کنترل مدرن

فیدبک حالت

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

ایده اصلی در طراحی کنترل کننده در کنترل مدرن استفاده از فیدبک حالت است.

State feedback

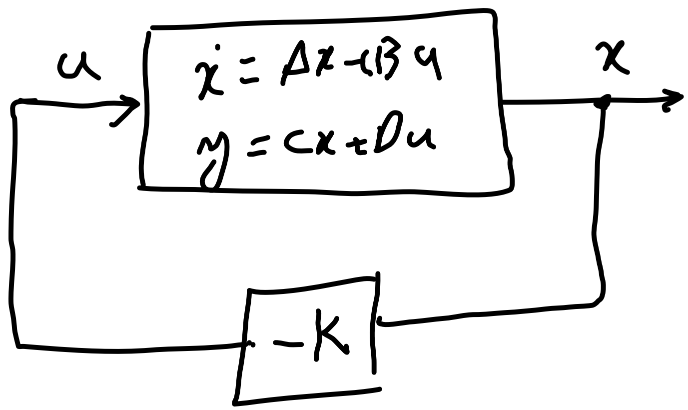
هدف از طراحی کنترل کننده:

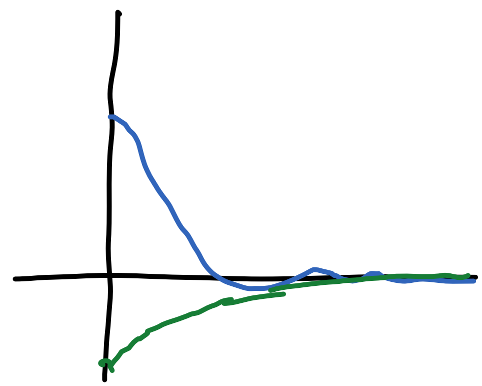
- پایداری داخلی — stability
- تنظیم یا ردگیری — command following
- حذف اثر اغتشاش — Disturbance rejection
- کاهش اثر نویز — noise Reduction
- عدم حساسیت به مدل — increasing Model sensivity

در کنترل مدرن جهت رسیدن به اهداف ذکر شده از کنترل کننده فیدبک حالت به صورت زیر استفاده می شود.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \text{و} \quad u = -Kx$$

نیاز به اندازه گیری همه حالتها





$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad \underset{r\times 1}{u} = -K \underset{n\times 1}{x} \longrightarrow K \in \mathbb{R}^{r\times n}$$

برای سیستم تک ورودی

$$K = [K_1 \quad K_2 \cdots K_n] \quad , \quad K \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

$$\dot{x} = Ax - BKx \Rightarrow \dot{x} = (A - BK)x$$

با فرض $A_{cl} = A - BK$

$$\Rightarrow \dot{x} = A_{cl}\, x$$

جهت رسیدن به پایداری داخلی، کافی است K را به گونه‌ای انتخاب کنیم که مقادیر ویژه‌های A_{cl} ، سمت چپ محور $j\omega$ قرار بگیرند.

$$A_{cl} \longrightarrow \mathrm{Re}[\lambda_i] < 0$$

$$y = Cx$$

$$\dot{x} = A_{cl}\, x \Rightarrow \underset{t \to \infty}{x \longrightarrow 0} \Rightarrow \underset{t \to \infty}{y \longrightarrow 0}$$

مثال: سیستم زیر را درنظر بگیرید. ماتریس فیدبک K را به نحوی تعیین کنید که قطبهای تابع تبدیل حلقه بسته در -2 و -3 قرار بگیرند

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad u = -Kx = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A_{cl} = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

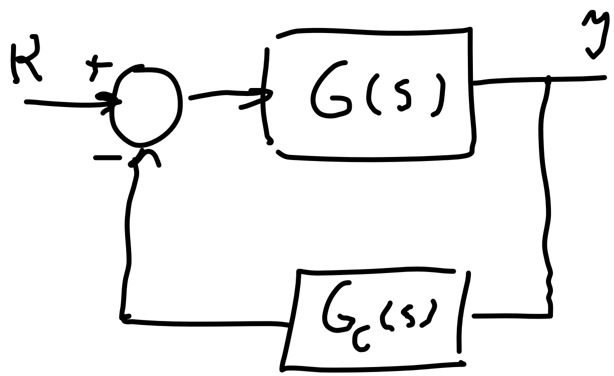
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 1+k_2 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A_{cl}) = \det \begin{bmatrix} s-k_1 & -1-k_2 \\ k_1 & s+k_2 \end{bmatrix} = s^2 + (k_2 - k_1)s + k_1 = 0$$

$$-3, -2 \longrightarrow P_{cl} = (s+3)(s+2) = s^2 + 5s + 6$$

$$\begin{cases} k_2 - k_1 = 5 \\ k_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k_2 = 11}$$

