دانشگاه سمنان

کنترل اتوماتیک

مکان هندسی ریشه ها، بخش اول

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

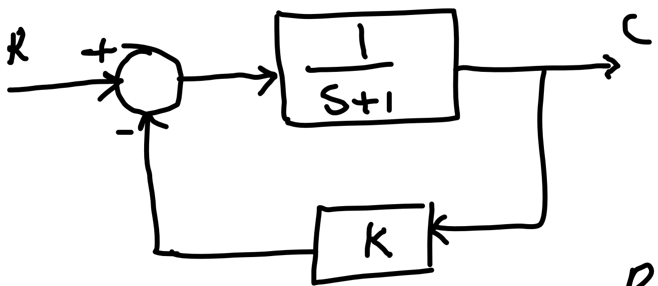
مکان هندسی ریشه ها: Root Locus

مشخصات پاسخ گذرای یک سیستم حلقه بسته به محل قطبهای حلقه بسته، بستگی دارند.
اگر سیستم یک بهره متغیر داشته باشد، با تغییر بهره، محل قطبها تغییر خواهد کرد و پاسخ سیستم تغییر می کند.

منظور از مکان هندسی ریشه های یک سیستم، رسم ریشه های معادله مشخصه به ازای $0 < K < \infty$ در صفحه اعداد موهومی می باشد.

$$F(s) = \frac{1}{s+1}$$

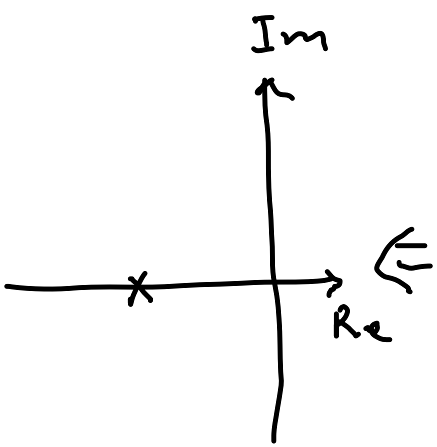
مثال ساده: مکان هندسی ریشه‌های سیستم زیر را رسم کنید

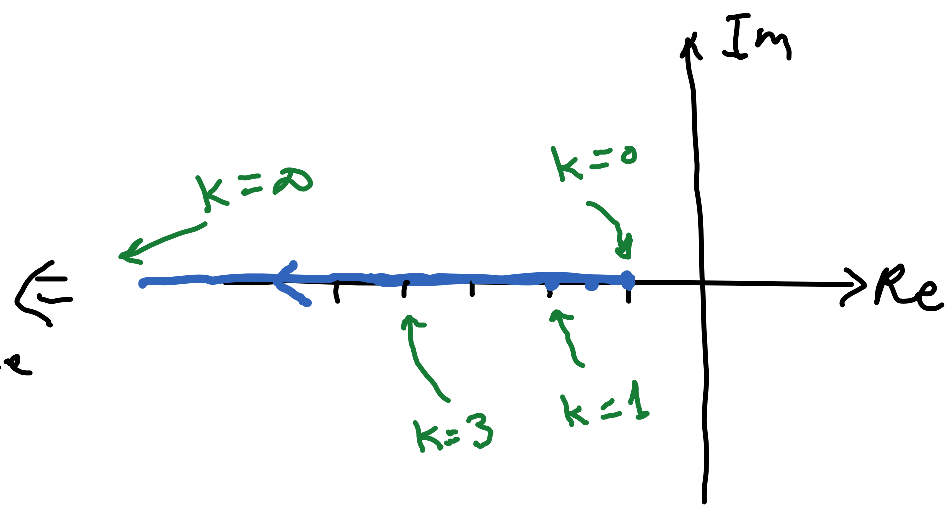


$$\frac{C}{R} = \frac{1}{s+1+K}$$

$s+1+K$ → معادله مشخصه

$$P(s) = s+1+K = 0 \Rightarrow \boxed{s_1 = -1-k}$$





$K=0 \rightarrow s_1=-1$

$K=0.5 \rightarrow s_1 = -1.5$

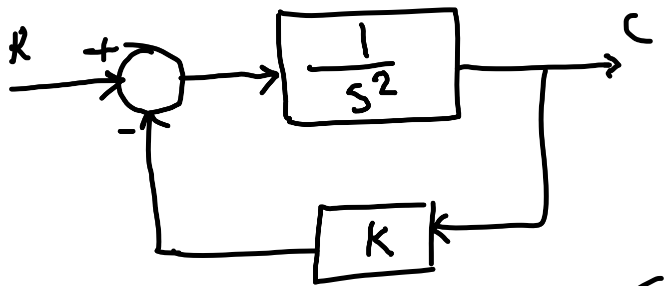
$K=1 \rightarrow s_1 = -2$

$\vdots$

$K=10 \rightarrow s_1 = -11$

$K=\infty \rightarrow s_1 = -\infty$

مثال:



$$\frac{C}{R} = \frac{1}{s^2+K}$$

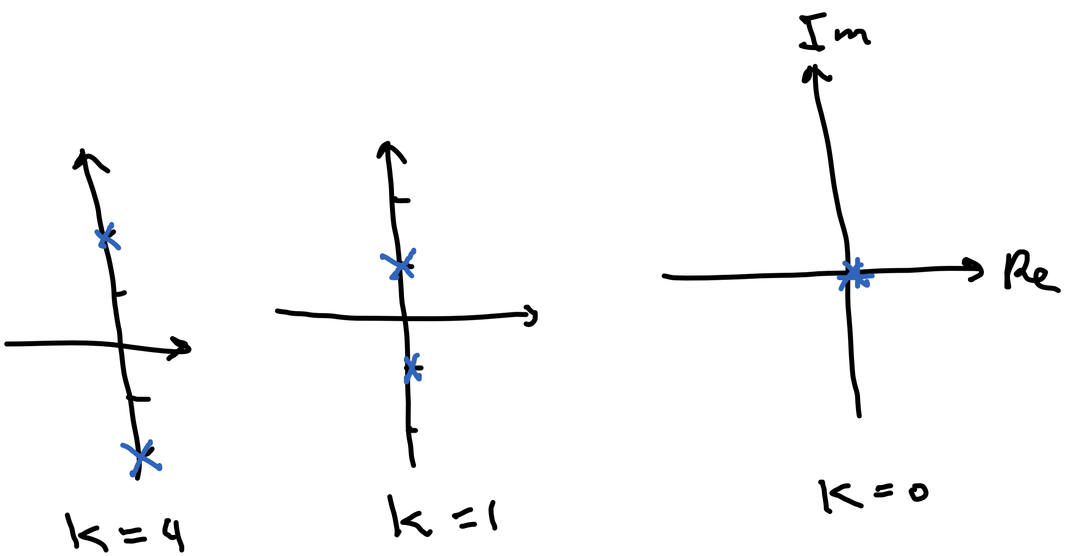
معادله مشخصه ← $s^2+K=0 \Rightarrow s^2=-K \rightarrow s_{1,2}=\pm\sqrt{K}\,j$

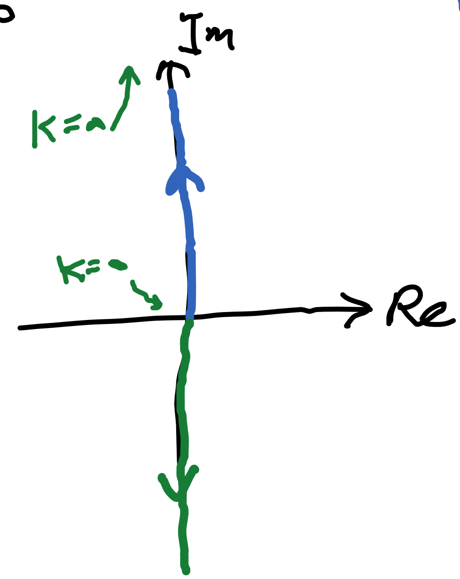
$0<K<+\infty$

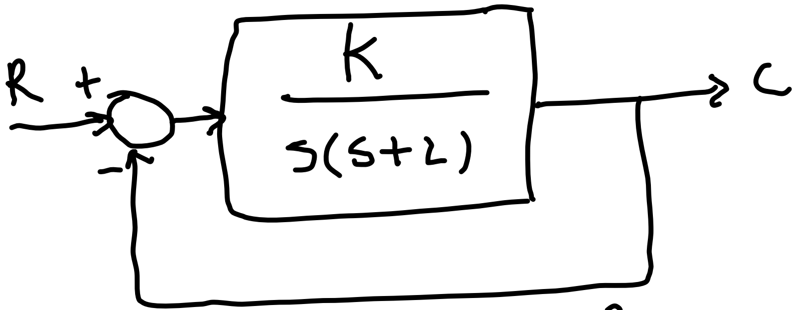
$K=0, \quad s_{1,2}=0$

$K=1, \quad s_{1,2}=\pm j$

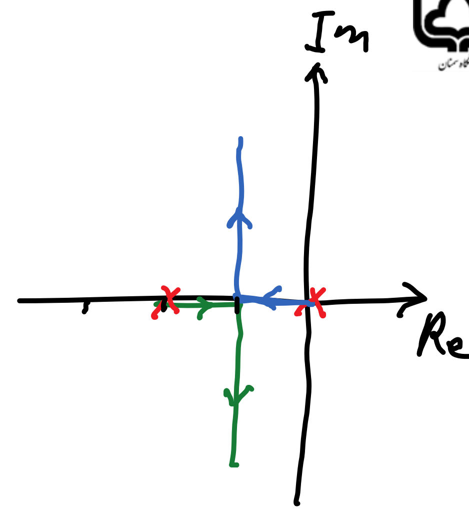
$K=4 \rightarrow s_{1,2}=\pm 2j$





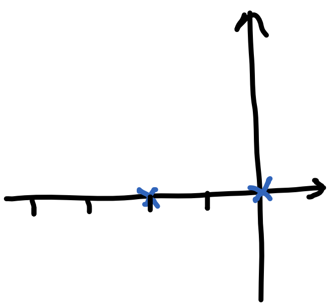


$$\frac{C}{R} = \frac{K}{s(s+2)+K}$$



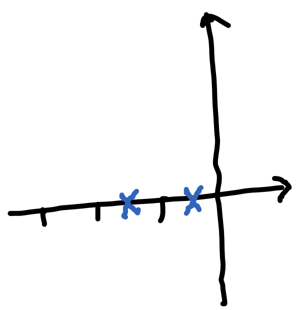
$$s^2+2s+K=0 \Rightarrow s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-K}$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$



$K=0 \rightarrow s_1 = 0$

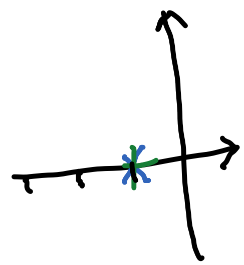
$s_2 = -2$



$K = 3/4$

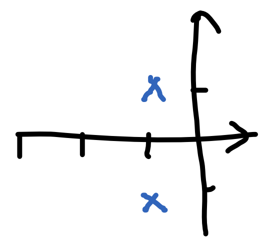
$s_1 = -1 + \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$

