ریاضی مهندسی پیشرفته

جبر خطی، معکوسهای تعمیم یافته

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

جلسه سیزدهم

معکوس‌های تعمیم یافته یا شبه وارون،

هدف اصلی یافتن معکوس ماتریس‌های ناسازگار

- ماتریس مربعی با دترمینان صفر یا دارای مقادیر ویژه صفر

$\det(A) = 0 \quad , \quad A \in R^{n \times n}$

یا

- ماتریس‌های مستطیلی

$A \in R^{m \times n} \quad , \quad m \neq n$

روش حداقل مربعات

دستگاه معادله زیر را در نظر بگیرید

$$Ax = b$$

اگر A مربعی و مقادیر ویژه‌های آن مخالف صفر باشد A^{-1} وجود دارد.

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

اما در دستگاه معادلات غیر مربعی (A مستطیلی باشد) $A \in R^{m\times n}, m \neq n$

- تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر است

یا 〃 مجهولات 〃 معادلات 〃 〃 ، نمی‌توان A^{-1} را محاسبه کرد

مثال ،

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

Least squar

در روش حداقل مربعات مقدار x در معادله $Ax=b$ به نحوی محاسبه می شود که $\|Ax-b\|$ حداقل شود. مرسوم $Ax-b$ را به صورت زیر می نویسند

$$g(x)=\|Ax-b\| = (Ax-b)^T(Ax-b) = (x^TA^T-b)(Ax-b)$$

می خواهیم $g(x)$ را مینیمم کنیم

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x}=0 \Rightarrow 2A^T(Ax-b)=0 \Rightarrow A^TAx-A^Tb=0$$

$$\Rightarrow (A^TA)x=A^Tb \Rightarrow \boxed{x_{LS}=(A^TA)^{-1}A^Tb}$$

اثبات کنید :

معادله $Ax=b$ طبق قضیه فردهلم

در صورتی جواب دارد که $b \in R(A)$ باشد. (قبلاً گفته شد دیدیم)

در روش حداقل مربعات، پس

$(Ax-b) \perp R(A)$ یا $(Ax-b) \in N(A^T)$

قبلاً دیدیم که $R(A) \perp N(A^T)$

$$\longrightarrow A^T(Ax-b)=0 \Rightarrow A^TAx - A^Tb = 0 \Rightarrow \boxed{x_{LS} = (A^TA)^{-1}A^Tb}$$

