}{2} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

مثال: دستگاه معادله زیر را به روش قطری سازی حل کنید

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x \quad , \quad x(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = x_0$$

$$|A - \lambda I| = 0 \longrightarrow \lambda_1 = -2 \, , \, \lambda_2 = 2 \, , \, \lambda_3 = 1 \longrightarrow M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax \, , \quad x = M\hat{x} \longrightarrow M\dot{\hat{x}} = AM\hat{x} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = M^{-1}AM\hat{x} \\ \hat{x}(0) = M^{-1}x_0 \end{cases}$$

$$x(0) = x_0 \longrightarrow M\hat{x}(0) = x_0 \longrightarrow \hat{x}(0) = M^{-1}x_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = J\hat{x} \\ \hat{x}(0) = M^{-1}x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad J = M^{-1} A M = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \hat{x} \quad \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = -2\hat{x}_1 \rightarrow \hat{x}_1 = e^{-2t}\hat{x}_1(0) \\ \dot{\hat{x}}_2 = 2\hat{x}_2 \rightarrow \hat{x}_2 = e^{2t}\hat{x}_2(0) \\ \dot{\hat{x}}_3 = \hat{x}_3 \rightarrow \hat{x}_3 = e^{t}\hat{x}_3(0) \end{cases}$$

$$\hat{x}(0) = M^{-1} x_0 = M^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{x}_1 = e^{-2t} \\ \hat{x}_2 = 2e^{2t} \\ \hat{x}_3 = -6e^{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = c_1 e^{-2t} \\ \hat{x}_2 = c_2 e^{2t} \end{cases}, \quad \hat{x}_3 = c_3 e^{t}$$

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = e^{-2t} \\ \hat{x}_2 = 2e^{2t} \\ \hat{x}_3 = -6e^{t} \end{cases} \quad \text{و} \quad x = M\hat{x}$$

$$x = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \end{array} \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 2e^{2t} \\ -6e^{t} \end{bmatrix}$$

ص ۸۳ (۲۰)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = 3e^{-2t} + 2e^{2t} \\ x_2 = -3e^{-2t} + 2e^{2t} \\ x_3 = e^{-2t} + 6e^{2t} - 6e^{t} \end{cases}$$

$$x = M\hat{x} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \hat{x}$$

$$x = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ c_3 e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 t}$$

$$\Rightarrow x = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_3 t}$$

$$x = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_3 t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ x_2 = -3c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ x_3 = c_1 e^{\lambda_1 t} + 3c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 3c_1 + c_2 \\ -1 = -3c_1 + c_2 \\ 1 = c_1 + 3c_2 + c_3 \end{cases}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2c_2 = 4 \rightarrow c_2 = 2$$

$$3c_1 = 5 - 2 = 3 \rightarrow c_1 = 1$$

$$\rightarrow x_1 = 3e^{\lambda_1 t} + 2e^{\lambda_2 t}$$

مثال: دستگاه معادلات زیر را به روش مودال حل کنید

۴_۱۷

ص ۷۸

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}-2&-2&0\\0&0&1\\0&-3&-4\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}}_{B}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

$$x(0)=\begin{bmatrix}10\\5\\2\end{bmatrix}, \qquad u=\begin{bmatrix}t\\1\end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=-3 \Rightarrow M=\begin{bmatrix}-2&1&-2\\1&0&-1\\-1&0&3\end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 1/2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} , \quad J = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & -2 & \\ 0 & & -3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \xrightarrow{x = M\hat{x}} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = J\hat{x} + M^{-1}Bu \\ \hat{x}(0) = M^{-1}x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1/2 & 2 \\ 3 & 6 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} , \quad \hat{x}(0) = M^{-1}x(0)$$

$$\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 17/2 \\ 34 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = -\hat{x}_1 + t/2 + t + 2 \\ \dot{\hat{x}}_2 = -2\hat{x}_2 + 3t + 6 \\ \dot{\hat{x}}_3 = -3\hat{x}_3 + \frac{t}{2} + 1 \end{cases} \longrightarrow \hat{x}_1 = \hat{x}_{h_1} + \hat{x}_{p_1}$$