$s_2 = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$



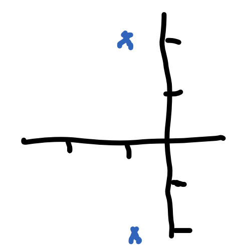
$K=1$

$s_{1,2} = -1$



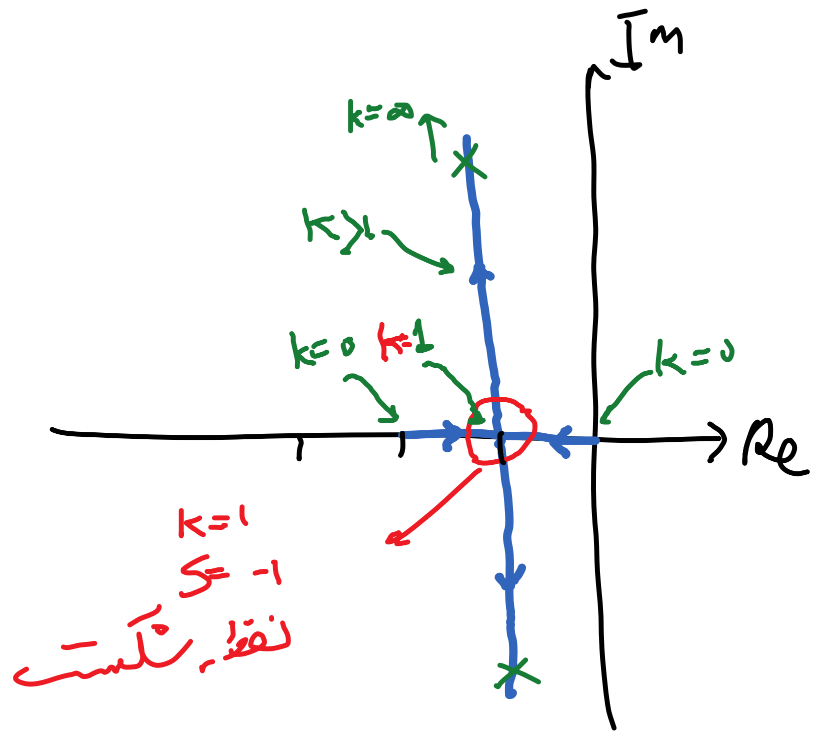
$K=2$

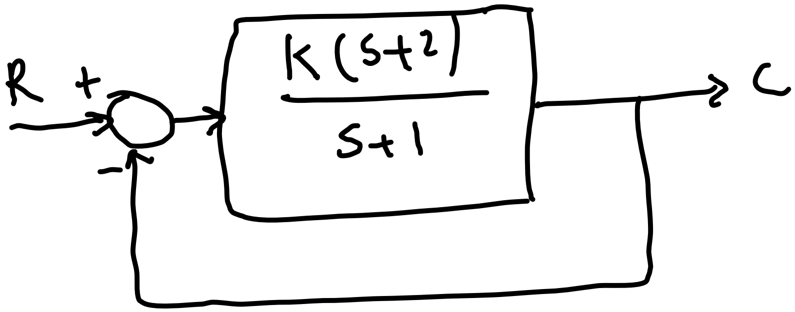
$s_{1,2} = -1 \pm j$



$K=5$

$s_{1,2} = -1 \pm 2j$


Im
Re
k=∞
k>1
k=0
k=1
k=0
k=1
S=-1
نقطه شکست

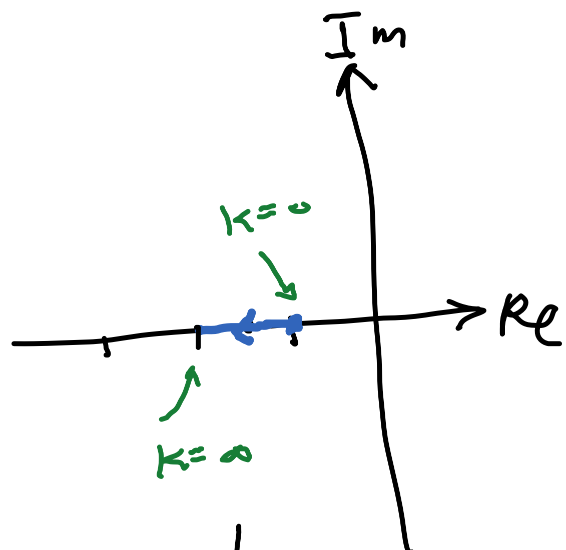


$$\frac{C}{R} = \frac{K(s+2)}{s+1+K(s+2)}$$

$$s+1+Ks+2K=0$$

$$s(K+1) = -2K-1$$

$$\Rightarrow s_1 = \frac{-2K-1}{K+1}$$



$$1 + KF(s) = 0$$

$$1 + \frac{K(s+2)}{s+1} = 0$$

$$F(s) = \frac{s+2}{s+1}$$

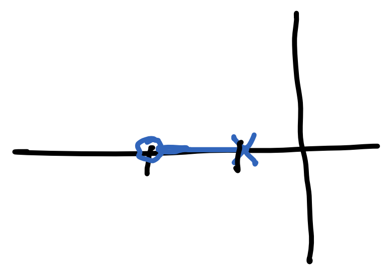
$$P_1 = -1$$

$$Z_1 = -2$$

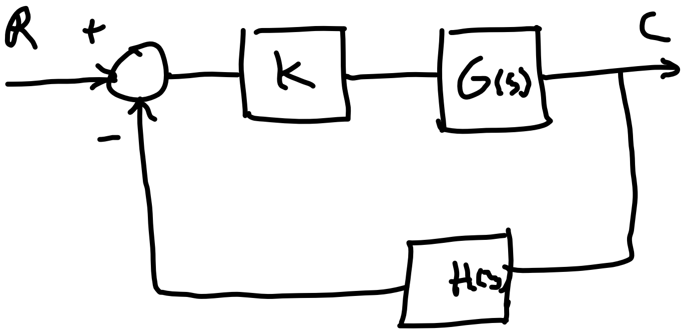
$$K=0 \longrightarrow s_1 = -1$$

$$K=1 \longrightarrow s_1 = -3/2$$

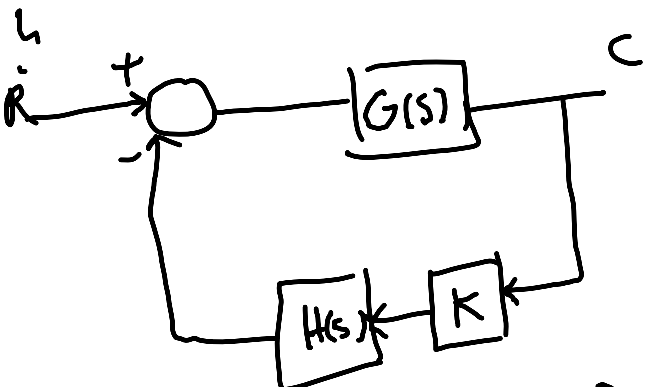
$$K=\infty \longrightarrow s_1 = -2$$



قواعد کلی برای رسم مکان هندسی ریشه ها



$$\frac{C}{R} = \frac{K\,G(s)}{1 + KGH}$$



$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 + KGH}$$

معادله مشخصه: $1 + K\,G(s)\,H(s) = 0$

یا $1 + K\,F(s) = 0$ ← معادله مشخصه

$$\boxed{1 + KF(s) = 0}$$

معادله مشخصه را به فرم زیر می نویسیم:

$$\Rightarrow \quad KF(s) = -1 \quad \Rightarrow \quad \cancel{\angle K}^{\,0} + \angle F(s) = -180(2n+1)$$

$$\Rightarrow \quad \|KF(s)\| = 1 \longrightarrow$$ شرط اندازه

$$\hookrightarrow \quad K\,|F(s)|\,e^{j\varphi} = e^{(2n+1)\pi j}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \angle F(s) = -180(2n+1)$$ ← شرط زاویه

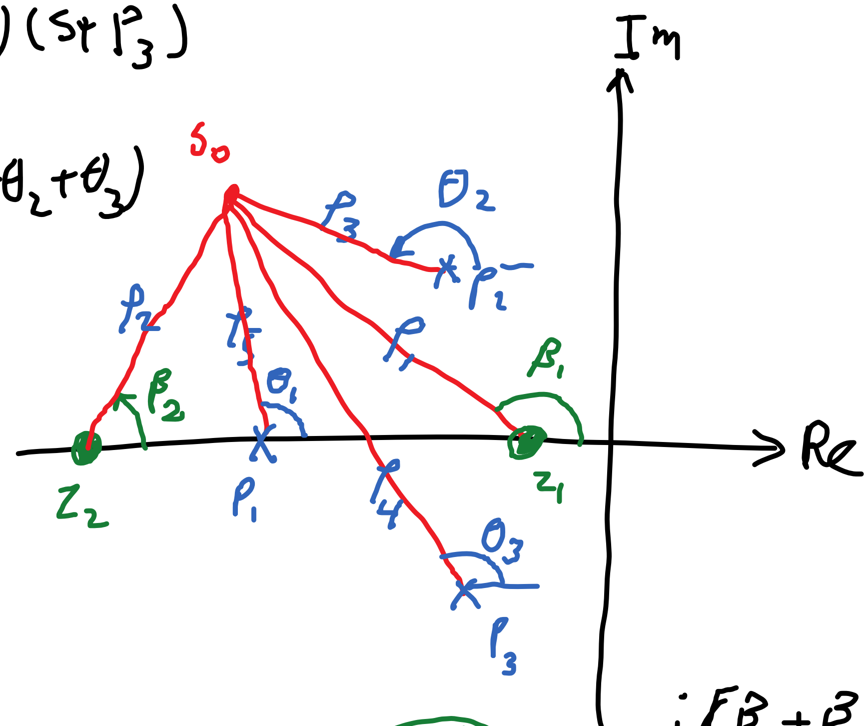
برای رسم مکان هندسی ریشه ها فقط از شرط زاویه استفاده می کنیم.

نقطه s_0 در صورتی جزء مکان هندسی ریشه ها است که $\angle F(s_0) = -180(2n+1)$

$$F(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$$

$$\angle F(s_0) = \pm 180(2n+1) = \beta_1 + \beta_2 - (\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$

$$s = \sigma + \omega j$$



$$\Rightarrow F(s_0) = \frac{\rho_1 e^{j\beta_1}\ \rho_2 e^{j\beta_2}}{\rho_3 e^{j\theta_1}\ \rho_4 e^{j\theta_2}\ \rho_5 e^{j\theta_3}}$$

$$\Rightarrow F(s_0) = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_3 \rho_4 \rho_5}\, e^{j[\beta_1+\beta_2-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)]}$$

$|F(s)|$

مراحل رسم مکان هندسی ریشه ها در حالت کلی

۱- نوشتن معادله مشخصه به فرم زیر $1 + K F(s) = 0$

که در آن $F(s) = \dfrac{A(s)}{B(s)}$

۲- صفرهای $F(s)$ که در حقیقت همان ریشه های $A(s)=0$ هستند و

قطبهای 〃 〃 〃 〃 〃 〃 $B(s)=0$ 〃 را در صفحه اعداد مختلط رسم می کنیم

$A(s)=0 \longrightarrow z_1, z_2, \dots z_m \longrightarrow$ m تا صفر، $\leftarrow F(s)$

$B(s)=0 \longrightarrow P_1, P_2, \dots P_n$ n تا قطب $\leftarrow$

به تعداد قطبهای $F(s)$ ، (n) شاخه مکان هندسی داریم

شاخه های مکان هندسی از قطبهای $F(s)$ شروع می شوند و به صفرهای $F(s)$ ختم می گردند.

$$1+KF(s)=0 \longrightarrow 1+K\frac{A(s)}{B(s)}=0 \longrightarrow B+KA=0 \longrightarrow K=\frac{-B}{A}$$

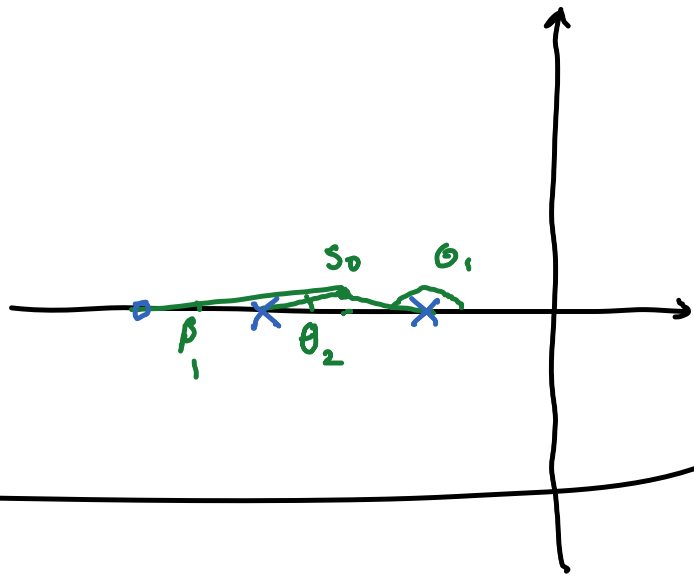
$K=0 \Rightarrow B(s)=0 \longrightarrow$ قطبهای $F(s)$ $\longrightarrow$ شروع شاخه ها

$K=\infty \Rightarrow A(s)=0 \longrightarrow$ صفرهای $F(s)$ $\longrightarrow$ انتهای شاخه ها

به تعداد $n-m$ شاخه به سمت بینهایت می روند.

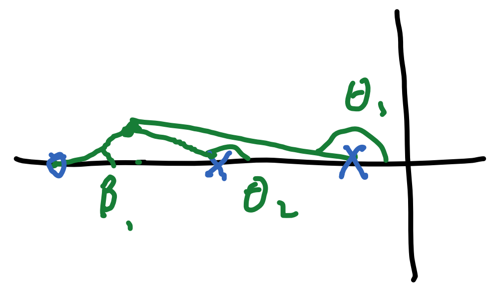
۳- تعیین بخش واقع بر محور حقیقی

اگر تعداد کل صفرها و قطبهای سمت راست یک نقطه روی محور حقیقی، فرد باشد آن نقطه جزء مکان هندسی ریشه ها است.



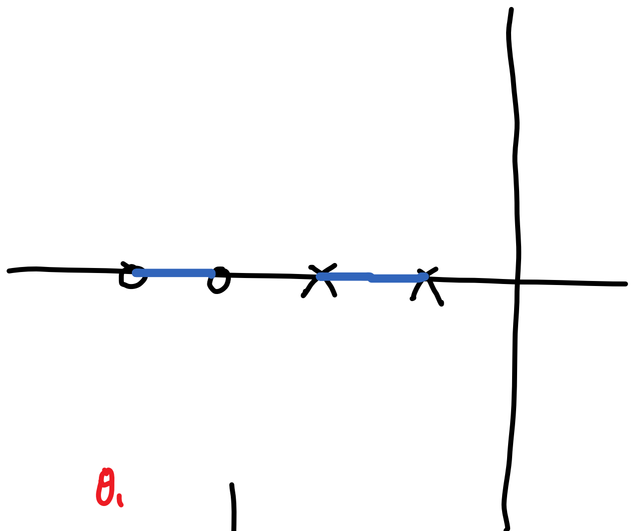
$$\angle F(s_0) = \beta_1 - (\theta_1 + \theta_2) = 0 - (180 + 0)$$

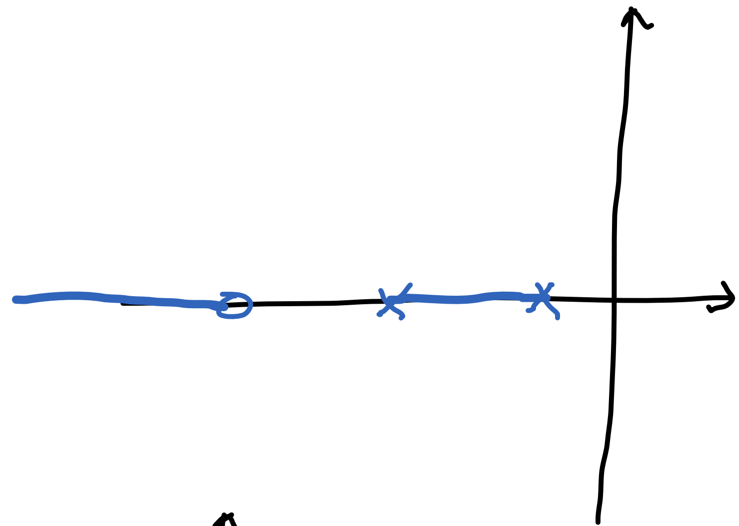
$$= -180$$

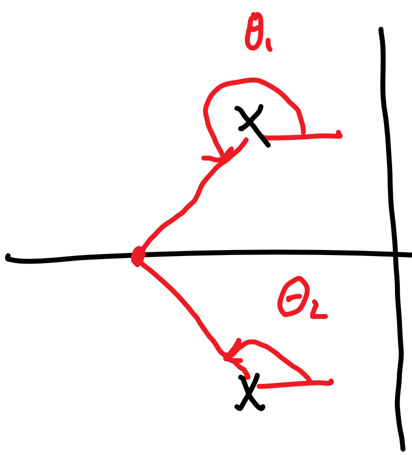


$$\angle F(s_0) = 0 - (180 + 180)$$

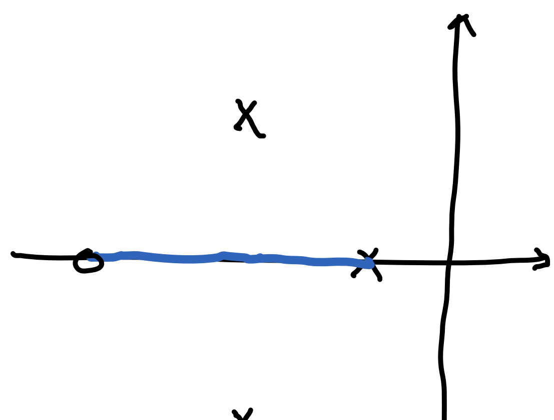
$$= -360$$







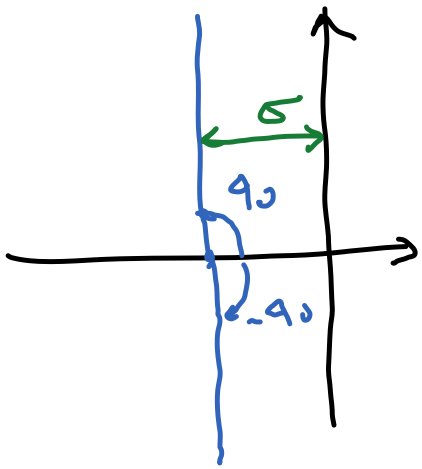
$\theta_1 + \theta_2 = 360$



۴- رسم مجانبها

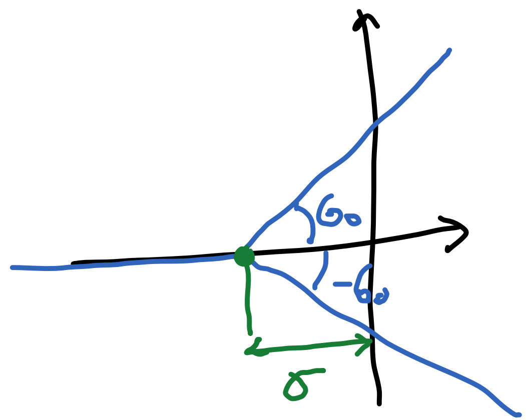
$n-m$ مجانب

$\varphi =$ زاویه مجانبها $= \dfrac{\pm 180\,(2k+1)}{n-m}$ و $\sigma =$ محل برخورد مجانبها با محور حقیقی $= \dfrac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$