$$v \in N(A^T) \longrightarrow A^Tv = 0$$

$$\Rightarrow x_{LS} = A^* b \ ?$$

پس برای دستگاه معادله ، $A \in R^{m\times n}$ $\quad Ax = b$

$$x = \left((A^TA)^{-1}A^T\right)b = A^* b$$

به A^* اصطلاحاً شبه وارون یا وارون تعمیم یافته A گفته می شود

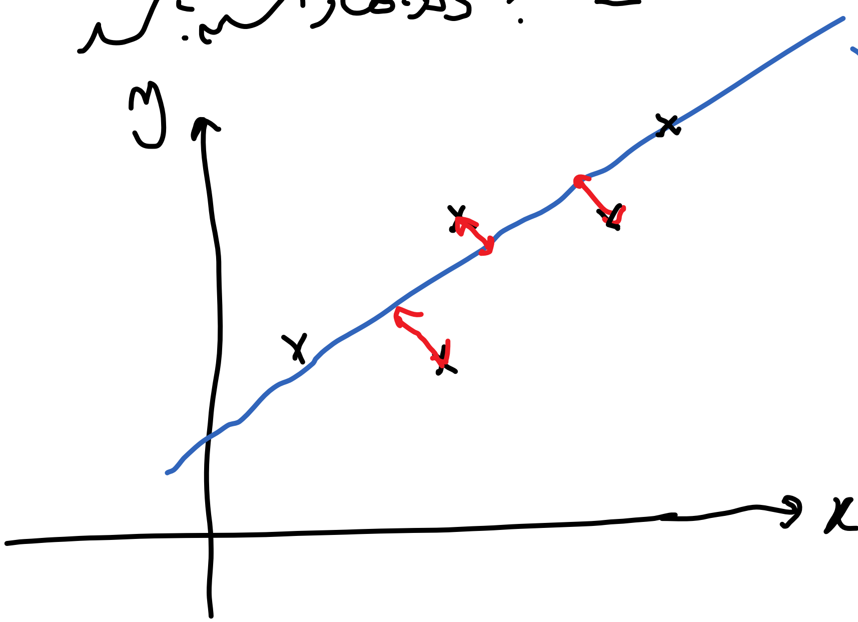
<u>Pseudo inverse</u>

مثال: فرض کنید بخواهیم خط مستقیمی بردارهای تجربی $(1, 1.63)$ ، $(1.25, 1.76)$ 1-5
، $(1.5, 1.88)$ ، $(1.75, 2)$ ، $(2, 2.13)$ برازش کنیم.

می خواهیم $y = ax + b$ ، حداقل خطا را نسبت به داده ها داشته باشد

مثال: فرض کنید بخواهیم خط مستقیمی بر داده‌های تجربی $(1.25, 1.76)$ ، $(\overset{x}{1}, \overset{y}{1.63})$ ، 1.5 ، $(1.5, 1.88)$ ، $(1.75, 2)$ ، $(2, 2.13)$ برازش کنیم.

می‌خواهیم $y=ax+b$ ، حداقل خطا را نسبت به داده‌ها داشته باشد



$$1.63 = a+b$$
$$1.76 = 1.25a+b$$
$$1.88 = 1.5a+b$$
$$\vdots$$

$$1.63 = a + b$$
$$1.76 = 1.25a + b$$
$$1.88 = 1.5a + b$$
$$\vdots$$

$$\Rightarrow \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.25 & 1 \\ 1.5 & 1 \\ 1.75 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} \underset{x}{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} = \overset{B}{\begin{bmatrix} 1.63 \\ 1.76 \\ 1.88 \\ 2 \\ 2.3 \end{bmatrix}}$$

$$Ax = B \quad , \quad \Rightarrow x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^* \begin{bmatrix} 1.63 \\ \vdots \\ 2.3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 0.496 \\ b = 1.136 \end{array}$$

$$A^* = (A^T A)^{-1} A^T$$

MATLAB

Pinv

$$y = ax + b = \boxed{0.496x + 1.136}$$

$$A^*_{2\times5}\,A_{5\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{2\times2}$$

$$A_{5\times2}\,A^*_{2\times5} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & \ddots & & & \\ * & & \ddots & & \\ * & & & \ddots & \\ * & & & & \ddots \end{bmatrix} \neq I_{5\times5}$$

برای وارون A^{-1}، $AA^{-1} = A^{-1}A = I_{n\times n}$

برای شبه وارون

$$A \to A^{*} = (A^T A)^{-1} A^T$$

اگر A یک ماتریس مربعی وارون پذیر باشد

$$(A^T A)^{-1} A^T = A^{-1} (A^{-T} A^T) = A^{-1}(I) = A^{-1}$$

همانطور که دیدیم برای شبه وارون محاسبه $(A^T A)^{-1} A^T$ باید $A^T A$ وارون پذیر باشد. به عبارت دیگر مرتبه $A^T A$ باید کامل باشد

$$A \in R^{m\times n}, \to A^T_{n\times m} A_{m\times n} \in R^{n\times n}, \quad \text{Rank}(A^T A) = n$$

اگر $\text{Rank}(A^TA) = n$ باشد برای ماتریس $A \in R^{m \times n}$

یکتا است

می‌توان شبه وارون را به راحتی محاسبه نمود $(A^TA)^{-1}A^T$

اما اگر $\text{Rank}(A^TA) = r < n$ باشد آنگاه نمی‌توان $(A^TA)^{-1}$ را محاسبه نمود. دو روش برای حل چنین مسئله‌ای وجود دارد

- روش حدس زدن ← جواب یکتا نیست، دقیق نیست

- روش SVD تجزیه مقدار تکین singular value decomposition
  ← یکتا، جواب دقیق

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1}$$

قابل محاسبه نیست

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1.25 & 1.25 \\ 1.25 & 1.25 \end{bmatrix} \longrightarrow A^* \text{ و } (A^TA)^{-1}$$

قابل محاسبه نیست

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}(A^TA) = 1 < 2$$

قضیه: این رابطه همیشه برقرار است

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}(A^TA) = \text{Rank}(AA^T) = r$$