MATLAB dsolve

$$\Rightarrow \hat{x}_{h_1} = e^{-t}\hat{x}_1(0) \quad , \quad \hat{x}_{p_1} = At + B \Rightarrow \hat{x}_{p_1} = \frac{t}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow A = -At - B + \frac{t}{2} + 2 \Rightarrow A + At + B - \frac{t}{2} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(A - \frac{1}{2}\right)t + (A + B - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 2 - A = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$\dot{\hat{x}}_1 = -\hat{x}_1 + t/2 + 2$ و $\hat{x}(0) = \hat{x}_{10}$

t/2 + (C1*exp(-t))/2 + 3/2

$\hat{x}_{h_1} = e^{-t}\,\hat{x}_1(0)$, $\hat{x}_{p_1} = \frac{t}{2} + \frac{3}{2}$

$\hat{x}_1 = \hat{x}_{h_1} + \hat{x}_{p_1} = C_1 e^{-t}\,\hat{x}_1(0) + \frac{t}{2} + \frac{3}{2}$ ✗

$\Rightarrow t=0 \Rightarrow \hat{x}_1(0) = \hat{x}_1(0) + \frac{3}{2}$

t/2 + (exp(-t)*(2*x0 - 3))/2 + 3/2

$$\Rightarrow \boxed{\hat{x}_1(t) = e^{-t}\left(\hat{x}_1(0) - \frac{3}{2}\right) + \frac{t}{2} + \frac{3}{2}}$$

$t=0 \Rightarrow \hat{x}_1(0) = \hat{x}_1(0) - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$ ✓

$$\dot{\hat{x}}_2 = -2\hat{x}_2 + 3t + 6 \Rightarrow \hat{x}_2 = \left(\hat{x}_2(0) - \frac{9}{4}\right)e^{-2t} + \frac{3t}{2} + \frac{9}{4}$$

$$\dot{\hat{x}}_3 = -3\hat{x}_3 + \frac{t}{2} + 1 \Rightarrow \hat{x}_3 = \left(\hat{x}_3(0) - \frac{5}{18}\right)e^{-3t} + \underbrace{\frac{t}{6} + \frac{5}{18}}_{\hat{x}_{p_3}}$$

$$x = M\hat{x}$$

ص ۷۹

```
>> dsolve(diff(x) == -x+t/2+2)

ans =

t/2 + (C1*exp(-t))/2 + 3/2
```

```
>> syms x0 x(t)
>> dsolve(diff(x) == -x+t/2+2, x(0)==x0)

ans =

t/2 + (exp(-t)*(2*x0 - 3))/2 + 3/2
```

مثال: دستگاه معادله زیر را حل کنید

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad , \quad x(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad v_2 = \bar{v}_1$$

$$|A - \lambda I| = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} , \; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \rightarrow M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{x}} = J \hat{x} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \hat{x} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = i \hat{x}_1 \Rightarrow \hat{x}_1 = e^{it} \hat{x}_1(0) \\ \dot{\hat{x}}_2 = -i \hat{x}_2 \rightarrow \hat{x}_2 = e^{-it} \hat{x}_2(0) \end{cases}$$

$$\hat{x}(0) = M^{-1} x(0)$$

$$\hat{x}(0) = M^{-1} x(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} - \frac{ib}{2} \\ \frac{a}{2} + \frac{ib}{2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_1 = e^{it}\hat{x}_1(0) \Rightarrow \hat{x}_1 = \left(\frac{a-ib}{2}\right) e^{it}$$

$$\hat{x}_2 = e^{-it}\hat{x}_2(0) \Rightarrow \hat{x}_2 = \left(\frac{a+ib}{2}\right) e^{-it}$$

$$x = M\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a-ib}{2} e^{it} + \frac{a+ib}{2} e^{-it} \\ \frac{ai+b}{2} e^{it} + \frac{-ai+b}{2} e^{-it} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$$