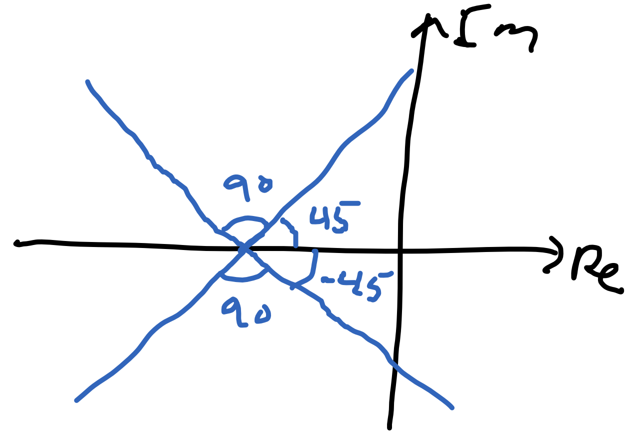
$n-m=2$

$\varphi = \pm 90$



$n-m=3$

$\varphi = 60, -60, 180$



$n-m=4$

$\varphi = 45, -45, 135, -135$

۵ - تعیین نقاط شکست

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

نقاط شکست متناظر با ریشه‌های تکراری معادله مشخصه هستند.

$$1 + K\frac{A(s)}{B(s)} = 0 \Rightarrow P(s) = B(s) + KA(s) = 0$$

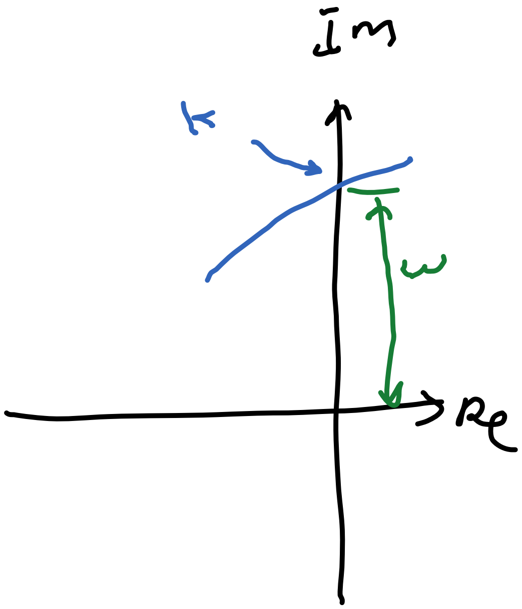
برای ریشه تکراری $\quad \frac{dP(s)}{ds} = 0 \Rightarrow B' + KA' = 0 \rightarrow K = -\frac{B'}{A'}$

$$\Rightarrow P(s) = B - \frac{B'}{A'}A = 0 \Rightarrow A'B - B'A = 0 \rightarrow s^* \qquad A' = \frac{dA(s)}{ds}$$

ریشه‌های این معادله، کاندیداهای نقاط شکست هستند.

$K = -\frac{B(s)}{A(s)}\Big|_{s=s^*} \rightarrow$ اگر K متناظر با s^* حقیقی و مثبت بود، s^* نقطه شکست است.

۶- تعیین محل برخورد با محور موهومی



معادله مشخصه $B(s) + K \cdot A(s) = 0$

در معادله مشخصه به جای $s = j\omega$ قرار می دهیم

بخش حقیقی و موهومی را صفر می کنیم. دو معادله

دو مجهول ← ω ✓

K ✓

۷- محاسبه K

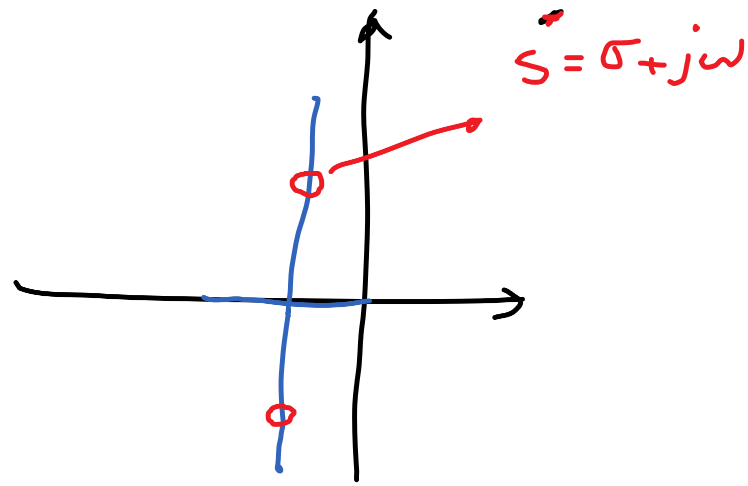
مکان هندسی ← $\angle F(s) = \pm 180(2k+1)$ شرط زاویه

شرط اندازه:

اگر بخواهیم قطب‌های حلقه بسته در s' قرار بگیرد، با استفاده از شرط اندازه:

$$1 + K\frac{A}{B} = 0 \Rightarrow \left|K\frac{A(s)}{B(s)}\right|_{s=s'} = 1$$

$$\Rightarrow K = \checkmark$$



کنترل اتوماتیک

مکان هندسی ریشه ها، بخش دوم

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

مراحل رسم مکان هندسی ریشه ها

تعریف

۱ – نوشتن معادله مشخصه بفرم $1+KF(s)=0$ که در آن $F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}$

۲ – مشخص کردن صفرها و قطبهای $F(s)$ در صفحه اعداد موهومی

۳ – تعیین بخش واقع بر محور حقیقی

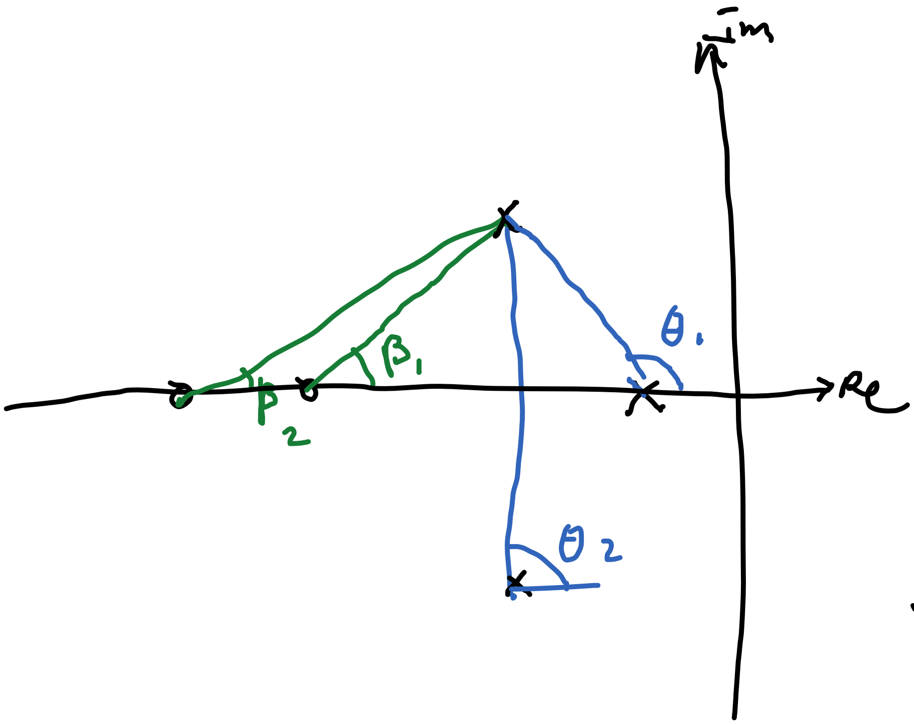
۴ – رسم مجانبها

۵ – تعیین نقاط شکست $A'B-B'A=0$

۶ – تعیین محل برخورد با محور موهومی

۷ – تعیین زاویه خروج از قطب مختلط و زاویه ورود به صفر مختلط

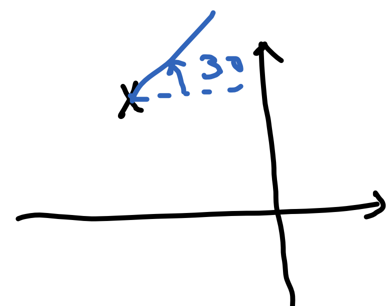
۷- تعیین زاویه خروج از قطب مختلط و زاویه ورود به صفر مختلط



زاویه خروج از قطب مختلط $\alpha = \pm 180 + \sum \beta_i - \sum \theta_i$

زاویه ورود به صفر مختلط $\gamma = \pm 180 - \sum \beta_i + \sum \theta_i$

$\alpha = -90$ یا 270

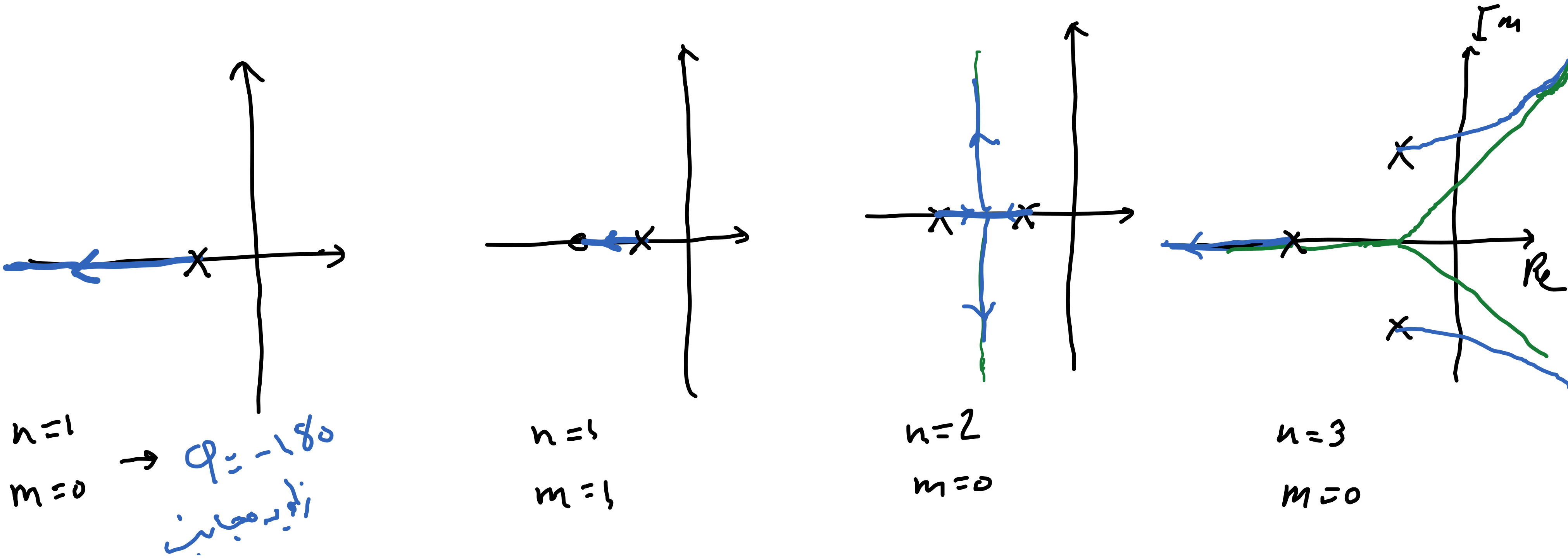


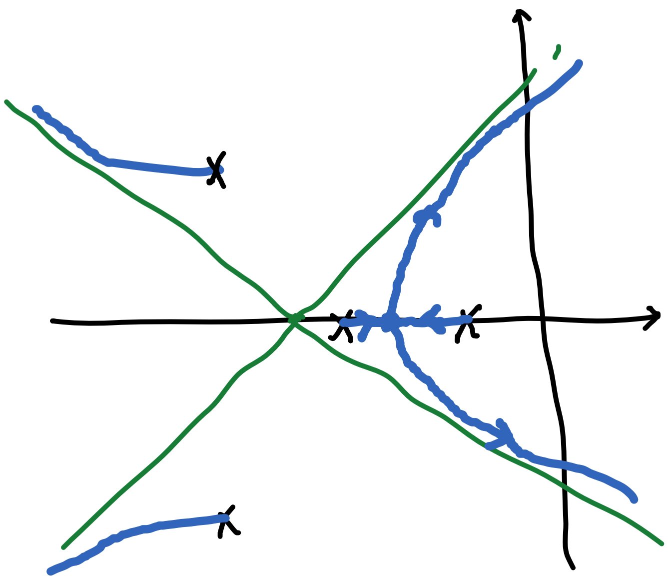
$\alpha = 30$

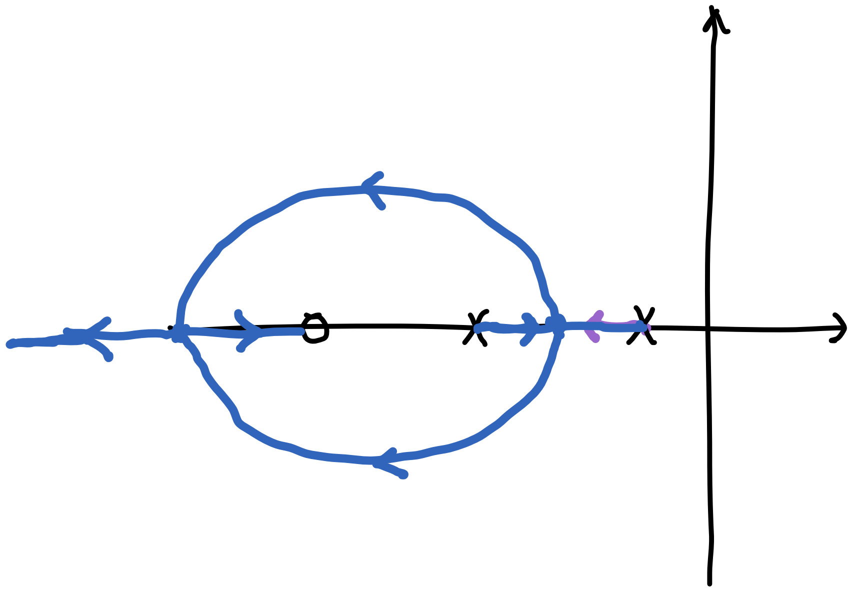
مثال: شکل تقریبی مکان هندسی ریشه‌ها را برای سیستم‌های زیر رسم کنید.

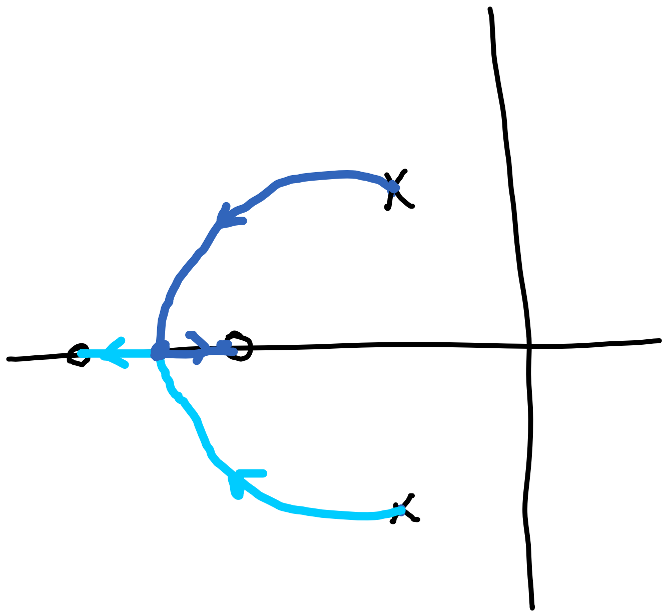
توضیح: صفر و قطب‌های نشان داده شده، صفر و قطب‌های $F(s)$ هستند.