روش تجزیه مقادیر تکین SVD

جلسه چهاردهم

روشی برای یافتن پاسخ روش حداقل مربعات در دستگاه معادلات ناسازگار

1- $A\in R^{n\times n}$ و غیر تکین باشد ← A^{-1}

2- $A\in R^{m\times n}$ و غیر تکین باشد، $Rank(A^TA)=n$ ، A^TA غیر تکین باشد،

شبه وارون ← $A^{*}=(A^TA)^{-1}A^T$

3- $A\in R^{m\times n}$ و تکین، $Rank(A^TA)=r<n$ ← SVD

تعریف : به ازای هر ماتریس A ، جذر مقادیر ویژه‌ی ناصفر A^TA یا AA^T را مقادیر تکین ماتریس A می‌گویند.

singular values of A

$$S_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^TA)} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, r \quad , \quad r = \mathrm{Rank}(A)$$

مقادیر تکین ماتریس A و A^T باهم برابر است.

قضیه: تجزیه مقدار تکین:

اگر A یک ماتریس $m\times n$ با رتبه r باشد، آن‌گاه ماتریس‌های یکه U و V وجود دارند

به طوری که $A = U \Sigma V^T$

الف - Σ یک ماتریس قطری $m\times n$ با مؤلفه‌های $\Sigma_{11}, \dots, \Sigma_{rr}$ شامل مقادیر تکین ماتریس A می‌باشد.

ب - U یک ماتریس $m\times m$ یکه متعامد است که AA^T را قطری می‌کند. متشکل از بردارهای ویژه AA^T

ج - V یک ماتریس $n\times n$ یکه متعامد است که A^TA را قطری می‌کند. متشکل از بردارهای ویژه A^TA

$$\Sigma = \begin{bmatrix} s_1 & & & & & & 0 \\ & s_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & s_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

ابعاد ماتریس A و Σ یکسان است.

$$D = \begin{bmatrix} s_1 & & & 0 \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_r \end{bmatrix}$$

$A = U \Sigma V^T$ را تجزیه مقدار تکین ماتریس A گویند و همواره وجود دارد.

- ماتریس Σ یکتاست ولی U و V که از بردارهای ویژه A^TA و AA^T بدست می آیند یکتا نیستند. دقت داشته باشید که U و V یکه متعامد باشد.

مقادیر تکین بصورت زیر بدست می آید

$$s_i^2 = \lambda_i (A^TA)$$

می توان نشان داد که $\lambda_i \geq 0$ به عبارتی ماتریس A^TA نیمه مثبت معین است

spd ≠

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r > 0 = s_{r+1} = \dots = s_n$$

حال اگر $v_1, \ldots, v_n$ بردارهای ویژه یکه متناظر با s_i باشند.

$$V = [\, v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_r \,\vdots\, v_{r+1} \quad \cdots \quad v_n \,] = [\, V_1 \,\vdots\, V_2 \,]$$

بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه غیر صفر

متناظر با مقادیر ویژه صفر

از تعریف بردار ویژه داریم

$$(A^T A) v_i = s_i^2 v_i$$

اگر

$$D^2 = \mathrm{diag}[s_1^2, \ldots, s_r^2]$$

با توجه به بحث‌های تشابهی و فرآیند قطری سازی که قبلاً گفته بودیم می‌توان نشان داد که

$$v_1^T (A^T A) v_1 = \sigma^2$$

$$v_1^T = v_1^{-1}$$

قبلاً $(M^{-1} A M = \Omega)$ و

از طرف دیگر داریم

$$v_2^T (A^T A) v_2 = 0 \Rightarrow (v_2^T A^T)(A v_2) = 0$$

$$\Rightarrow (A v_2)^T (A v_2) = 0$$

می‌دانیم اگر $B^T B = 0$ نتیجه می‌شود $B = 0$ باشد.