کنترلر فیدبک حالت درحقیقت نوعی تعمیم یافته کنترل کننده PD است.



$$G(s)=\frac{1}{s-1} \qquad G_c(s)=K \;\Rightarrow\; \frac{Y}{R}=\frac{1}{s+K-1}$$

با انتخاب مناسب K می توان سیستم حلقه بسته را پایدار نمود

$$G(s)=\frac{1}{s(s-1)} \text{ و } G_c(s)=K \;\Rightarrow\; \frac{Y}{R}=\frac{1}{s^2-s+K}$$

به ازای هیچ K ای نمی توان سیستم حلقه بسته را پایدار کرد.

$$G_c(s)=K_1+K_2 s \longrightarrow \frac{Y}{R}=\frac{1}{s^2+(K_2-1)s+K_1} \longrightarrow$$

می توان K_1 و K_2 را به نحوی انتخاب نمود که سیستم حلقه بسته پایدار شود

اگر $y_d \neq 0$ ورودی مرجع غیرصفر باشد:

در این حالت ابتدا باید مقادیر ماندگار متغیرهای حالت و ورودی های لازم را برای رسیدن به y_d محاسبه کنیم

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = Ax^* + Bu^* & n \text{ معادله} \\ y_d = Cx^* & m \text{ معادله} \end{cases}$$

$n+m$ معادله و $n+r$ مجهول داریم (u^* و x^*)

$$\begin{cases} 0 = Ax^* + Bu^* \\ y_d = Cx^* \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_d \end{bmatrix}$$

اگر $r = m$ ← یک پاسخ یکتا داریم

اگر $r > m$ ← بینهایت پاسخ داریم

اگر $r < m$ ← در حالت کلی پاسخ نداریم (عملکرد کم داریم)

$x^*, u^* \leftarrow$

با فرض وجود جواب

$$\begin{cases} x^* = M_x \, y_d \\ u^* = M_u \, y_d \end{cases}$$

با تعریف متغیرهای افزایشی زیر

$$\begin{cases} \Delta x = x - x^* \longrightarrow x = x^* + \Delta x \\ \Delta u = u - u^* \longrightarrow u = u^* + \Delta u \\ \Delta y = y - y_d \longrightarrow y_d = y + \Delta y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta\dot{x} = A(x^* + \Delta x) + B(u^* + \Delta u) \\ \Delta y + y_d = C(x^* + \Delta x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta y = C\Delta x \end{cases} ,\quad \Delta u = -K\Delta x$$

و با انتخاب مناسب $K \leftarrow$

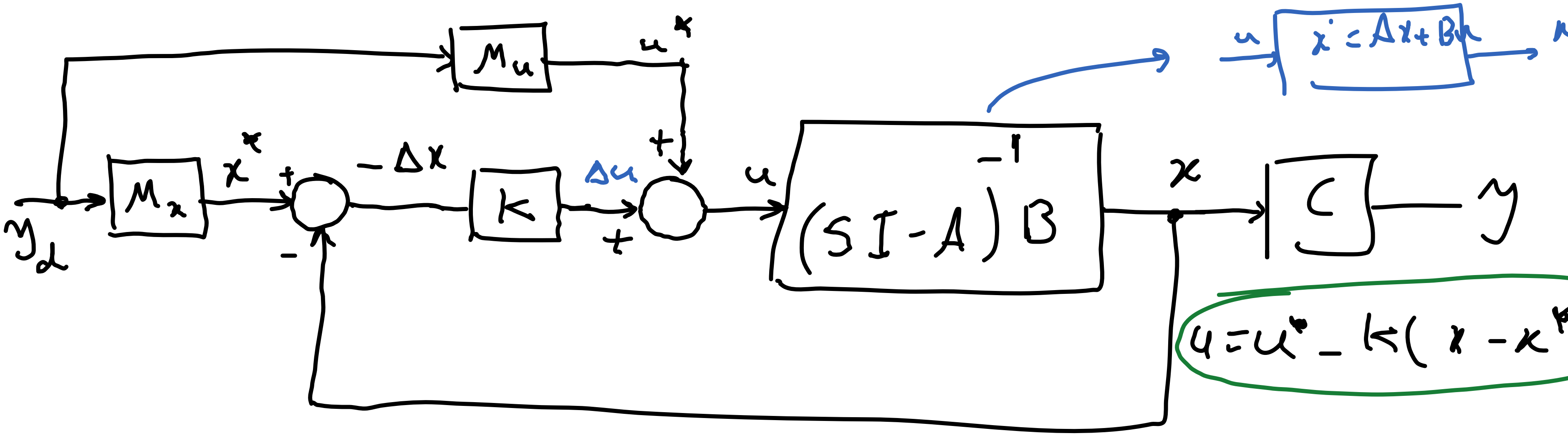
$$\Delta \dot{x} = A\Delta x + B\Delta u = A\Delta x - BK\Delta x = (A - BK)\Delta x$$