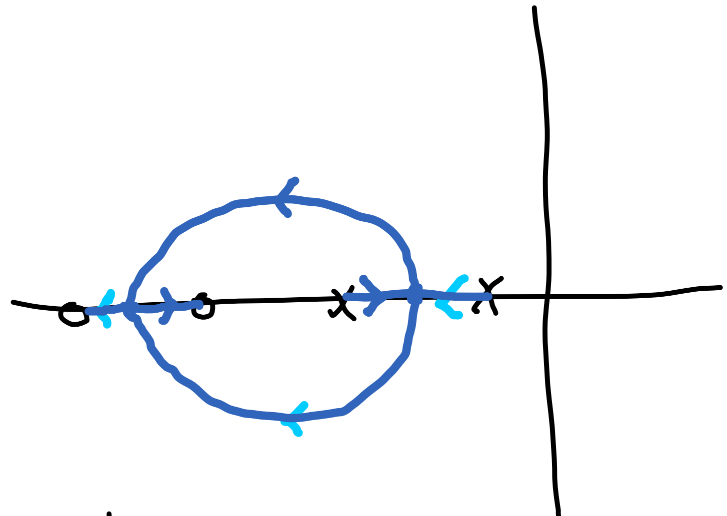
معادله مشخصه: $1 + kF(s) = 0$





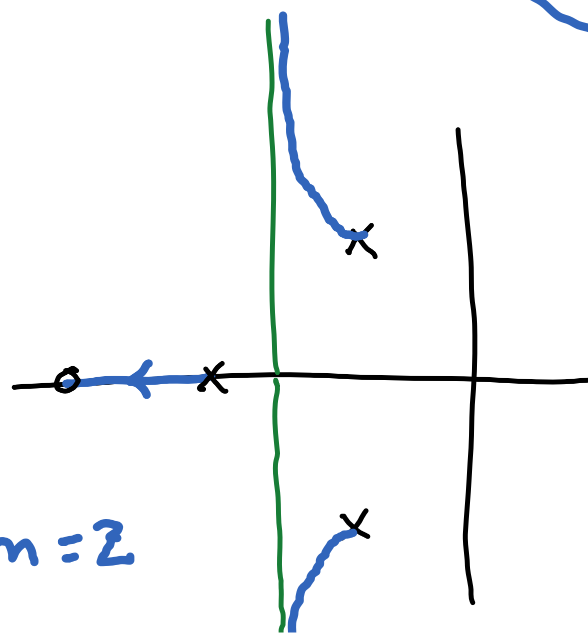




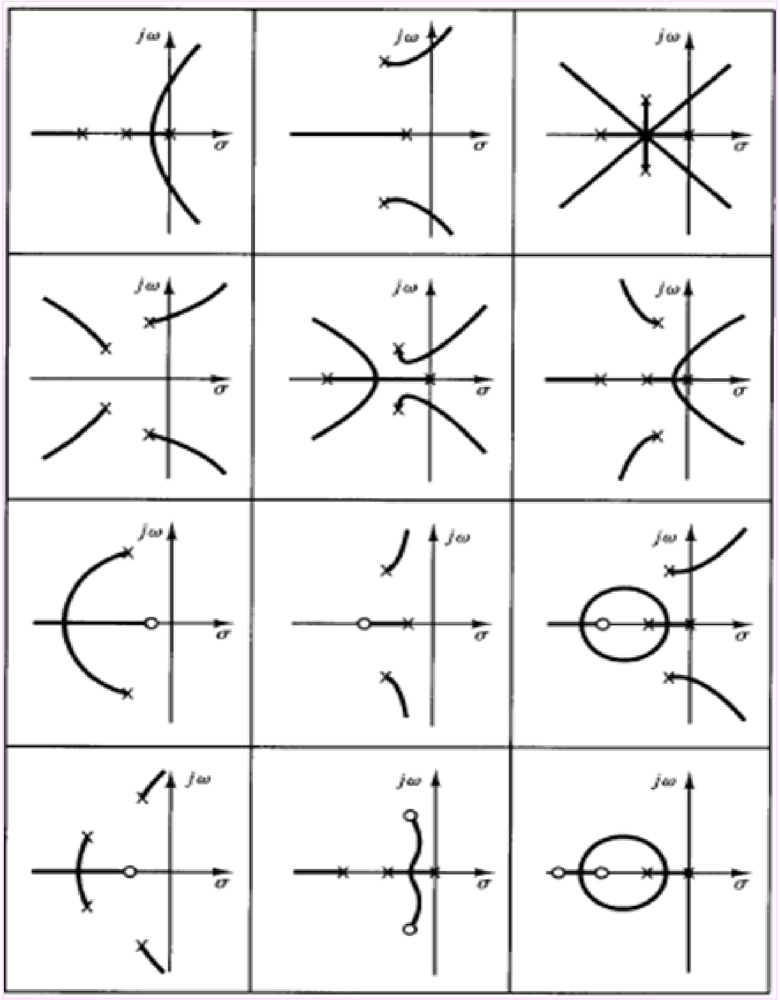


$n-m=0$

مجانب نداریم

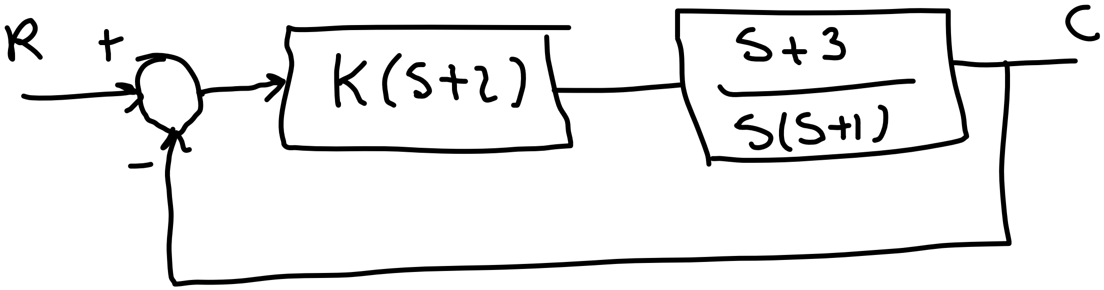


$n-m=2$



: Open-Loop Pole-Zero Configurations and the Corresponding Root Loci

مثال: مکان هندسی ریشه‌های سیستم زیر را رسم کنید



$$1+\frac{K(S+2)(S+3)}{S(S+1)}=0$$

$$\frac{C}{R}=\frac{\dfrac{K(S+2)(S+3)}{S(S+1)}}{1+\dfrac{K(S+2)(S+3)}{S(S+1)}}=\frac{K(S+2)(S+3)}{\boxed{S(S+1)+K(S+2)(S+3)}}$$

معادله مشخصه

$$S(S+1)+K(S+2)(S+3)=0 \xRightarrow{1+KF(s)=0} 1+\frac{K(S+2)(S+3)}{S(S+1)}=0$$

$$1+\frac{K(s+2)(s+3)}{s(s+1)}=0 \Rightarrow \begin{cases} z_1=-2\,, & z_2=-3 \\ p_1=0\,, & p_2=-1 \end{cases}$$

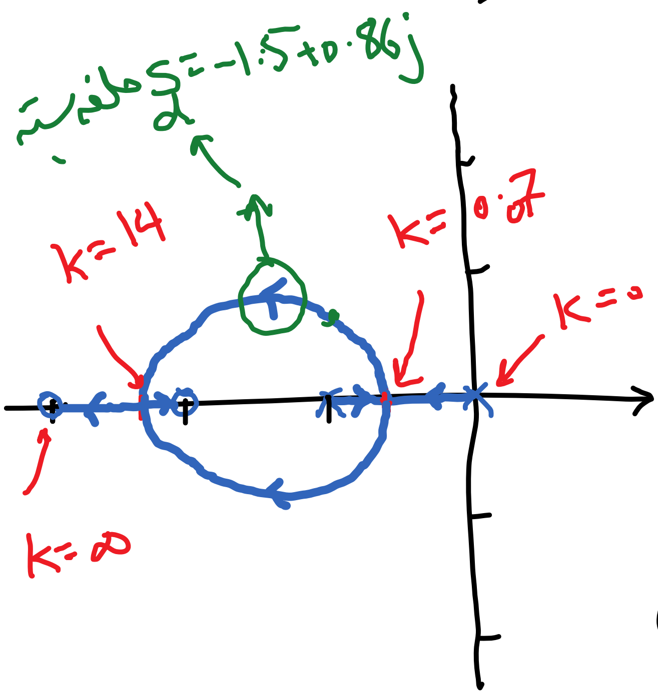
$n-m=0$ ۴- مجانب نداریم

$A'B-B'A=0$ ۵- تعیین نقاط شکست

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{s^2+5s+6}{s^2+s}$$

$$\underbrace{(2s+5)}_{A'}\underbrace{(s^2+s)}_{B}-\underbrace{(2s+1)}_{B'}\underbrace{(s^2+5s+6)}_{A}=0$$

$$\Rightarrow (s+0.63)(s+2.36)=0 \;\rightarrow\; s_1=-0.63\,,\quad s_2=-2.36$$



rlocus(num,den)

$$K = \frac{-s(s+1)}{(s+2)(s+3)}\Bigg|_{s=-0.63} = \frac{0.63(-0.63+1)}{(-0.63+2)(-0.63+3)} = 0.07 \checkmark$$

$$K\Big|_{s=-2.36} = 14 \checkmark$$

$$K = \frac{-s(s+1)}{(s+2)(s+3)}\Bigg|_{s=-1.5+0.86j}$$

$$F(s) = \frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)} = \frac{s^2+5s+6}{s^2+s}$$

→ num = [1 5 6]

→ den = [1 1 0]

rlocus(num,den)

$$K = \frac{(1.5-0.86j)(-0.5+0.86j)}{(0.5+0.86j)(1.5+0.86j)}$$

میخواهیم قطبهای حلقه بسته را در

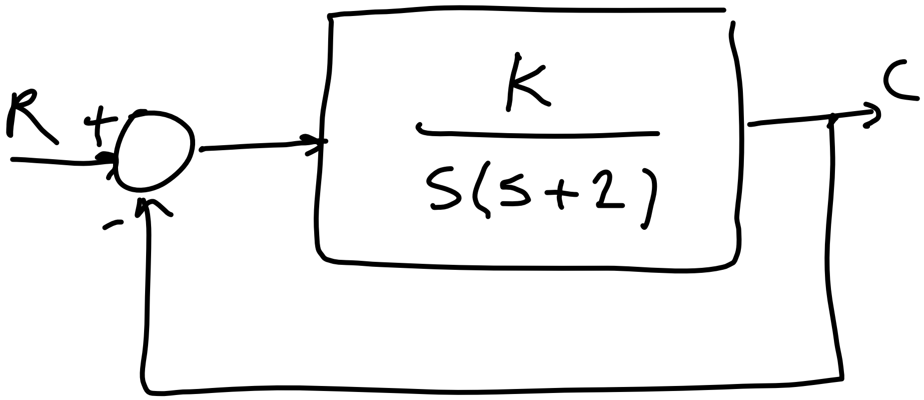
$$s_d = -1.5 + 0.86j$$

قرار بدهیم.

$$K = \left. \frac{-s(s+1)}{(s+2)(s+3)} \right|_{s=-1.5+0.86j}$$

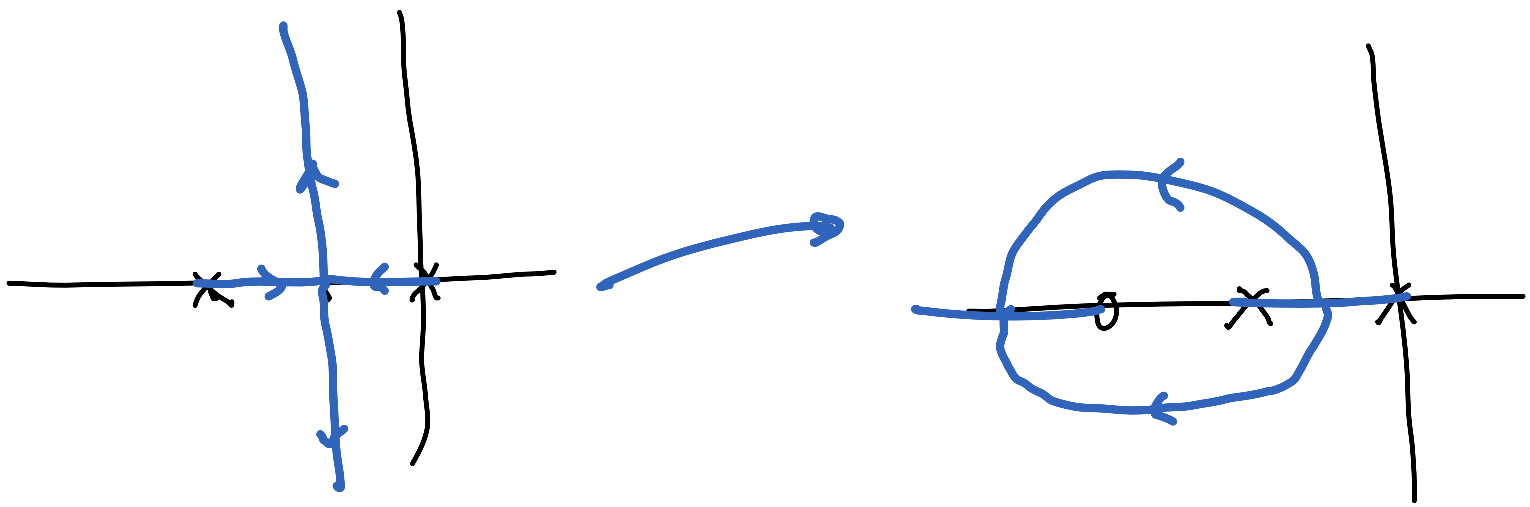
$$K = \left| \frac{(1.5-0.86j)(-0.5+0.86j)}{(0.5+0.86j)(1.5+0.86j)} \right| = \frac{(1.5^2+0.86^2)^{\frac{1}{2}}(0.5^2+0.86^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{0.5^2+.86^2}\,\sqrt{1.5^2+0.86^2}} = \dots$$

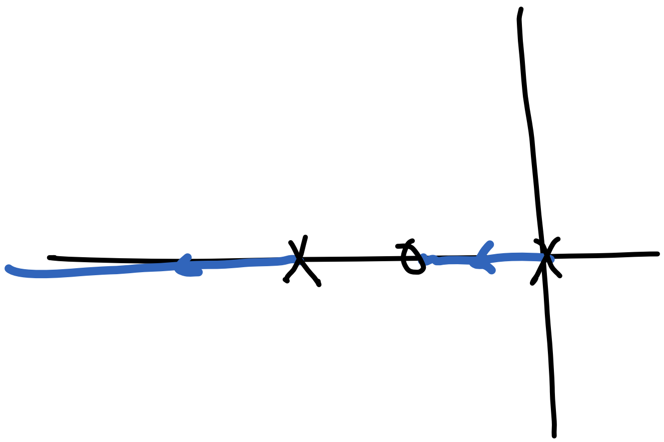
$$K = 1$$



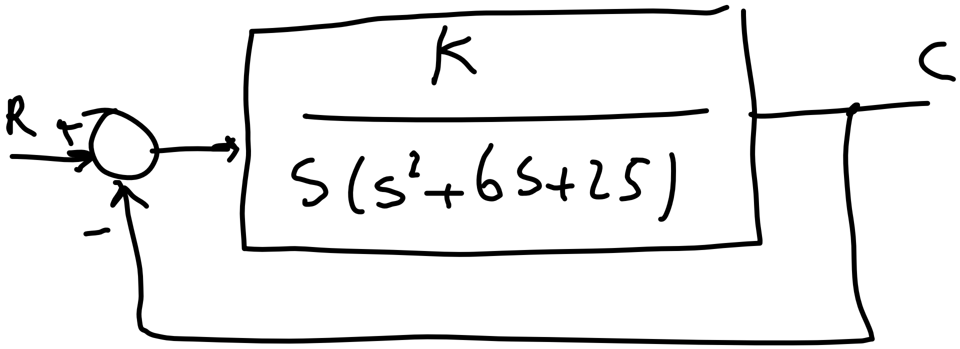
$$\frac{C}{R} = \frac{K}{s^2+2s+K}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2+2s}$$