پس $AV_2 = 0 \longrightarrow V_2 \in N(A)$

از طرفی ماتریس V متشکل از دو زیرماتریس V_1 و V_2، زیرماتریس یکه‌متعامد است

$$V_1 \perp V_2 \xrightarrow[\text{جبر خطی}]{\text{از قضیه اساسی}} V_1 \in R(A^T)$$

$$\Longrightarrow \quad V = [\, V_1 \,\vdots\, V_2 \,] = [\, R(A^T) \,\vdots\, N(A) \,]$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد که

$$U = [\, U_1 \,\vdots\, U_2 \,] = [\, R(A) \,\vdots\, N(A^T) \,]$$

تعریف: اگر $\Sigma_{m\times n}$ یک ماتریس قطری باشد، Σ^+ نشان دهنده یک ماتریس $n\times m$ است که ترانهاده Σ است و هر درایه غیر صفر آن معکوس شده است

$$\Sigma=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\\0&0\end{bmatrix}\longrightarrow \Sigma^+=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}$$

$$\Sigma=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}\longrightarrow \Sigma^+=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0\\0&\frac{1}{2}\\0&0\end{bmatrix}$$

+ | - برای ماتریس های غیرتکین علامت + شبیه وارون است ، A^+ ، $A^+=(A^TA)^{-1}A^T$

Σ^+ قطری " "

قضیه: اگر A یک ماتریس $m\times n$ باشد که با روش SVD به صورت $A = U\Sigma V^T$ تجزیه شده باشد، آن گاه:

الف- حل مسئله حداقل مربعات دستگاه $Ax=b$ به صورت زیر خواهد شد

$$x_{LS} = (V\Sigma^{+}U^T)\, b \quad \text{و} \quad A^{+} = V\Sigma^{+}U^T$$

ب- مابقی پاسخ‌ها دارای نرمی بزرگتر از جواب فوق هستند.

ج- مجموعه تمام پاسخ‌های روش حداقل مربعات به صورت زیر است

$$\left\{x_{LS} + VK \;:\; K \in Ker(\Sigma)\right\} \quad , \quad Ker(\Sigma) \equiv N(\Sigma)$$

اگر A به صورت زیر تجزیه شود $A = U \Sigma V^T$ ، شبه وارون

A را که با A^+ نشان می دهیم به صورت زیر بدست می آید

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T$$

مثال: شبه وارون ماتریس زیر را بدست آورید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

A^+ شبه معکوس تکلیف است و $\leftarrow$ SVD

$$\text{Rank}(A) = 1 \quad , \quad \text{Rank}(A^T A) = 1 < 2$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1.25 & 1.25 \\ 1.25 & 1.25 \end{bmatrix} \longrightarrow (A^T A)^{-1}$$ فرمول محاسبه نیست.

$$|A^T A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1.25 - \lambda & 1.25 \\ 1.25 & 1.25 - \lambda \end{vmatrix} = (1.25 - \lambda)^2 - 1.25^2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta(A^T A) = \cancel{1.25^2} - 2.5\lambda + \lambda^2 - \cancel{1.25^2} = \lambda(\lambda - 2.5)$$

A^TA مقادیر ویژه‌ی $\quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2.5$

مقادیر تکین $\quad s_i = \sqrt{\lambda_i}$

$$\Rightarrow \quad s_1 = 0, \quad s_2 = \sqrt{2.5}$$

محاسبه ماتریس‌های U و V

$$R(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+0.5^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.894 \\ 0.447 \end{bmatrix}$$

$$N(A^T) \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow x_1 + 0.5x_2 = 0$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{یکه}} \begin{bmatrix} 0.447 \\ -0.894 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} R(A) & N(A^T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.894 & 0.447 \\ 0.447 & -0.894 \end{bmatrix}$$

بطور مشابه:

$$V = \begin{bmatrix} R(A^T) & N(A) \end{bmatrix} \rightarrow V = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 \\ 0.707 & -0.707 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T, \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2.5} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2.5}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^+ = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

مثال: وارون ماتریس زیر را بدست آورید

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.9 & -4 \\ 1.6 & 1.2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2.25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda_1 = 25$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & 2.25-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2.25-\lambda) - 9 = \cancel{9} - 4\lambda - 2.25\lambda + \lambda^2 - \cancel{9}$$

$$= \lambda^2 - 6.25\lambda \longrightarrow \lambda_2 = 6.25, \quad \lambda_3 = 0$$

← ماتریس A تکین است.