با انتخاب مناسب K به نحوی که A_{cl} پایدار شود،

$$\begin{array}{l} \Delta x \longrightarrow 0 \\ t \longrightarrow \infty \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} \Delta y = C\Delta x \longrightarrow 0 \\ t \longrightarrow \infty \end{array}$$

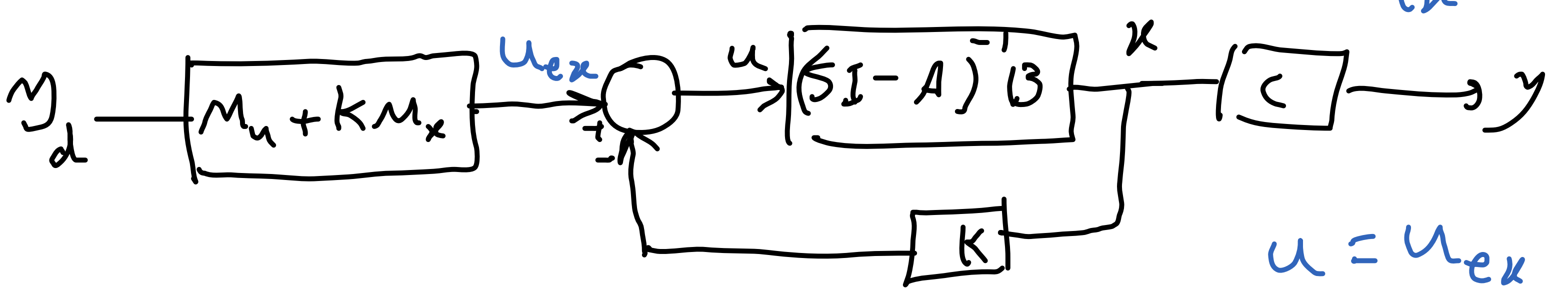
$$u = u^* + \Delta u = u^* - K\Delta x = u^* - K(x - x^*) = u^* - Kx + Kx^*$$

$$\Rightarrow u = M_u y_d - Kx + KM_x y_d = (M_u + KM_x) y_d - Kx$$



$$u = u^* - K(x - x^*)$$

$$u = M_u y_d - Kx + K M_x y_d = \underbrace{(M_u + K M_x) y_d}_{u_{ex}} - Kx$$



$$u = u_{ex} - Kx$$

قضیه تغییرناپذیری صفرهای انتقال

$$\begin{bmatrix} -zI+A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

فرض کنید z صفر انتقال سیستم حلقه باز

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

باشد.

کنترل فیدبک حالت $u = -Kx + u_{ex}$ را در نظر بگیرید، در این صورت z صفر انتقال سیستم حلقه بسته سیستمی که y را به u_{ex} ارتباط می‌دهد نیز می‌باشد.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BKx + Bu_{ex} \\ y = Cx - DKx + Du_{ex} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -zI+A-BK & B \\ C-DK & D \end{bmatrix}.$$

معادل همان ماتریس قبلی است و صفرهای انتقال یکی است.

قضیه : تغییرناپذیری کنترل‌پذیری

سیستم حلقه بسته با فیدبک حالت ورودی u_{ex} کنترل‌پذیر است، اگر و تنها اگر سیستم حلقه باز کنترل‌پذیر باشد.

$(A, B) \longrightarrow$ کنترل‌پذیر باشد

$u = -Kx \longrightarrow$ سیستم حلقه بسته کنترل‌پذیر خواهد بود

شرط لازم برای طراحی K، کنترل‌پذیر بودن زوج (A, B)

Pole placement — قضیه جابجایی قطب سیستم‌های تک ورودی

اگر زوج A و B مربوط به یک سیستم مرتبه n کنترل‌پذیر داده شده باشد، و یک چندجمله‌ای $P_d(s)$ درجه n که محل قطب‌های حلقه بسته را مشخص می‌کند نیز داده شده باشد، ماتریس بهره K به صورت یکتا وجود دارد به نحوی که معادله مشخصه ماتریس $A-BK$ برابر $P_d(s)$ شود.