مثال



$$1 + KF(s) = 0$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+6s+25)}$$

صفر نداریم

$P_1 = 0$

$P_{2,3} = -3 \pm 4j$

محل برخورد با محور موهومی

$$1 + \frac{K}{s(s^2+6s+25)} = 0 \rightarrow s(s^2+6s+25) + K = 0$$

$$s \rightarrow j\omega \Rightarrow j\omega(-\omega^2 + 6j\omega + 25) + K = 0$$

$$\Rightarrow -j\omega^3 - 6\omega^2 + 25j\omega + K = 0$$

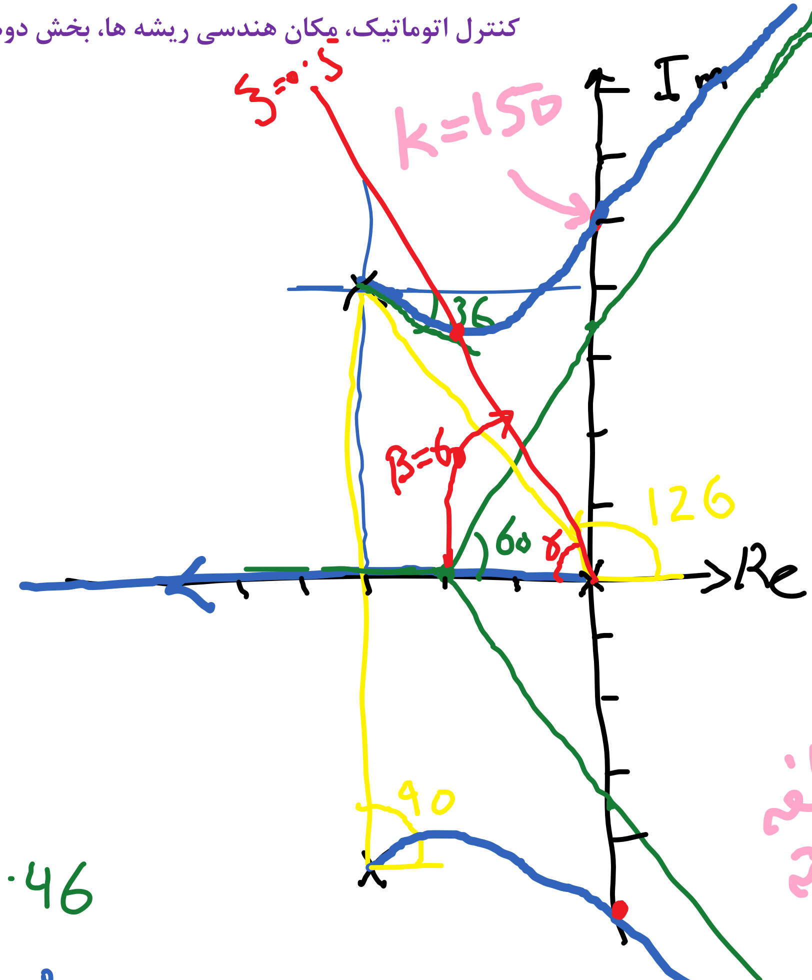
$n-m=3$

$\varphi = -60, 60, -180$

$\sigma = \dfrac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$

$= \dfrac{-3+\cancel{4j}-3-\cancel{4j}-(\;)}{3}$

$= \dfrac{-6}{3} = -2$



$tg\gamma = \dfrac{4}{3} \Rightarrow$

$\gamma = tg^{-1}\dfrac{4}{3} = 53$

$0 < K < 150$

بازه پایداری سیستم حلقه بسته

$tg60 = \dfrac{x}{2} \Rightarrow x = 2\,tg60 = 3.46$

$\alpha = \pm 180(2k+1) + \cancel{\sum \beta_i} - \sum \theta_i = \pm 180 - \underbrace{(90+126)}_{216} = \boxed{-36}$

دومین: محل برخورد با محور موهومی

$$\Rightarrow -j\omega^3 - 6\omega^2 + 25j\omega + K = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{j(-\omega^3+25\omega)} + \underbrace{K - 6\omega^2} = 0$$

$$\omega(-\omega^2+25) = 0 \rightarrow \omega = 0 \xrightarrow{K=6\omega^2} K = 0$$

$$\omega(-\omega^2+25) = 0 \rightarrow \omega = \pm 5 \xrightarrow{\text{I}} K = 6 \times 25 = 150$$

$$\text{I} \quad K - 6\omega^2 = 0$$

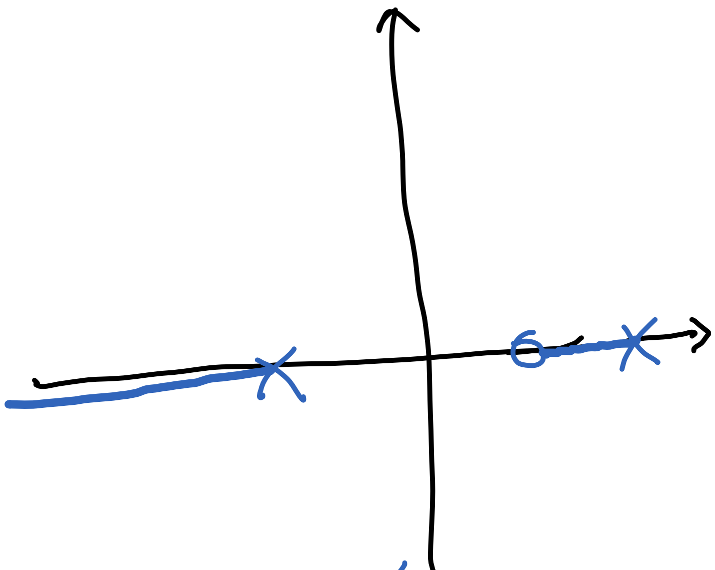
، مقدار K را به نحوی محاسبه کنید که ضریب میرایی قطبهای حلقه بسته، $\xi = 0.5$ باشد.

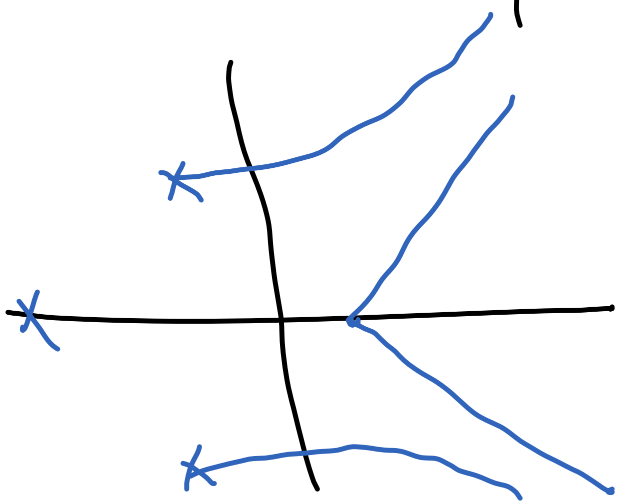
$$\xi = 0.5 \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\xi = \cos^{-1}0.5 = 60^\circ \rightarrow s_d = -2 + 3.5j$$

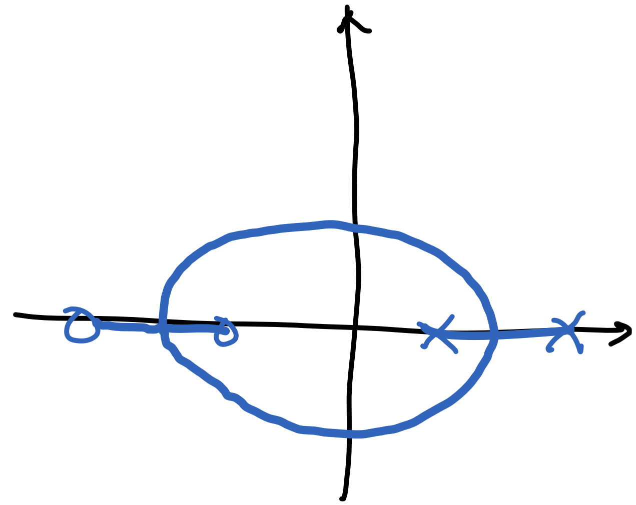
$$1 + \frac{K}{s(s^2+6s+25)} = 0 \Rightarrow K = -s(s^2+6s+25)\Big|_{s_d = -2+3.5j}$$

$$\Rightarrow K = -(-2+3.5j)(4+3.5^2-4\times 3.5j - 6 + 6\times 3.5j + 25)$$

$$K = (2-3.5j)\left[a+bj\right] \Rightarrow |K| = \sqrt{2^2+3.5^2}\ \sqrt{a^2+b^2}$$







$n \geq m$

کنترل اتوماتیک

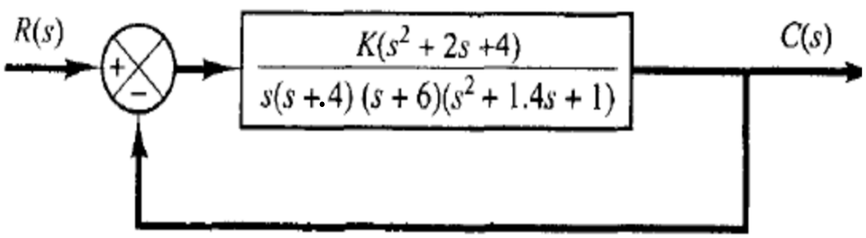
ادامه مکان هندسی ریشه ها، کنترلر PID

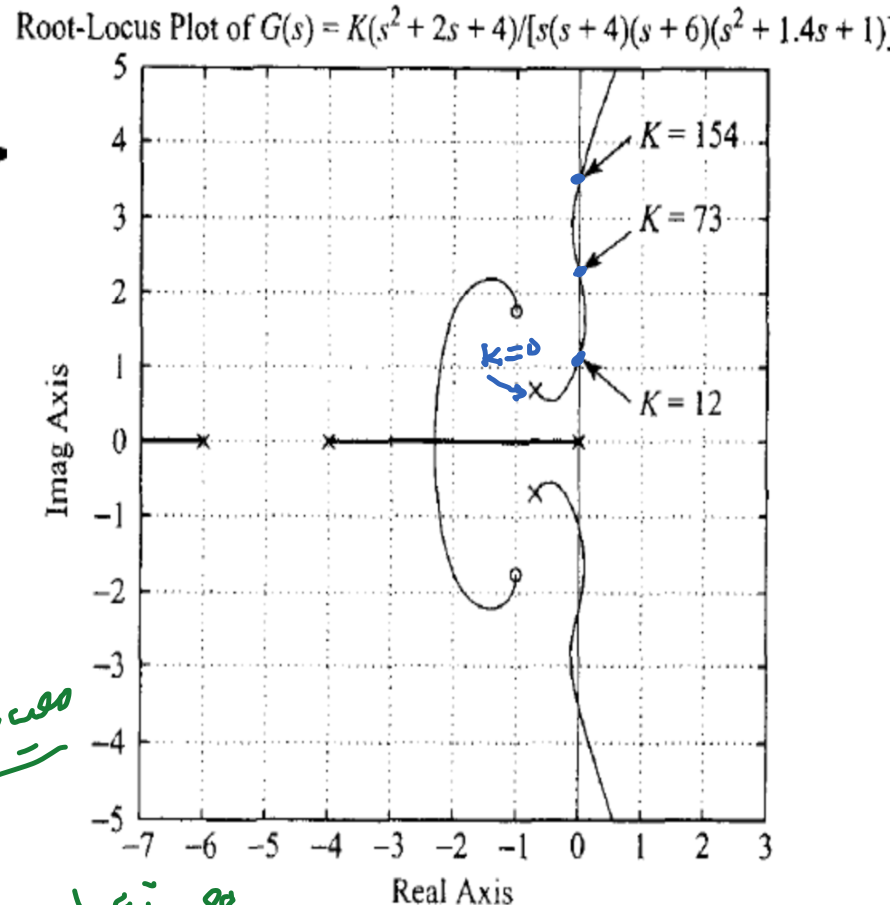
دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

مکان هندسی ریشه های سیستم های زیر را رسم کنید و جواب را با پاسخ کتاب Ogata مقایسه کنید.





→ MATLAB

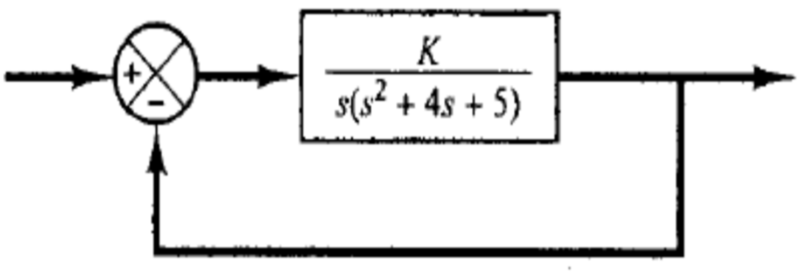
محدوده پایداری

$0 < K < 12$

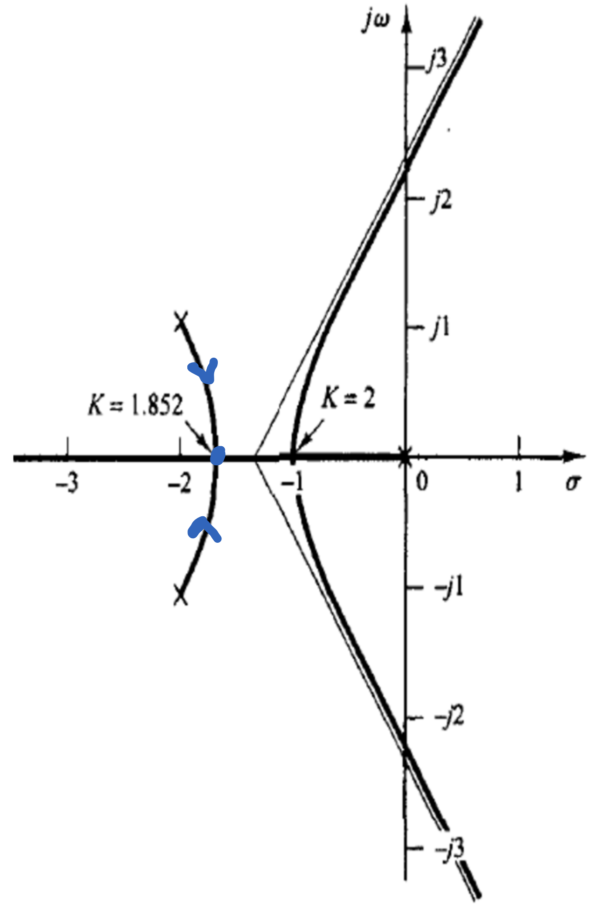
$73 < K < 154$

معیار روث

$\frac{C}{R} = \checkmark \rightarrow$ محدوده پایداری به دست می‌آید

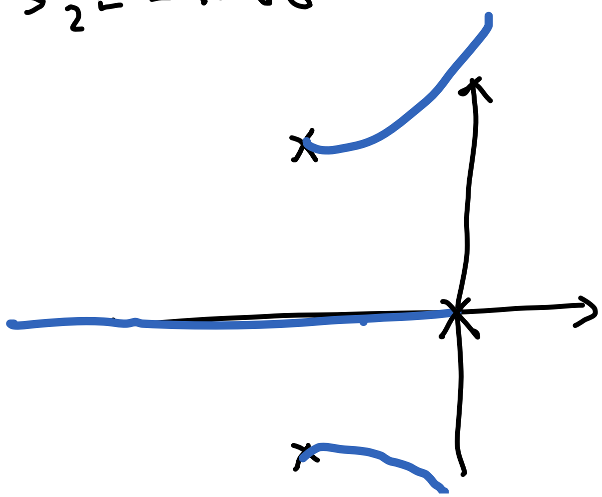


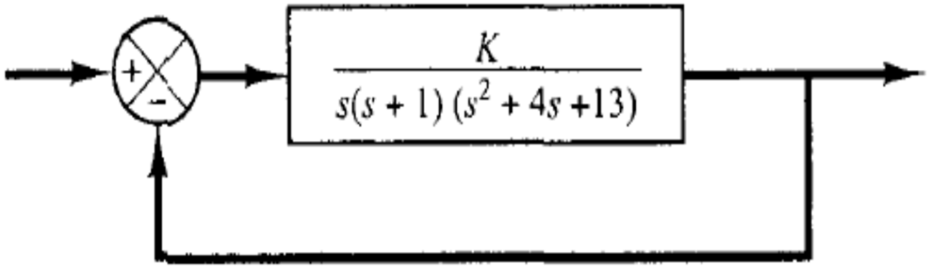
(a)