$$\lambda_1 = 25 \rightarrow (A^T A - \lambda I)\, v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -21 & 3 & 0 \\ 3 & -21.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -21x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 3x_2 - 21.75x_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \longrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 6.25 \longrightarrow \begin{bmatrix} -2.25 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 18.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 &= 0 \\ 18.75x_3 &= 0 \rightarrow x_3 = 0 \end{aligned} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+0.75^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.75 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{یکه}} v_2 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2.25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 4x_1 + 3x_2 = 0 \\ 25 x_3 = 0 \longrightarrow x_3 = 0 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} -0.75 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{نرم}} v_3 = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & -0.6 \\ 0 & 0.6 & 0.8 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \leftarrow v_1 \qquad \lambda_2 \leftarrow v_2 \qquad v_3 \rightarrow \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$$

$$25 > 6.25 > 0$$

$$v_1 \perp v_2, \quad v_1 \perp v_3$$

$$v_2 \perp v_3$$

محاسبه U

$$AA^T = \begin{bmatrix} 18.25 & -9 \\ -9 & 13 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 25, \quad \lambda_2 = 6.25$$

$$(AA^T - \lambda I)u_1 = 0 \xrightarrow{\lambda_1 = 25} \begin{bmatrix} -6.75 & -9 \\ -9 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-9x_1 - 12x_2 = 0 \longrightarrow u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.75 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{نرم}} u_1 = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$u_1 \perp u_2$$

$$\lambda_2 = 6.25 \longrightarrow u_2 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow U = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = U \Sigma V^T =$$

$$\begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} = A$$

مثال : وارون ماتریس زیر را بدست آورید

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.9 & -4 \\ 1.6 & 1.2 & 3 \end{bmatrix}$$

وابسته هستند.

روش دوم

$$R(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix} \right\}$$

$$N(A^T) = \{ \quad \}$$

$$\Rightarrow \underline{U = [R(A) \;\; N(A^T)]} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$$

روش اول بردار ویژه های A^TA ، AA^T

$$A=\begin{bmatrix}1.2 & 0.9 & -4\\ 1.6 & 1.2 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}1.2 & 1.6\\ 0.9 & 1.2\\ -4 & 3\end{bmatrix}$$

$$R(A^T)=\left\{\begin{bmatrix}1.2\\ 0.9\\ -4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1.6\\ 1.2\\ 3\end{bmatrix}\right\} \xrightarrow{\text{گش}} \begin{array}{cc}\begin{bmatrix}0.28 & 0.44\\ 0.21 & 0.33\\ 0.93 & 0.833\end{bmatrix} & \\ v_1 \quad\quad v_2 & \end{array}$$

$$V=\left[R(A^T) \quad N(A)\right]$$

می‌بینیم که v_1 عمود بر v_2 نیست،

پس ابتدا $N(A)$ را حساب می‌کنیم.

$$N(A) \to Av = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1.2 & 0.9 & -4 \\ 1.6 & 1.2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1.33(1.2x_1 + 0.9x_2 - 4x_3) = 0 \Rightarrow ①\ 1.6x_1 + 1.2x_2 - 5.3x_3 = 0$$

$$②\ 1.6x_1 + 1.2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$① - ② \to -8.3x_3 = 0 \to x_3 = 0 \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0.75 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\to 1.2x_1 + 0.9x_2 = 0 \to x_1 = 1 \to x_2 = -0.75$$

$$\xrightarrow{\text{یا}} \begin{bmatrix} 0.8 \\ -0.6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{3\times 3}{V} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ -0.6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R(A^T)$ $\quad$ $N(A)$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تجزیه مقدار تکین یک ماتریس، یکتا نیست، $A = U \Sigma V^T$

یعنی ماتریس‌های U و V مختلفی می‌توان بدست آورد. (U و V یکتا نیستند)

اما این به معنی نیست که شبه وارون یکتا نیست، برای هر ماتریس A فقط یک

A^+ (شبه وارون) از روش svd می‌توان بدست آورد.

A^+ یکتا است.

خواص شبه وارون

1- $(A^+)^+ = A$

2- $(A^T)^+ = (A^+)^T$

3- $(\alpha A)^+ = \alpha^{-1} A^+$

4- $(AA^T)^+ = (A^+)^T A^+$

5- $(A^T A)^+ = A^+ (A^+)^T$

6- $\mathrm{Rank}(A) = \mathrm{Rank}(A^+)$

7- $(AB)^+ = B^+ A^+$

همیشه برقرار نیست

8- $AA^+ = I$

همیشه برقرار نیست.