$$x_2 = i\hat{x}_1 - i\hat{x}_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a-ib}{2} e^{it} + \frac{a+ib}{2} e^{-it} \\ \frac{ai+b}{2} e^{it} + \frac{-ai+b}{2} e^{-it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos t + b\sin t \\ b\cos t - a\sin t \end{bmatrix}$$

$$x_1 = a\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) + ib\left(\frac{-e^{it} + e^{-it}}{2}\right)$$

$$= a\cos t + b\,\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = a\cos t + b\sin t$$

$$x_2 = b\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) + ai\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2}\right) = b\cos t - a\sin t$$

$$e^{it} = \cos t + i\sin t \;,\quad e^{-it} = \cos t - i\sin t$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

جلسه دوازدهم

مثال: دستگاه معادله زیر را حل کنید:

مثال ۴-۲۵ کتاب

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} , \qquad u(t) = t$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -3 \text{ و } \lambda_2 = \lambda_3 = 3$$

$$M = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow \ \ & \ \ \uparrow \ \ & \ \ \uparrow \\ v_1 \ \ & \ \ v_2 \ \ & \ \ v_3 \end{array} \end{array} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{x}} = M^{-1}AM\hat{x} + M^{-1}Bu$$

$$\dot{\hat{x}} = J\hat{x} + M^{-1}\begin{bmatrix}-9t\\0\\-18t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}\hat{x} + \begin{bmatrix}-3t\\-15t\\-3t\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = -3x_1 - 3t & (1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = 3x_2 - 15t \\ \dot{\hat{x}}_3 = 3x_3 - 3t \end{cases}$$

برای محاسبه جواب خصوصی $\rightarrow$ $\hat{x}_{p_1} = At + B$

$\hat{x}_{p_1}$ را در معادله (1) جایگذاری می‌کنیم

$$A = -3(At+B) - 3t$$

$$\Rightarrow A + 3B + (3A+3)t = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{x}_{p_1} = -t + \frac{1}{3}$$

به طور مشابه x_{p2} و x_{p3} را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{cases} \hat{x}_{p1} = -t + \frac{1}{3} \\ \hat{x}_{p2} = 5t + 5/3 \\ \hat{x}_{p3} = t + \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x_p = M\hat{x}_p = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -t + \frac{1}{3} \\ 5t + 5/3 \\ t + \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5t+1 \\ 2t \\ 4t+2 \end{bmatrix}$$

نهایتاً $x(t)$ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$x(t) = M\hat{x} = x_h + x_p = \underbrace{c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 t}}_{x_h} + \underbrace{M\hat{x}_p}_{x_p}$$

روش دیگر

$$\hat{x}_h = e^{Jt}\hat{x}(0) = e^{Jt}M^{-1}x(0) \Rightarrow x_h = M\hat{x}_h = Me^{Jt}M^{-1}x(0)$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} 5t+1 \\ 2t \\ 4t+2 \end{bmatrix}$$

حال ثابت c_1 و c_2 و c_3 از شرط اولیه $x(0) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ محاسبه می‌شوند

$$\begin{cases} x_1(0) = -c_1 + c_2 - c_3 + 1 = a \\ x_2(0) = -c_1 + c_3 = b \\ x_3(0) = c_1 + c_2 + 2 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)\quad -c_1 + c_2 - c_3 = a - 1 \\ -c_1 + c_3 = b \rightarrow c_3 = b + c_1 \\ c_1 + c_2 = c - 2 \\ \quad \rightarrow c_2 = -c_1 + c - 2 \end{cases}$$

c_2 و c_3 را در (1) جایگذاری می‌کنیم

$$\begin{cases} ① & -c_1 + c_2 - c_3 = a-1 \\ ② & -c_1 + c_3 = b \rightarrow c_3 = b + c_1 \\ ③ & c_1 + c_2 = c-2 \end{cases}$$