$P_0(s)$

$$P_d(s) = \det(sI-A) + K\,\mathrm{Adj}(sI-A)B$$

مثال: تعیین فیدبک حالت را برای سیستم موتور DC به نحوی به دست آورید که قطبهای حلقه بسته در $-3 \pm 3j$ و -24 جابجا شوند. معادله کامل این کنترل کننده را برای تنظیم سیستم به مقدار مرجع θ_d به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.4 \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} v$$

$$P_d(s) = \overbrace{\det(sI-A)}^{P_0} + k\,\mathrm{Adj}(sI-A)\,B$$

$$P_0 = \det(sI-A) = s(s+2.4)(s+21.5) = s^3+24s^2+53.4s$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.4 \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix} \longrightarrow sI-A = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -4.4 \\ 0 & 12 & s+24 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{adj}(sI-A) = \begin{bmatrix} s(s+24)+12\times 4.4 & 0 & 0 \\ s+24 & s(s+24) & -12s \\ 4.4 & 4.4s & s^2 \end{bmatrix}^T$$

$$Adj(sI-A)B = \begin{bmatrix} \times & \times & 4.4 \\ \times & \times & 4.45 \\ \times & \times & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88.7 \\ 88.75 \\ 20s^2 \end{bmatrix}$$

$$P_d(s) = (s+24)(s+3+3j)(s+3-3j) = s^3 + \underline{30}s^2 + \underline{162}s + \underline{432}$$

$$= s^3 + 24s^2 + 53.3s + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 88.7 \\ 88.75 \\ 20s^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad = s^3 + \underline{(24+20k_3)}s^2 + \underline{(52+88k_2)}s + \underline{88.7k_1}$$

$$24 + 20k_3 = 30 \longrightarrow k_3 = 0.3$$

$$52 + 88.7k_2 = 162 \longrightarrow k_2 = 1.23$$

$$88.7k_1 = 432 \Rightarrow k_1 = 4.86$$

$$x^* = \begin{bmatrix} \theta^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot\theta \\ \dot\omega \\ \dot i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.4 \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} v$$

$$u^* = v^* = 0$$

$$\omega^* = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.4 \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^* \\ \omega^* \\ i^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} v^* \Rightarrow 4.4 i^* = 0 \rightarrow i^* = 0$$

$$-12\omega^* - 24 i^* = 20 v^*$$

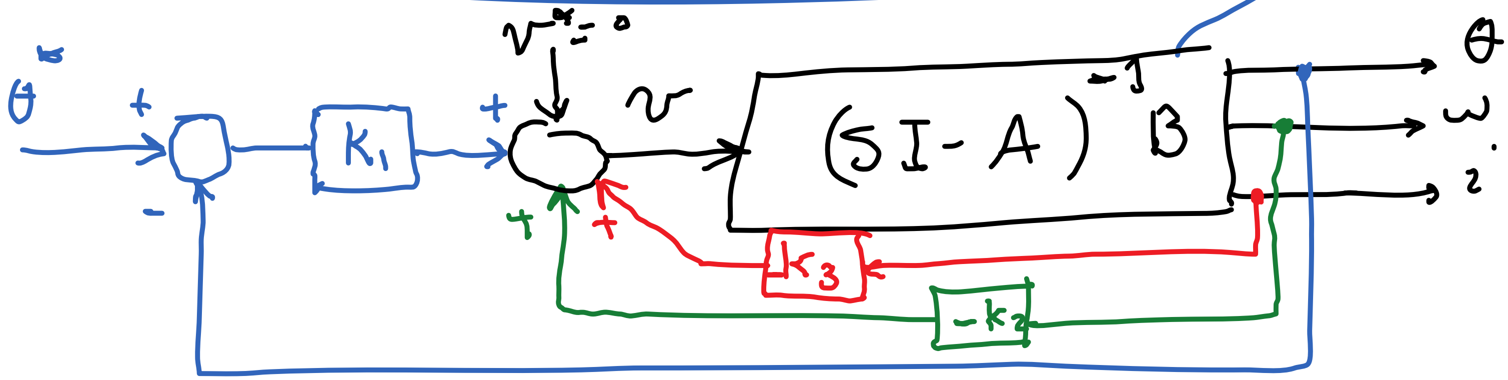
$$\longrightarrow v^* = 0$$

$$v = v^* - K\Delta x = 0 - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta - \theta^* \\ \omega - \cancel{\omega^*} \\ i - \cancel{i^*} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = -k_1(\theta - \theta^*) - k_2\omega - k_3 i}$$

MATLAB

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Ix + Du \end{aligned}}$$



مثال پاندول معکوس ← حل خواند بشود

شبیه مثال اول حل

$\det A_{cl} = P_d(s) \rightarrow$ ✓ $\leftarrow n = 2 \rightarrow$ روش مستقیم

✓ روش جابجایی قطب ← $n = 3$ ✓ ← Dc

MATLAB ← $n = 4$

- place
- acker

روشهای دیگر (تک ورودی)

- روش بس و گیورا
- روش تبدیل همانندی
- فرمول آکرمن ← MATLAB ← acker
- روش امین - مرداخ

جایابی قطب در سیستم های چند ورودی

تمهید: فیدبک به صورت یکتا بدست نخواهد آمد.