شبه وارون ابزاری قوی برای حل دستگاه معادلات $Ax=b$ است.

- هنگامی که دستگاه، فقط یک جواب دارد، آن را می یابد:

$x = A^{-1}b$ ، $A \in R^{n\times n}$ ، $Rank(A)=n$

- اگر جواب نداشته باشد، پاسخ تقریبی حداقل مربعات را نتیجه می دهد

$m=n$: $(A^TA)^{-1}A^T \to A^{-1}$

$x_{LS} = (A^TA)^{-1}A^Tb$ ، $A \in R^{m\times n}$ ، $Rank(A)=n$

- هنگامی که بینهایت جواب دارد، بهینه‌ترین پاسخ را می دهد.

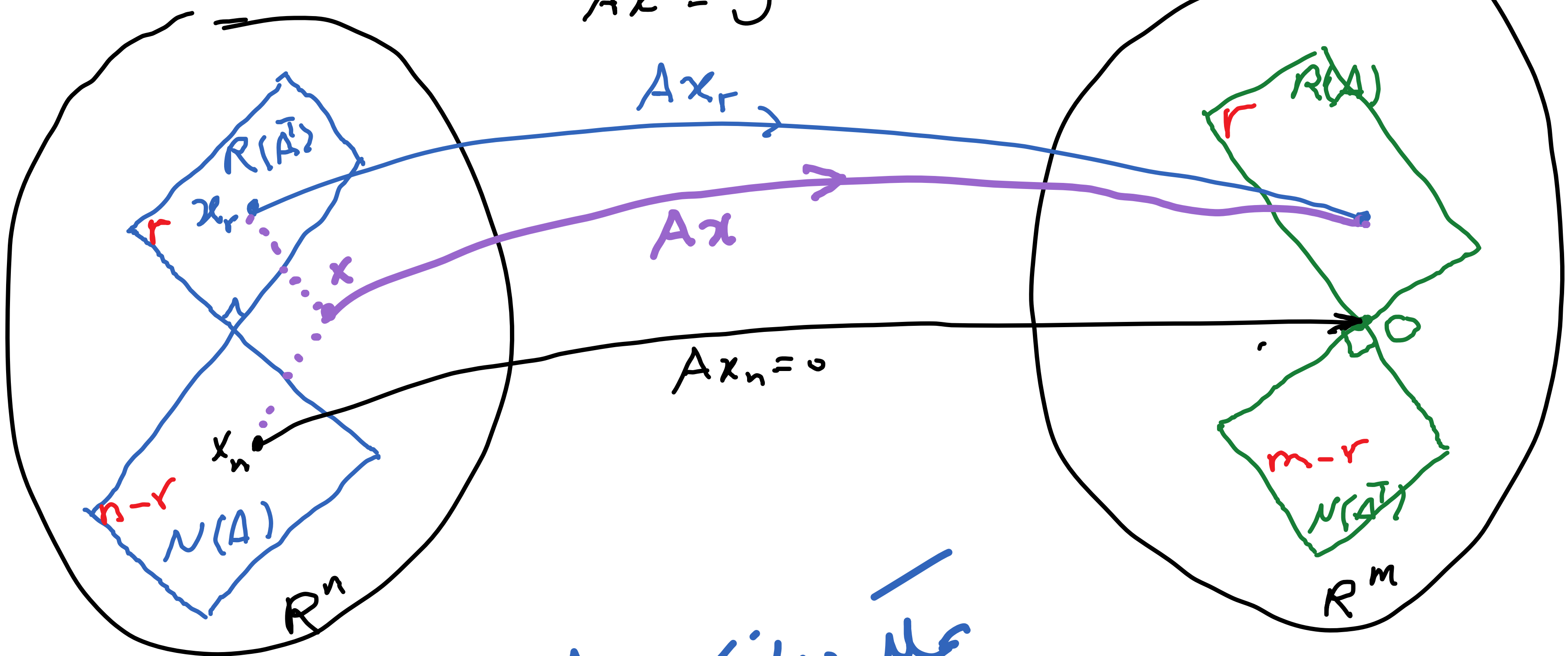
$A \in R^{m\times n}$ ، $Rank(A) = r < n$