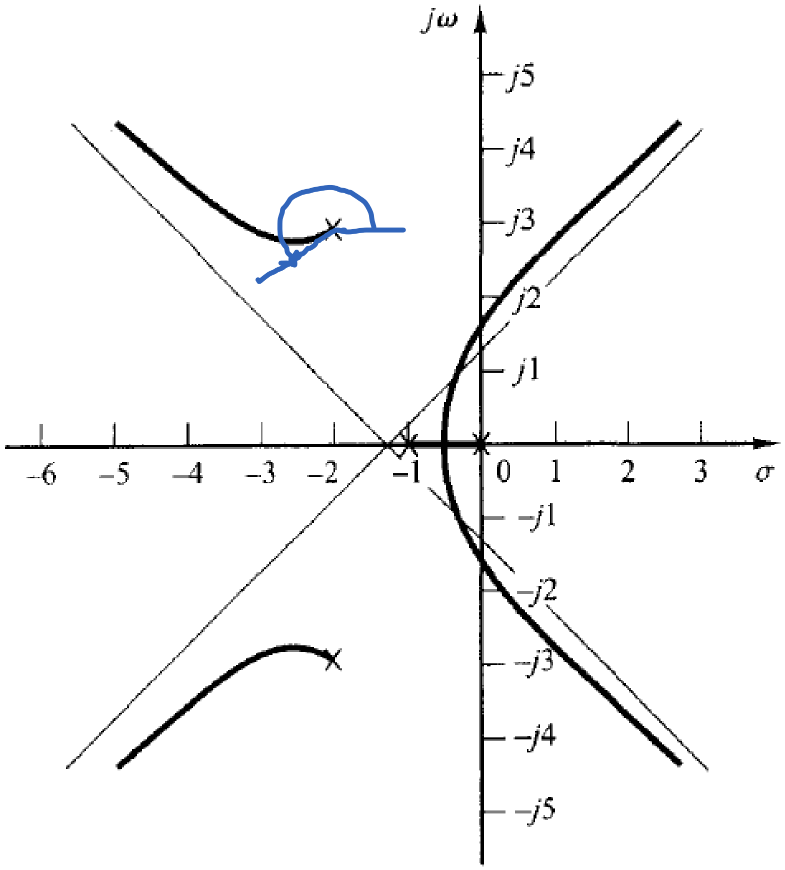


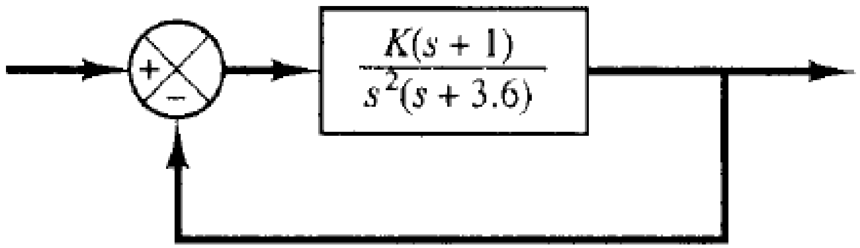
دو نقطه شکست دارد:

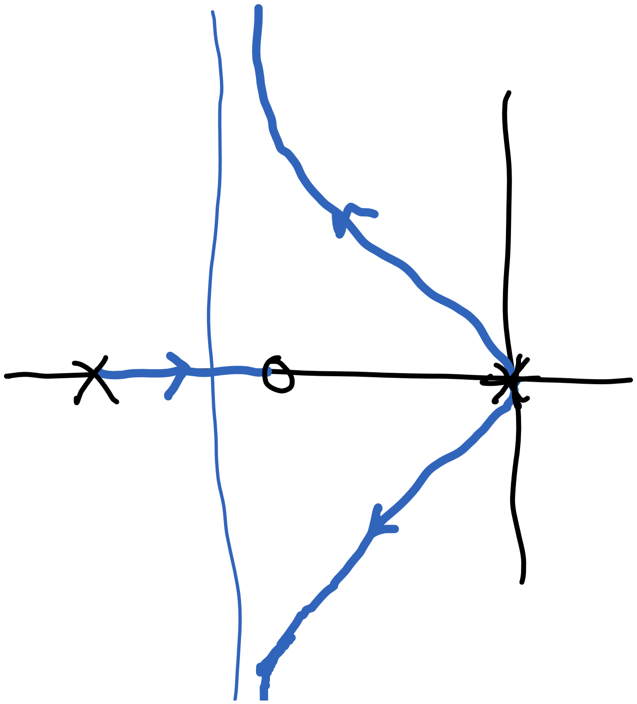
$s_1 = -1$, $s_2 = -1.66$

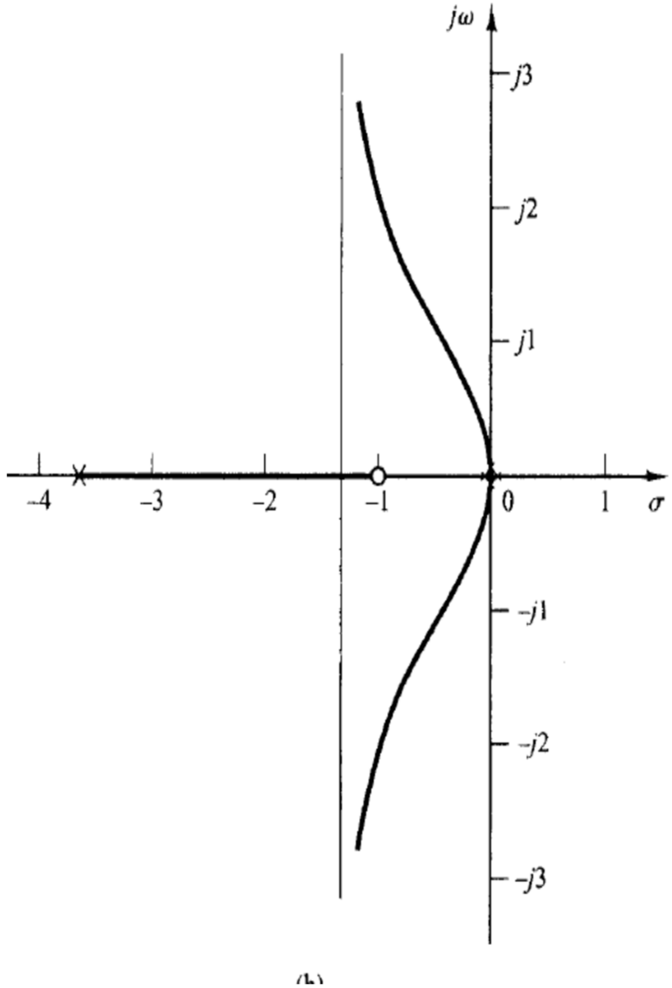


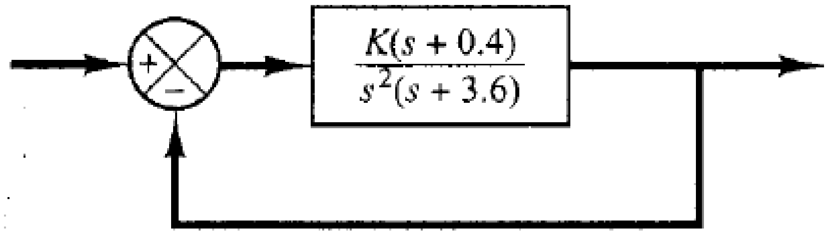

+
-
K
s(s + 1) (s^2 + 4s +13)

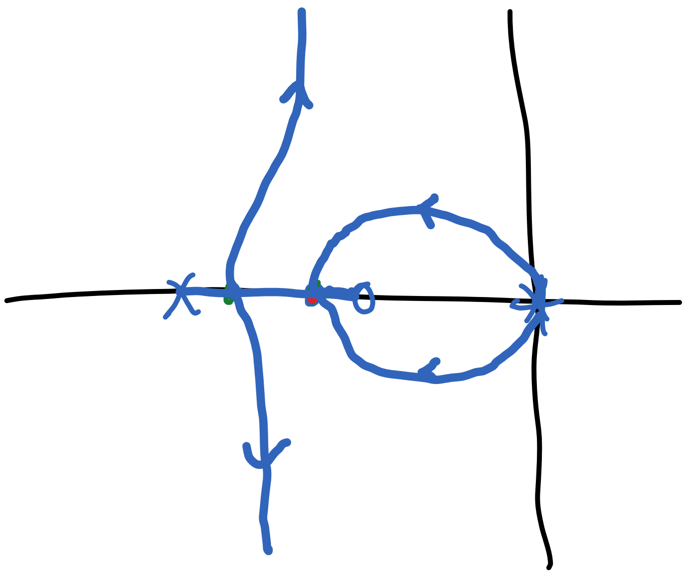

jω
j5
j4
j3
j2
j1
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
σ
-j1
-j2
-j3
-j4
-j5