$\hookrightarrow c_2 = -c_1 + c - 2$

$① \Rightarrow -\cancel{c} - c_1 + \cancel{c} - 2 - b - c_1 = a-1 \Rightarrow -2c_1 = 2 + b + a - 1$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = -\frac{(a+b+1)}{2}}$$

$$② \Rightarrow c_3 = b + c_1 = \boxed{-\frac{(a-b+1)}{2}}$$

$$③ \Rightarrow c_2 = -c_1 + c - 2 = \frac{a+b+1}{2} + c - 2 = \boxed{\frac{a+b+1+2c-2}{2}}$$

مثال: دستگاه معادله زیر را حل کنید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} x(t),$$

$$|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}\left(3 \mp \sqrt{3}\,i\right)$$

$$\Rightarrow M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{3}\,i}{2} & \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2} \\ 0 & \frac{-(1+\sqrt{3}\,i)}{2} & \frac{-(1-\sqrt{3}\,i)}{2} \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3+\sqrt{3}\,i}{6} & \frac{-3+\sqrt{3}\,i}{6} \\ 0 & \frac{3-\sqrt{3}\,i}{6} & \frac{-3-\sqrt{3}\,i}{6} \end{bmatrix}$$

روش اول

$$x = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 t}$$

$$\Rightarrow x = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{-(1+\sqrt{3}i)}{2} \end{bmatrix} e^{\frac{3-\sqrt{3}i}{2}t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{-(1-\sqrt{3}i)}{2} \end{bmatrix} e^{\frac{3+\sqrt{3}i}{2}t}$$

c_2 و c_3 مزدوج هستند

$c_2 = a - bi$

$c_3 = a + bi$

درنظر می‌گیریم

$$\Rightarrow x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\frac{3-\sqrt{3}i}{2}t} + c_3 e^{\frac{3+\sqrt{3}i}{2}t}$$

$$\Rightarrow x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} + (a - bi) e^{\frac{3-\sqrt{3}i}{2}t} + (a+bi) e^{\frac{3+\sqrt{3}i}{2}t}$$

$$\Rightarrow x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} + a e^{\frac{3t}{2}} \left[e^{\frac{-\sqrt{3}i}{2}t} + e^{\frac{\sqrt{3}i}{2}t} \right] + b e^{\frac{\sqrt{3}}{2}t} \left[e^{\frac{\sqrt{3}i}{2}t} - e^{\frac{-\sqrt{3}i}{2}t} \right] i$$

$$x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} + a e^{\frac{3t}{2}} \left[e^{\frac{-\sqrt{3}i}{2}t} + e^{\frac{\sqrt{3}i}{2}t} \right] + b e^{\frac{3}{2}t} \left[e^{\frac{\sqrt{3}i}{2}t} - e^{\frac{-\sqrt{3}i}{2}t} \right] i$$

$$\Rightarrow x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + 2a e^{\frac{3t}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - 2b e^{\frac{3t}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}t}{2}$$

به طور مشابه برای x_2 داریم

$$x_2(t) = c_2 \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) e^{\frac{3-\sqrt{3}i}{2}t} + c_3 \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) e^{\frac{3+\sqrt{3}i}{2}t}$$

$$\Rightarrow x_2(t) = (a-bi)\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) e^{\frac{3-\sqrt{3}i}{2}t} + (a+bi)\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) e^{\frac{3+\sqrt{3}i}{2}t}$$

$$x_2(t) = (a-bi)\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)e^{\frac{3-\sqrt{3}i}{2}t} + (a+bi)\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)e^{\frac{3+\sqrt{3}i}{2}t}$$

$$\Rightarrow x_2(t) = \left[\underline{\frac{a-\sqrt{3}b}{2}} - \left(\underline{\frac{\sqrt{3}a+b}{2}}\right)i\right]e^{\frac{3-\sqrt{3}i}{2}t}$$

$$+\left[\underline{\frac{a-\sqrt{3}b}{2}} + \left(\underline{\frac{+\sqrt{3}a+b}{2}}\right)i\right]e^{\frac{3+\sqrt{3}i}{2}t}$$