$r=n$: $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$

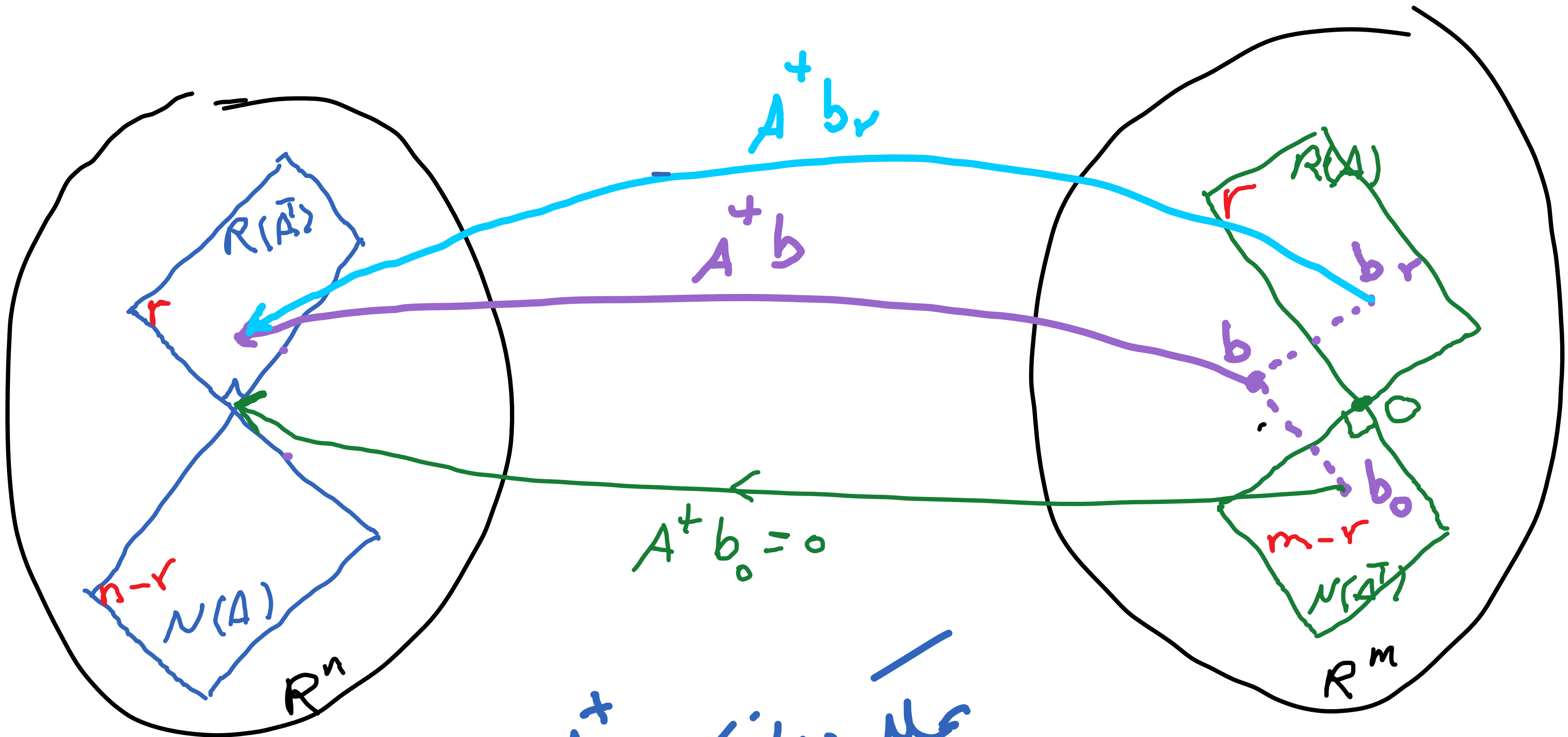
$x_{LS} = A^+b = V\Sigma^+U^Tb$ → جامع‌ترین پاسخ

$$T: \underset{x}{\underset{\downarrow}{R^n}} \longrightarrow \underset{y}{\underset{\downarrow}{R^m}} \quad , x \in R^n, \ y \in R^m$$

$$Ax = y$$



عملکرد ماتریس A



عملکرد ماتریس A^+