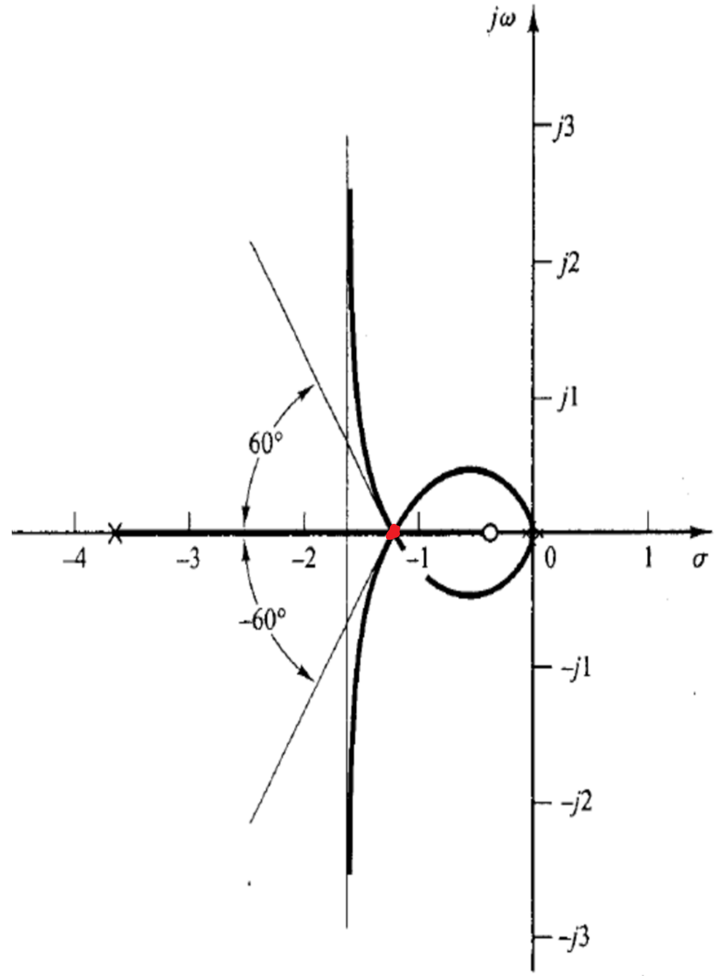

$\frac{K(s+1)}{s^2(s+3.6)}$
+
−

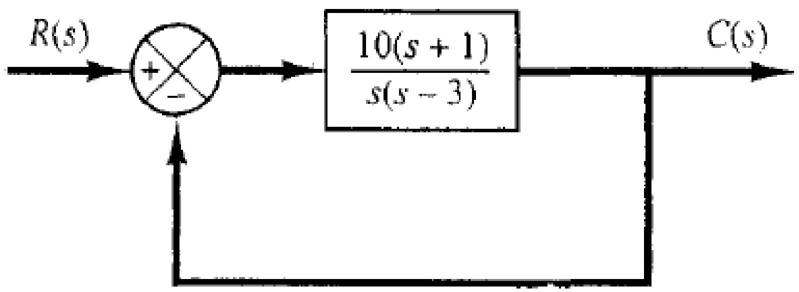


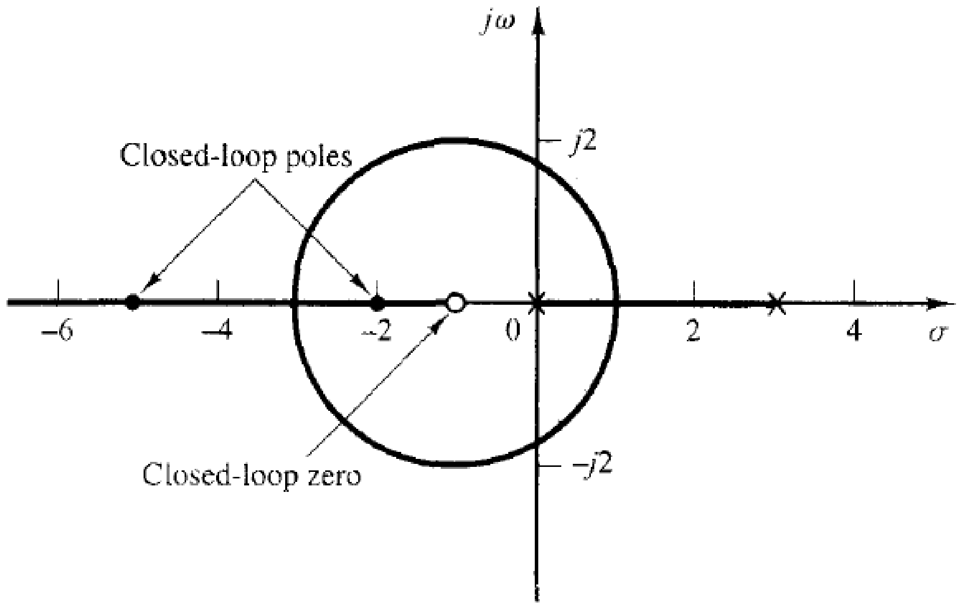

$j\omega$
$j3$
$j2$
$j1$
$-j1$
$-j2$
$-j3$
-4
-3
-2
-1
0
1
σ

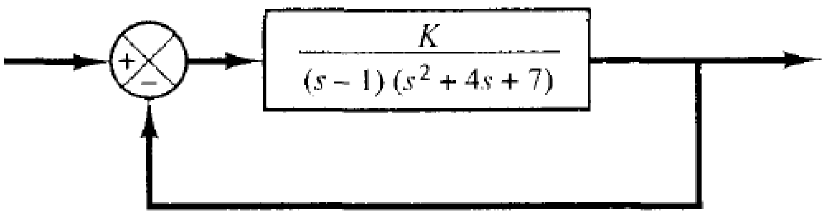

+
−
$\frac{K(s+0.4)}{s^2(s+3.6)}$

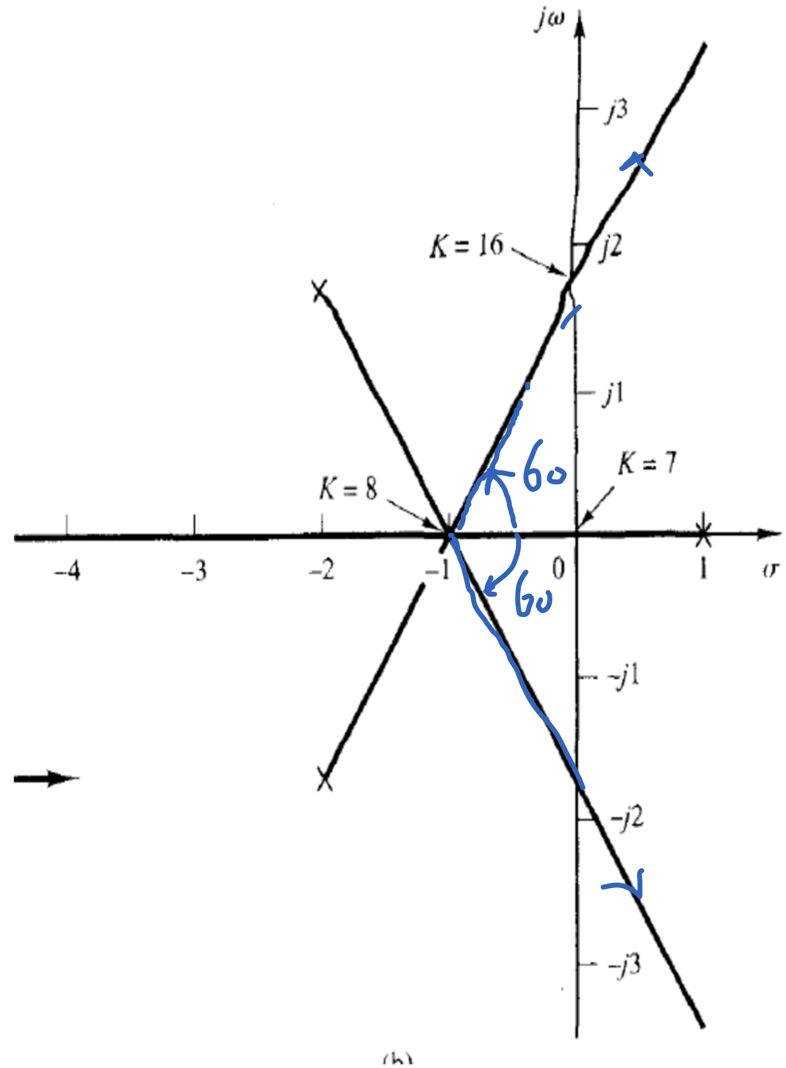



$j\omega$
$j3$
$j2$
$j1$
60°
−60°
−4
−3
−2
−1
0
1
σ
$-j1$
$-j2$
$-j3$


R(s)
+
−
10(s + 1)
s(s − 3)
C(s)


jω
j2
Closed-loop poles
−6
−4
−2
0
2
4
σ
Closed-loop zero
−j2





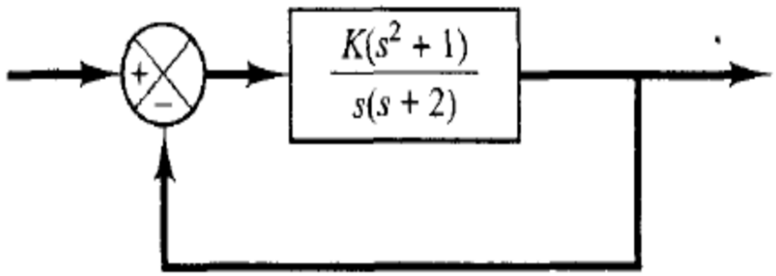
$$s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}\,j$$

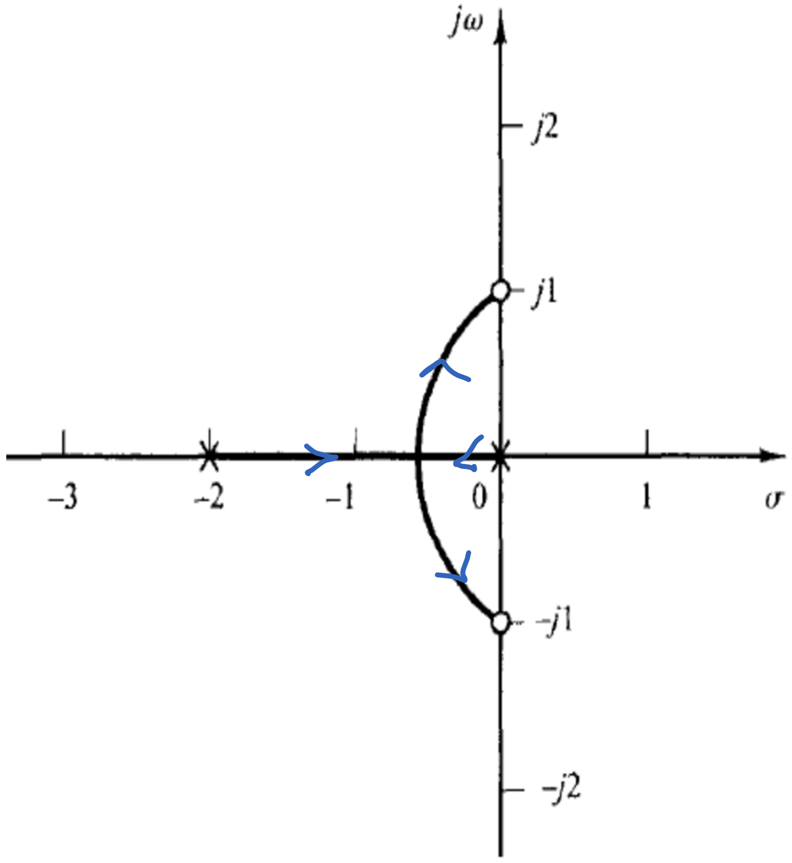
$$s_3 = 1$$

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \cancel{\sum z_i}}{n-m} = \frac{-2-2+1}{3} = -1$$

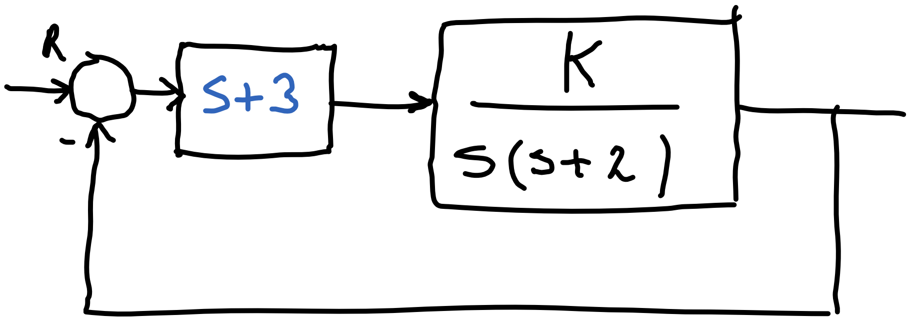
محل برخورد مجانبها

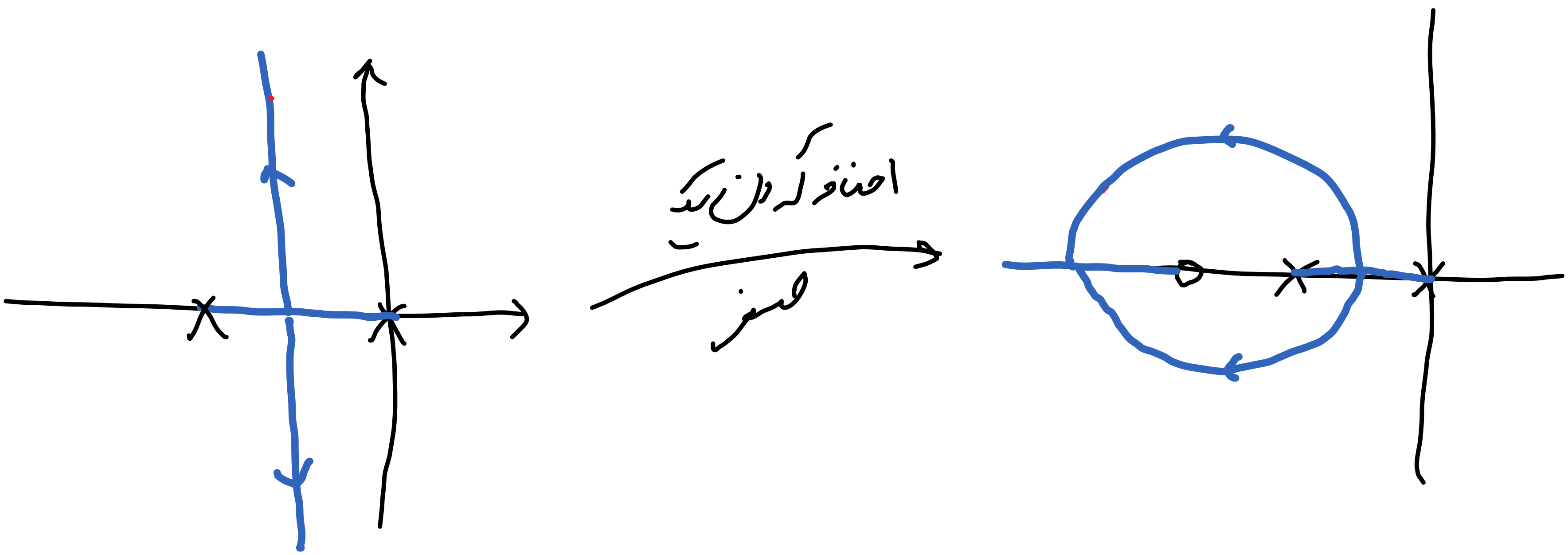
نقطه شکست → $s = -1$

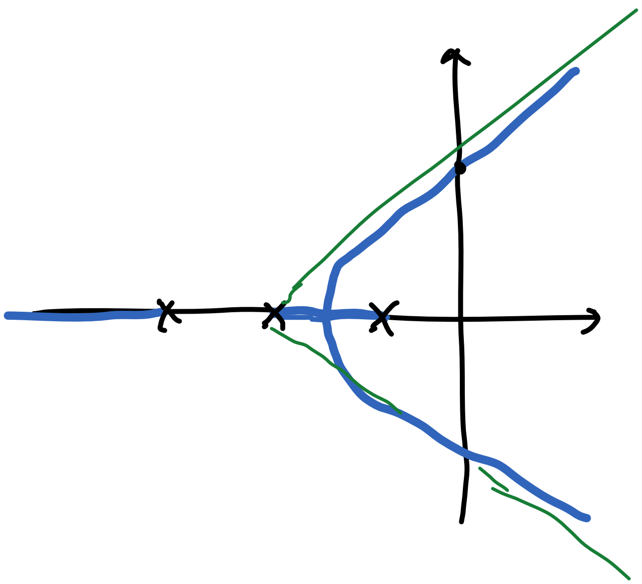

$K(s^2+1)$
$s(s+2)$
+
−


$j\omega$
$j2$
$j1$
$-j1$
$-j2$
-3
-2
-1
0
1
σ

اثر اضافه کردن صفر

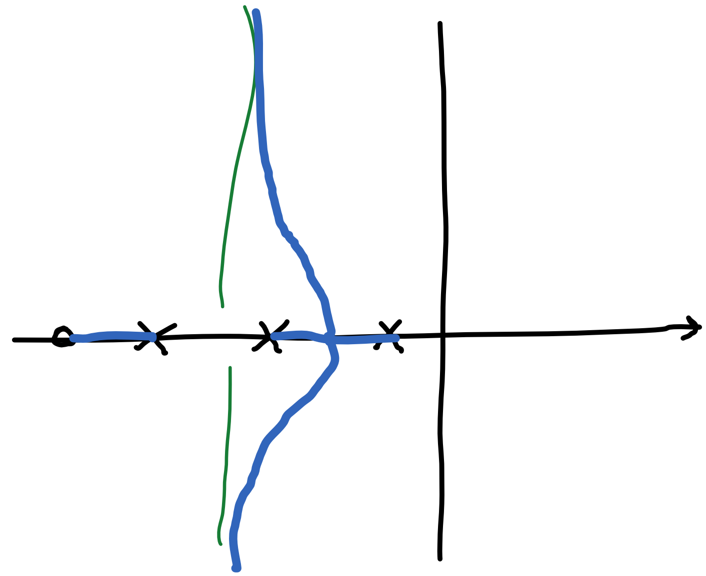






n-m=3

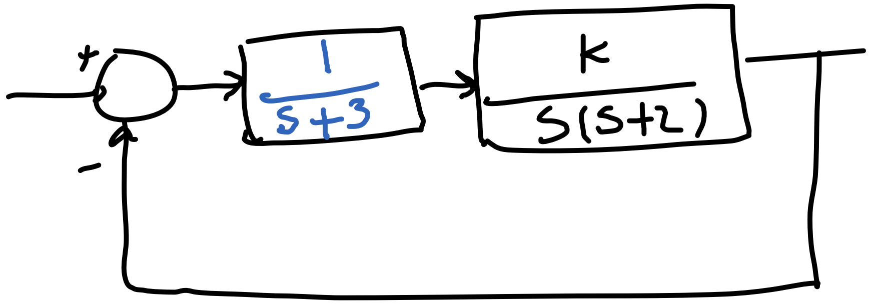
اضافه کردن یک صفر



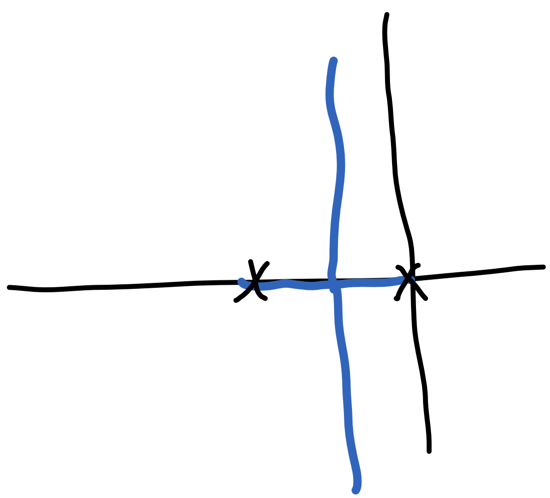
n-m=2

- اضافه کردن صفر باعث متمایل شدن شاخه ها به سمت چپ خواهد شد.
بنابراین باعث افزایش پایداری سیستم می شود.