$$= \frac{a-\sqrt{3}b}{2}e^{\frac{3t}{2}}\left[e^{-\frac{\sqrt{3}it}{2}} + e^{\frac{\sqrt{3}it}{2}}\right] + \frac{\sqrt{3}a+b}{2}i\left[e^{\frac{\sqrt{3}it}{2}} - e^{-\frac{\sqrt{3}it}{2}}\right]e^{\frac{3t}{2}}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{a-\sqrt{3}b}{2}e^{\frac{3t}{2}}\left(2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}a+b}{2}e^{\frac{3t}{2}}\left(-2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}$$

x_3 نتیجه‌ی وارونش به محاسبه می‌شود. سپس ضرایب c ، a ، b

با توجه به شرایط اولیه داده شده، سه معادله، سه مجهول محاسبه می‌شوند.

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{cases}
x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + 2a e^{\frac{3t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - 2b e^{\frac{3t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}\, t}{2} \\
x_2 = \frac{a-\sqrt{3}\, b}{2} e^{\frac{3t}{2}} \left(2\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + \frac{\sqrt{3}a+b}{2} e^{\frac{3t}{2}} \left(-2\sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \\
x_3 = \cdots
\end{cases}
$$

سه معادله سه مجهول b, a, c_1

$$
\left.
\begin{aligned}
x_1(0) &= c_1 + 2a = x_{10} \\
x_2(0) &= \frac{a-\sqrt{3}b}{2} = x_{20} \\
x_3(0) &= \cdots = x_{30}
\end{aligned}
\right) \Rightarrow
$$

به ترتیب x_{30}, x_{20}, x_{10} بدست می آیند.

روش دوم

$$\dot{\hat{x}} = M^{-1} A M \hat{x} = J \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3+\sqrt{3}i}{2} \end{bmatrix} \hat{x}$$

$$\hat{x}(0) = M^{-1} x(0)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_1 \longrightarrow \hat{x}_1 = e^{t}\, \hat{x}_1(0) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \frac{3-\sqrt{3}i}{2} \hat{x}_2 \longrightarrow \hat{x}_2 = e^{\left(\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\right)t}\, \hat{x}_2(0) \\ \dot{\hat{x}}_3 = \frac{3+\sqrt{3}i}{2} \hat{x}_3 \longrightarrow \hat{x}_3 = e^{\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\right)t}\, \hat{x}_3(0) \end{cases}$$

$$\hat{x}(0) = M^{-1}x(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3+\sqrt{3}i}{6} & \frac{-3+\sqrt{3}i}{6} \\ 0 & \frac{3-\sqrt{3}i}{6} & \frac{-3-\sqrt{3}i}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

در ابتدا

$x_{10} = a$

$x_{20} = b$

$x_{30} = c$

$$= \begin{bmatrix} a-b+c \\ \frac{1}{2}(b-c) + \frac{\sqrt{3}}{6}(b+c)i \\ \frac{1}{2}(b-c) - \frac{\sqrt{3}}{6}(b+c)i \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_1 = e^{t}\,\hat{x}_1(0)$$

$$\hat{x}_2 = e^{\left(\frac{3-\sqrt{3}\,i}{2}\right)t}\,\hat{x}_2(0)$$

$$\hat{x}_3 = e^{\left(\frac{3+\sqrt{3}\,i}{2}\right)t}\,\hat{x}_3(0)$$

$$\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} a-b+c \\ \frac{1}{2}(b-c)+\frac{\sqrt{3}}{6}(b+c)\,i \\ \frac{1}{2}(b-c)-\frac{\sqrt{3}}{6}(b+c)\,i \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_1 = (a-b+c)\,e^{t}$$

$$\hat{x}_2 = \left[\frac{1}{2}(b-c)+\frac{\sqrt{3}}{6}(b+c)\,i\right] e^{\frac{3}{2}t}\, e^{-\frac{\sqrt{3}\,i t}{2}}$$