مثال: ماتریس بهره K را به نحوی بدست آورید که قطبهای حلقه بسته در

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ‎ -1 و -1 جایابی شوند

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$K \in R^{r \times n} = R^{2 \times 2}$$

$$A_{cl} = A - BK = \begin{bmatrix} k_{11} & 1 - k_{22} \\ -1 - k_{21} & 2 - k_{22} \end{bmatrix}$$

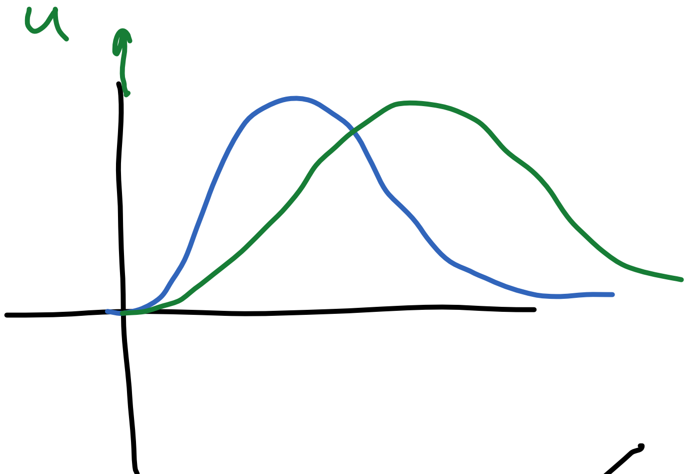
$$\det(sI - A_{cl}) = s^2 + (k_{11} - 2 + k_{22})s \underbrace{- (1 + k_{21})(-1 + k_{12}) + k_{11}(2 - k_{22})}_{I} = (s+1)(s+1)$$

$$= s^2 + 2s + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_{11} - 2 + k_{22} = 2 \\ I = 1 \end{cases}$$

دو معادله و ۴ مجهول ← بینهایت جواب دارد

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

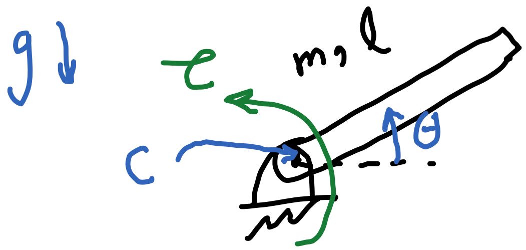


روش‌های محاسبه K برای سیستم چند ورودی

- روش تک ستونی
- روش طبیعی
- روش اکرمن ← ✓acker

ماتریس بهینه را به گونه‌ای محاسبه می‌کند که توزیع یکنواختی تلاش کنترلی بر روی ~~همه~~ عملگرها را نتیجه دهد

ربات تک لینکی



$$I\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mg\frac{l}{2}\cos\theta = \tau \quad , \quad I = \frac{ml^2}{3}$$

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{I}\left[\tau - mg\frac{l}{2}\cos x_1 - c x_2\right] \end{cases}$$

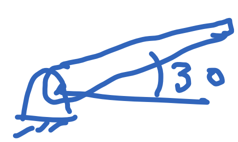
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{2I}\sin x_1 & -\frac{c}{I} \end{bmatrix}$$

نقطه تعادل

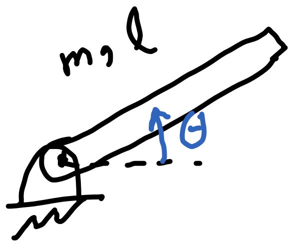
$$x^* = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{2I} & -\frac{c}{I} \end{bmatrix}$$

نقطه کاری

$$x^* = \begin{bmatrix} \pi/6 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{4I} & -\frac{c}{I} \end{bmatrix}$$



$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix}$$



$$I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + mg\frac{l}{2}\cos\theta = \tau \quad , \quad I = \frac{ml^2}{3}$$

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \quad \Rightarrow 0 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{I}\left[\tau - mg\frac{l}{2}\cos \underset{\pi/2}{\underbrace{x_1}} - Cx_2\right] \quad \Rightarrow 0 = \end{cases}$$

$$x^* = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \tau^* = 0$$

$$x^* = \begin{bmatrix} \pi/6 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ 0 = \tau - mg\frac{l}{2}\cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{\tau^* = \frac{\sqrt{3}}{4}mgl} \end{array}$$

$$\longrightarrow \boxed{\tau^* = mg\frac{l}{2}\cos x_1^*}$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{x} = A_2 \Delta x + B \Delta \tau \\ \Delta y = C \Delta x \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^* = \begin{bmatrix} \pi/6 \\ 0 \end{bmatrix}$$ حالت دوم

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{4I} & -\frac{c}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix} \Delta \tau$$

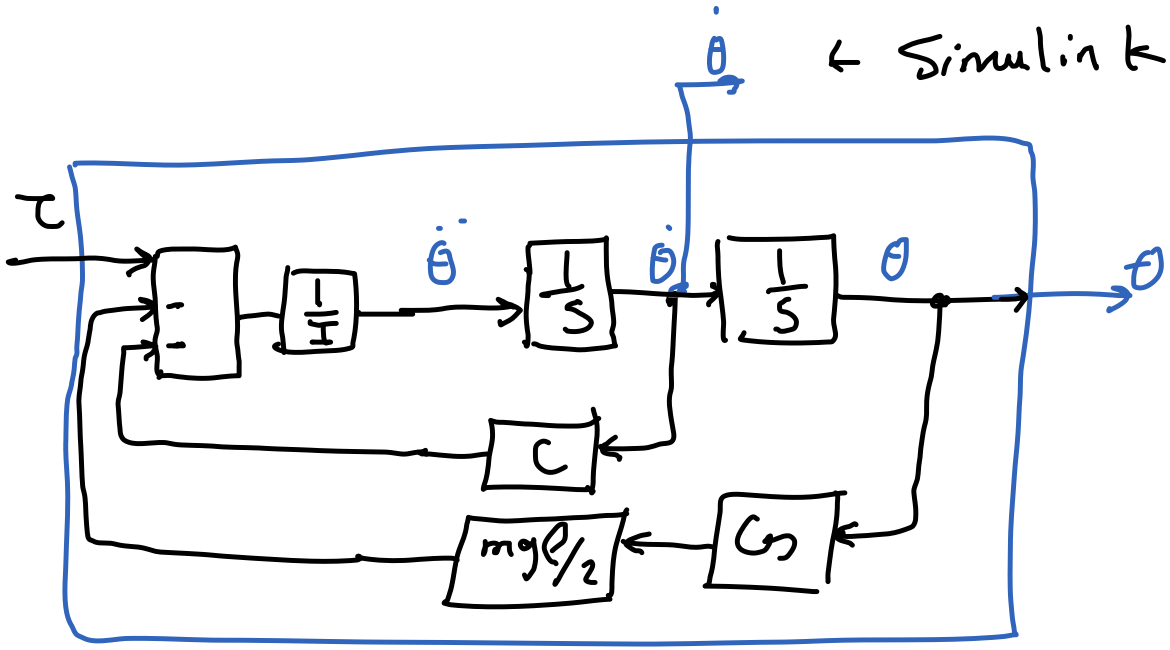
$$\Delta x = x - x^*$$

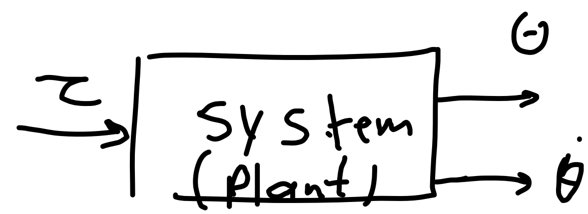
$$\tau = \tau^* + \Delta \tau = \tau^* \overbrace{- K \Delta x}^{\text{state feed}} = \tau^* - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} =$$

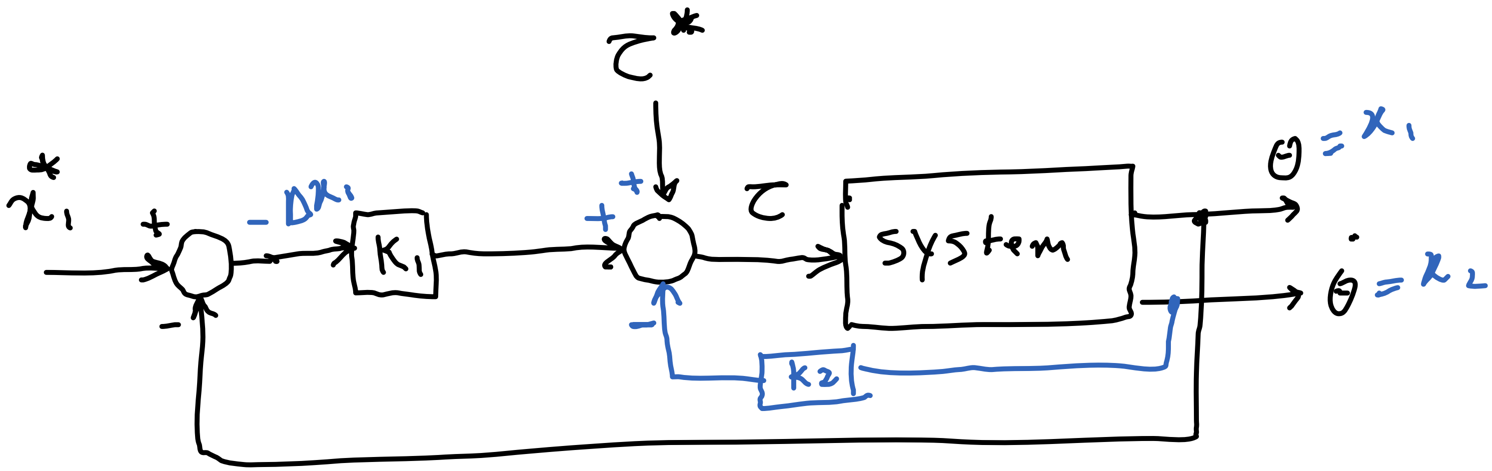
$$\tau^* - K_1 \Delta x_1 - K_2 \Delta x_2 = \underset{\frac{\sqrt{3}}{4} mgl}{\tau^*} - K_1 (x_1 - \underset{\pi/6}{x_1^*}) - K_2 (x_2 - \underset{0}{\cancel{x_2^*}})$$