$$\hat{x}_3 = \left[\frac{1}{2}(b-c)-\frac{\sqrt{3}}{6}(b+c)\,i\right] e^{\frac{3}{2}t}\, e^{\frac{\sqrt{3}\,i t}{2}}$$

$$x = M\hat{x} \Rightarrow$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} & \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ 0 & \dfrac{-(1+\sqrt{3}i)}{2} & \dfrac{-(1-\sqrt{3}i)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a-b+c)e^{t} \\ \left[\dfrac{1}{2}(b-c) + \dfrac{\sqrt{3}}{6}(b+c)i\right] e^{\frac{3}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}it} \\ \left[\dfrac{1}{2}(b-c) - \dfrac{\sqrt{3}}{6}(b+c)i\right] e^{\frac{3}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it} \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = (a-b+c)e^{t} + \left[\frac{1}{2}(b-c) + \frac{\sqrt{3}}{6}(b+c)i\right] e^{\frac{3}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}it}$$

$$+ \frac{1}{2}(b-c) - \frac{\sqrt{3}}{6}(b+c)i\Big] e^{\frac{3}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it}$$

$$x_1(t) = (a-b+c)e^{t} + \left[\frac{1}{2}(b-c) + \frac{\sqrt{3}}{6}(b+c)i\right] e^{\frac{3}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}ti}$$

$$+ \left[\frac{1}{2}(b-c) - \frac{\sqrt{3}}{6}(b+c)i\right] e^{\frac{3}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}ti}{2}}$$

$$\Rightarrow x_1(t) = (a-b+c)e^{t} + \frac{1}{2}(b-c)e^{\frac{3t}{2}}\left[e^{-\frac{\sqrt{3}ti}{2}} + e^{\frac{\sqrt{3}ti}{2}}\right]$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{6}(b+c)e^{\frac{3t}{2}} i \left[e^{-\frac{\sqrt{3}ti}{2}} - e^{\frac{\sqrt{3}ti}{2}}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1(t) = (a-b+c)e^{t} + \frac{1}{2}(b-c)e^{\frac{3t}{2}}\left(2\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}(b+c)e^{\frac{3t}{2}}\left(2\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)}$$

برای x_2 داریم

$$x_2(t) = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\left[\frac{1}{2}(b-c) + \frac{\sqrt{3}}{6}(b+c)i\right] e^{\frac{3}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{3}it}{2}}$$

$$+ \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\left[\frac{1}{2}(b-c) - \frac{\sqrt{3}}{6}(b+c)i\right] e^{\frac{3}{2}t} e^{\frac{\sqrt{3}it}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{4}(b-c) + \frac{3}{12}(b+c)\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}(b-c) + \frac{\sqrt{3}}{12}(b+c)\right)i\right] e^{\frac{3}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{3}ti}{2}}$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{4}(b-c) + \frac{1}{4}(b+c)\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}(b-c) - \frac{\sqrt{3}}{12}(b+c)\right)i\right] e^{\frac{3}{2}t} e^{+\frac{\sqrt{3}ti}{2}}$$

با ساده‌سازی عبارت بالا می‌توان تنها $\sin$ و $\cos$ را بدست آورد.

x =

(exp(t)*(3*a - 3*b + 3*c + 3*b*cos((3^(1/2)*t)/2)*exp(t)^(1/2) - 3*c*cos((3^(1/2)*t)/2)*exp(t)^(1/2) + 3^(1/2)*b*sin((3^(1/2)*t)/2)*exp(t)^(1/2) + 3^(1/2)*c*sin((3^(1/2)*t)/2)*exp(t)^(1/2)))/3

(exp(t)^(3/2)*(3*b*cos((3^(1/2)*t)/2) - 3^(1/2)*b*sin((3^(1/2)*t)/2) + 2*3^(1/2)*c*sin((3^(1/2)*t)/2)))/3

(exp(t)^(3/2)*(3*c*cos((3^(1/2)*t)/2) - 2*3^(1/2)*b*sin((3^(1/2)*t)/2) + 3^(1/2)*c*sin((3^(1/2)*t)/2)))/3