$$I\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mg\frac{l}{2}\cos\theta = \tau \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{1}{I}\left[\tau - c\dot{\theta} - \frac{mgl}{2}\cos\theta\right]$$

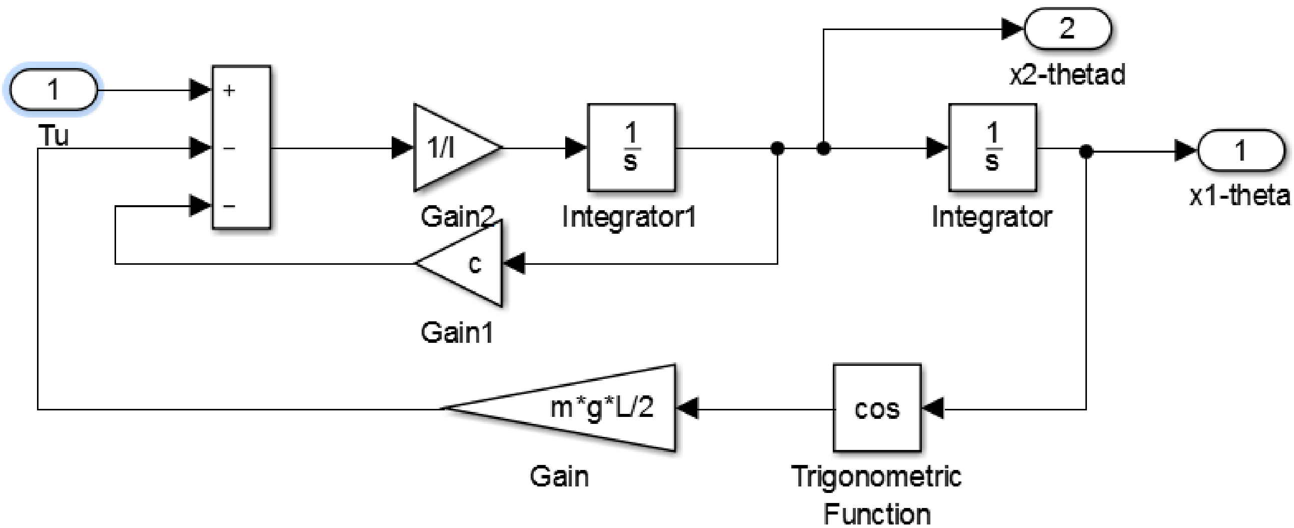
شبیه‌سازی در محیط ← Simulink

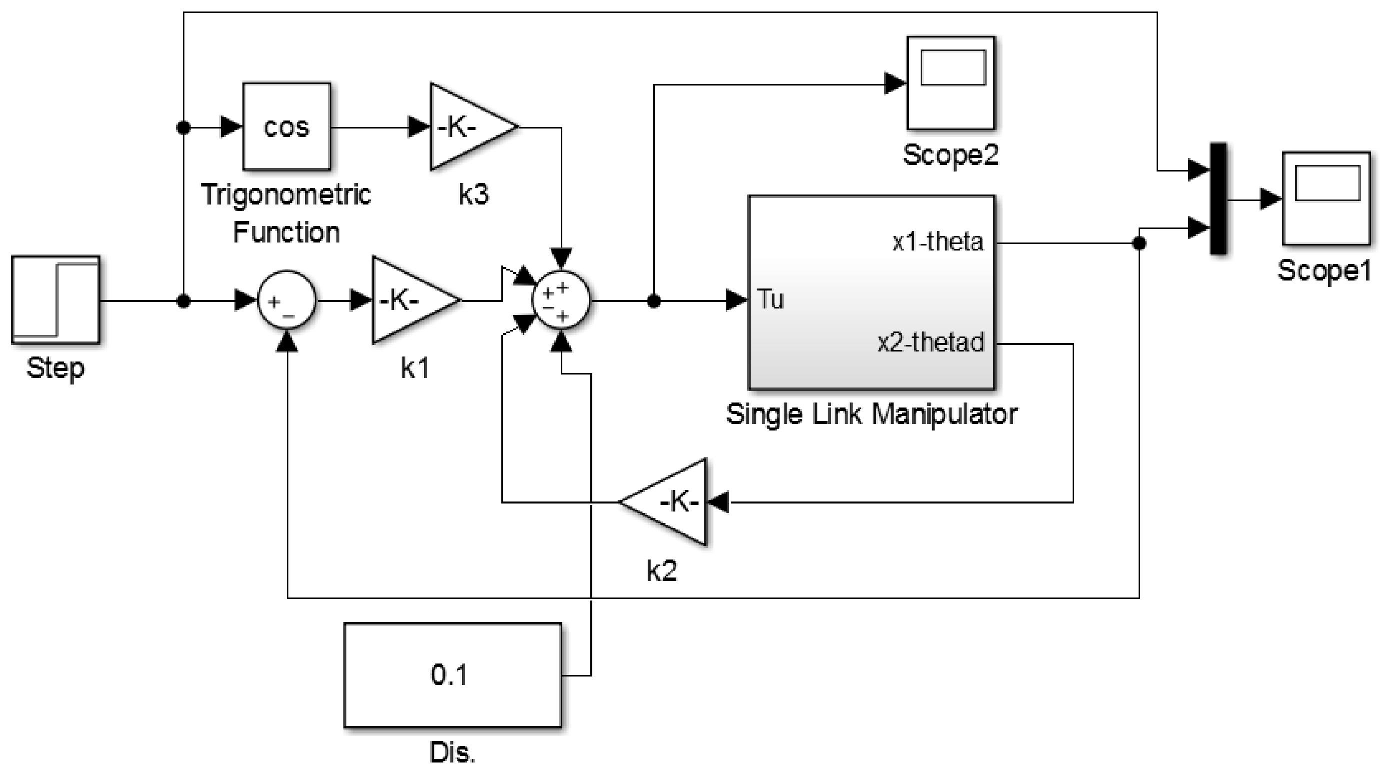






$$\tau = \tau^* - K_1(x_1 - x_1^*) - K_2(x_2 - \cancel{x_2^*}^{\,0})$$


1
Tu
+
−
−
1/I
Gain2
1
s
Integrator1
c
Gain1
2
x2-thetad
1
s
Integrator
1
x1-theta
m*g*L/2
Gain
cos
Trigonometric
Function


cos
Trigonometric
Function
-K-
k3
Scope2
Scope1
x1-theta
Tu
x2-thetad
Single Link Manipulator
Step
-K-
k1
-K-
k2
0.1
Dis.

```
function dxdt = SL(t,x)
global m g L c I xs1 xs2 Tus K
dxdt=zeros(2,1);
X=[x(1);x(2)];
Xs=[xs1;xs2];
Dx=X-Xs;
DTu=-K*Dx;
Tu=Tus+DTu;

dxdt(1) =x(2);
dxdt(2) = (Tu-0.5*m*g*L*cos(x(1))-c*x(2))/I;
```

```
%Single link
clc
clear
global m g L c I xs1 xs2 K Tus
m=1;L=1;g=10;c=0.1;I=m*L^2/3;
xs1=pi/3;xs2=0; Tus=0.5*m*g*L*cos(xs1);

A1=[0 1;m*g*L/(2*I) -c/I];%xs1=pi/2
A2=[0 1;m*g*L/(4*I) -c/I];%xs1=pi/6
B=[0;1/I];
pd=[-5 -7];
K=acker(A2,B,pd);
k1=K(1);k2=K(2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[t,x] = ode45(@SL,[0 10],[0; 0]);
x1=x(:,1);x2=x(:,2);
```


```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[t,x] = ode45(@SL,[0 10],[0; 0]);
x1=x(:,1);x2=x(:,2);
```


```
X=[x1 x2];
n=size(t);n=n(1);
Xs1=xs1*ones(n,1);Xs2=xs2*ones(n,1);
Xs=[Xs1 Xs2];
Dx=X-Xs;
DTu=-K(1)*Dx(:,1)-K(2)*Dx(:,2);
Tu=Tus+DTu;
figure (1)
hold on
plot(t,x(:,1)*180/pi)
figure (2)
hold on
plot(t,Tu)
```