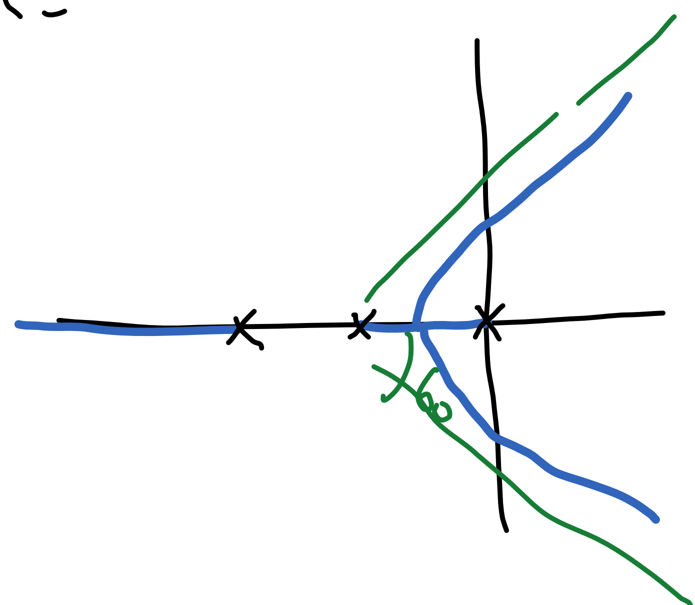
اثر اضافه کردن قطب



با اضافه کردن یک قطب، شاخه‌ها به سمت راست متمایل می‌شوند. نسبت پایداری سیستم کمتر می‌شود.



اضافه کردن یک قطب



کنترلر PID

D I P

کنترلر PID، ترکیبی از کنترلرهای تناسبی، انتگرالی و مشتقی می‌باشد.

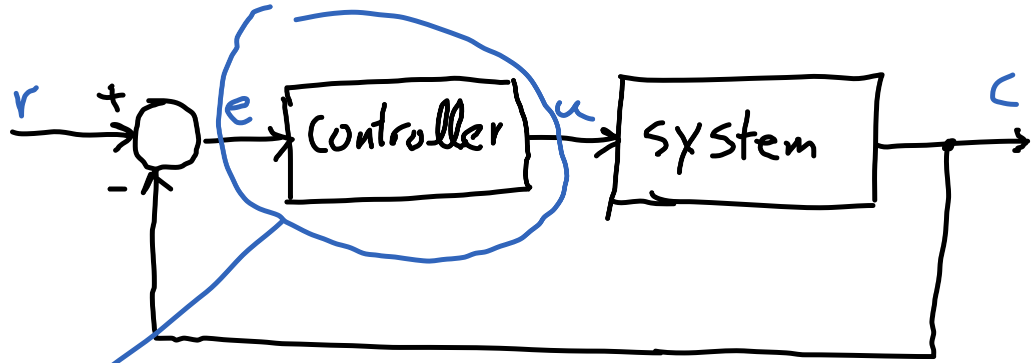
این نوع کنترلر یکی از پرکاربردترین کنترلرها در صنعت و کاربردهای مختلف دیگر می‌باشد

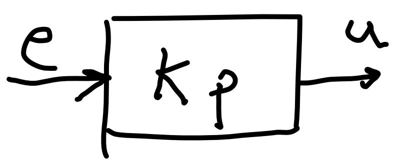
بیش از ۹۰٪ کنترلرها از این نوع می‌باشد.

دلیل استفاده گسترده از آن سادگی و کارایی بالای آن می‌باشد.

$$u = \underbrace{K_p e}_{P} + \underbrace{K_d \dot{e}}_{D} + \underbrace{K_i \int e\,dt}_{I}$$

$$\begin{cases} P \\ PD \\ PI \\ PID \ \ldots \end{cases}$$





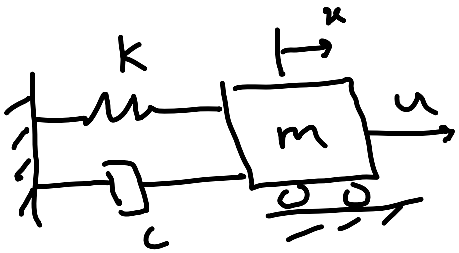
کنترلر تناسبی Proportional Controller

$$u = k_p e \longrightarrow U(s) = k_p E(s)$$

- به صورت تک بهره ساده است و سرعت پاسخ را افزایش می دهد.

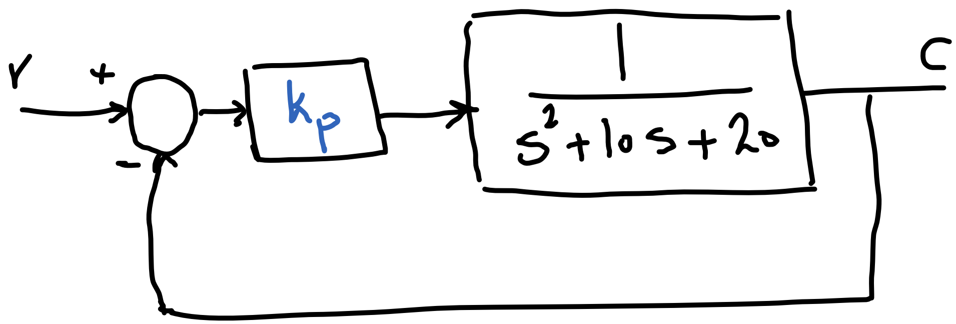
- افزایش بیش از حد k_p ممکن است باعث ناپایداری شود. در بعضی سیستم ها

مثال :



$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2+cs+k}$$

$m=1$, $c=10$, $k=20$

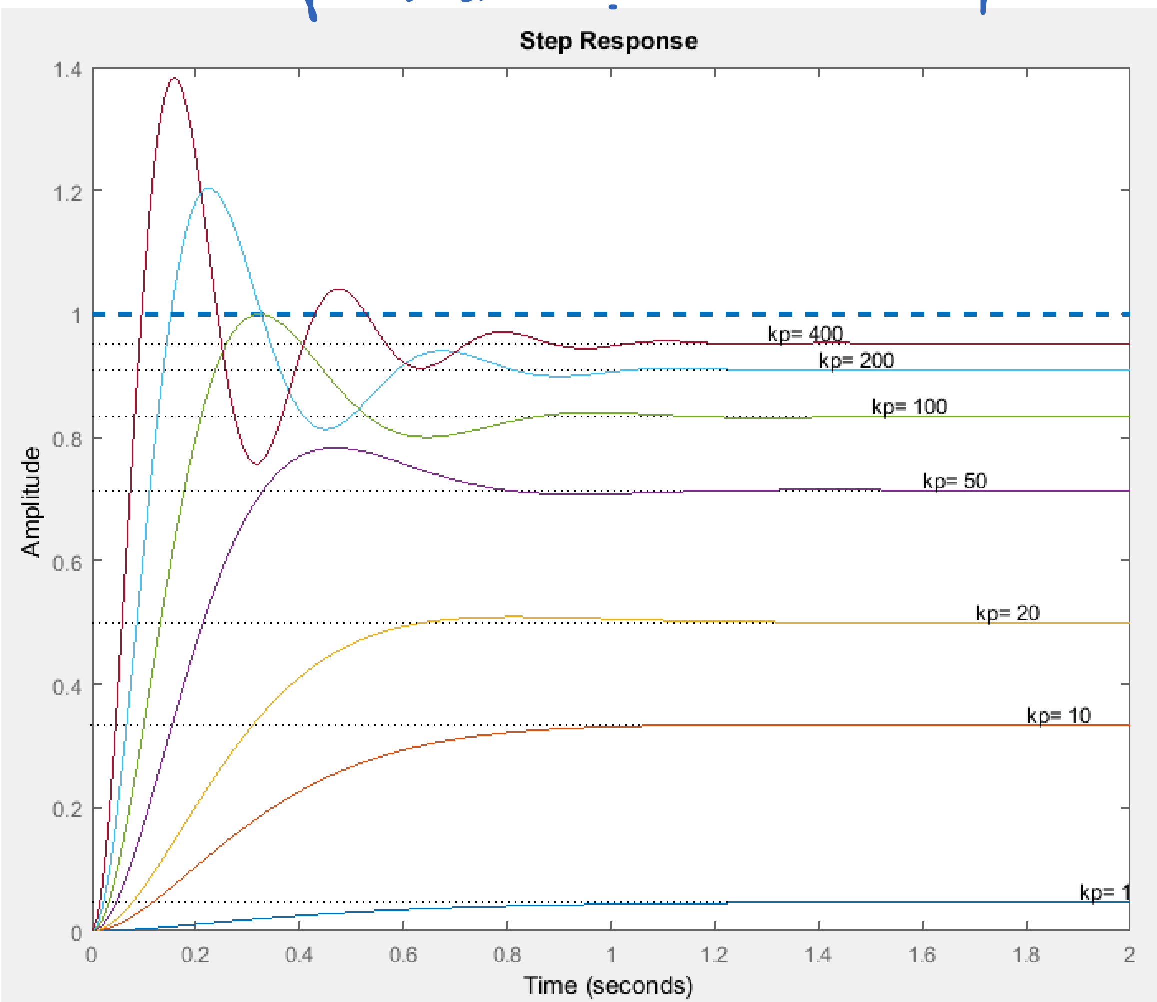


$$\frac{C}{R} = \frac{k_p}{s^2+s+20+k_p}$$

num = kp

den = [1 1 20+kp]

$t_r = 0.1$ مدنظر بود، $\longrightarrow$ $k_p = 300 - 400$



با افزایش $k_p \uparrow$

$t_r \downarrow$ ✓ کاهش زمان صعود

$e_{ss} \downarrow$ ✓

$M_p \uparrow$ ✗

t_s — تغییر چندانی نمی‌کند

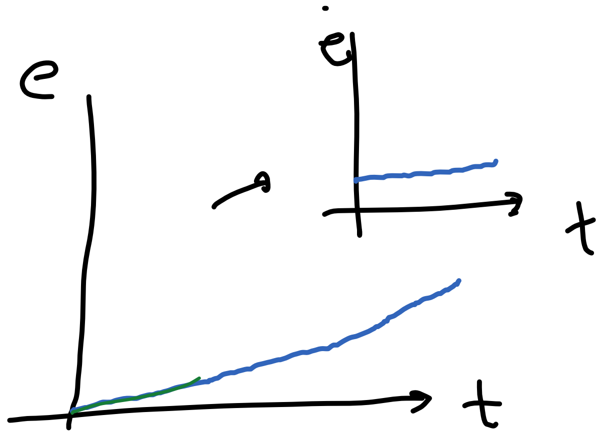
$t_r = 1 \longrightarrow k_p = 20$

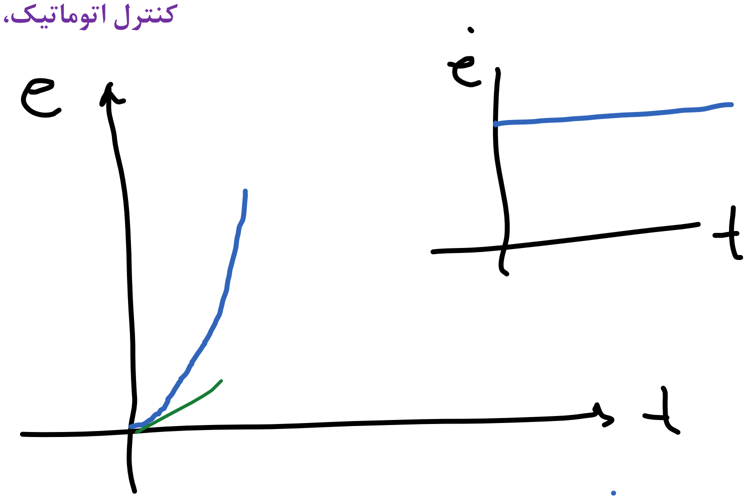
Derivative Controller ، کنترلر مشتق

$u = k_d \dot{e}$ $E \longrightarrow \boxed{k_d s} \longrightarrow U$ $U(s) = k_d s$

$\Rightarrow U(s) = k_d s E$

- در حقیقت یک صفر به سیستم اضافه می‌کند ← افزایش پایداری ← ✓ $M_p \downarrow$
- قبل از بزرگ شدن بیش از حد خطا، اصلاح قابل توجهی اعمال می‌کند ✓
- خطا را پیش‌بینی می‌کند و عمل تصحیح زودهنگام را انجام می‌دهد. ✓
- مشکل اساسی آن این است که به نویز خطا بسیار حساس است. ✗





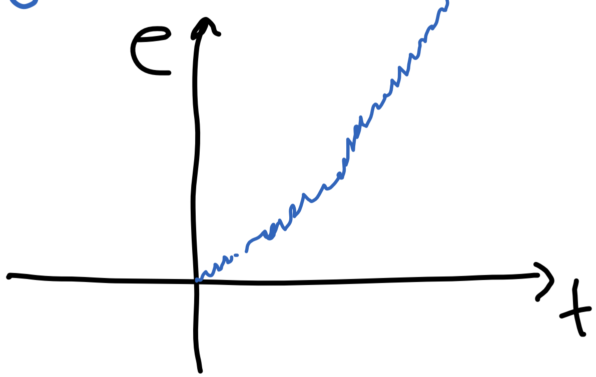
e کوچک

$\dot{e}$ کوچک

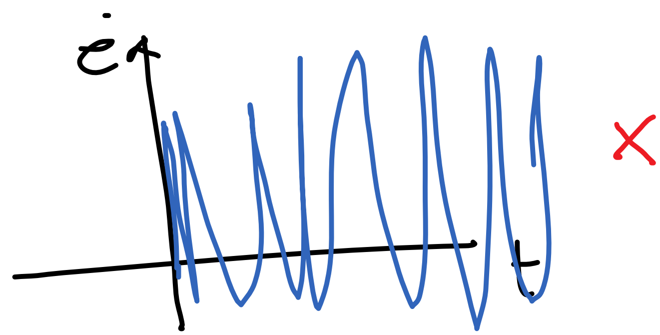
e کوچک

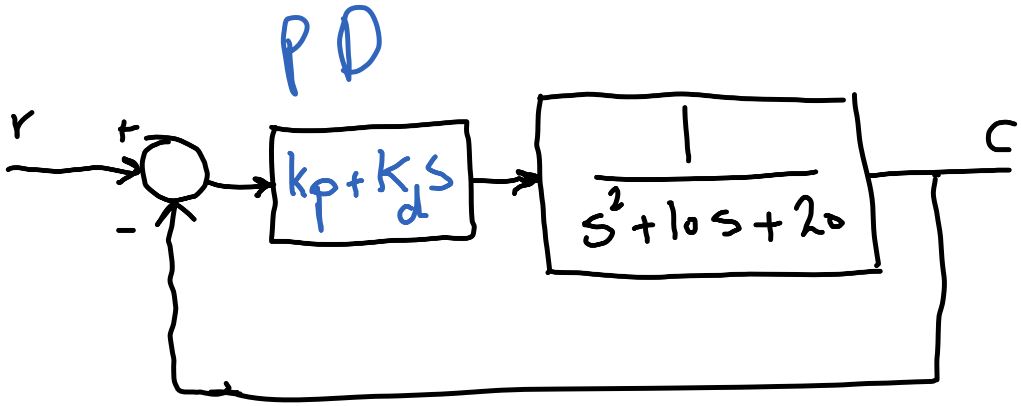
$\dot{e}$ بزرگ

در زمان‌های اولیه

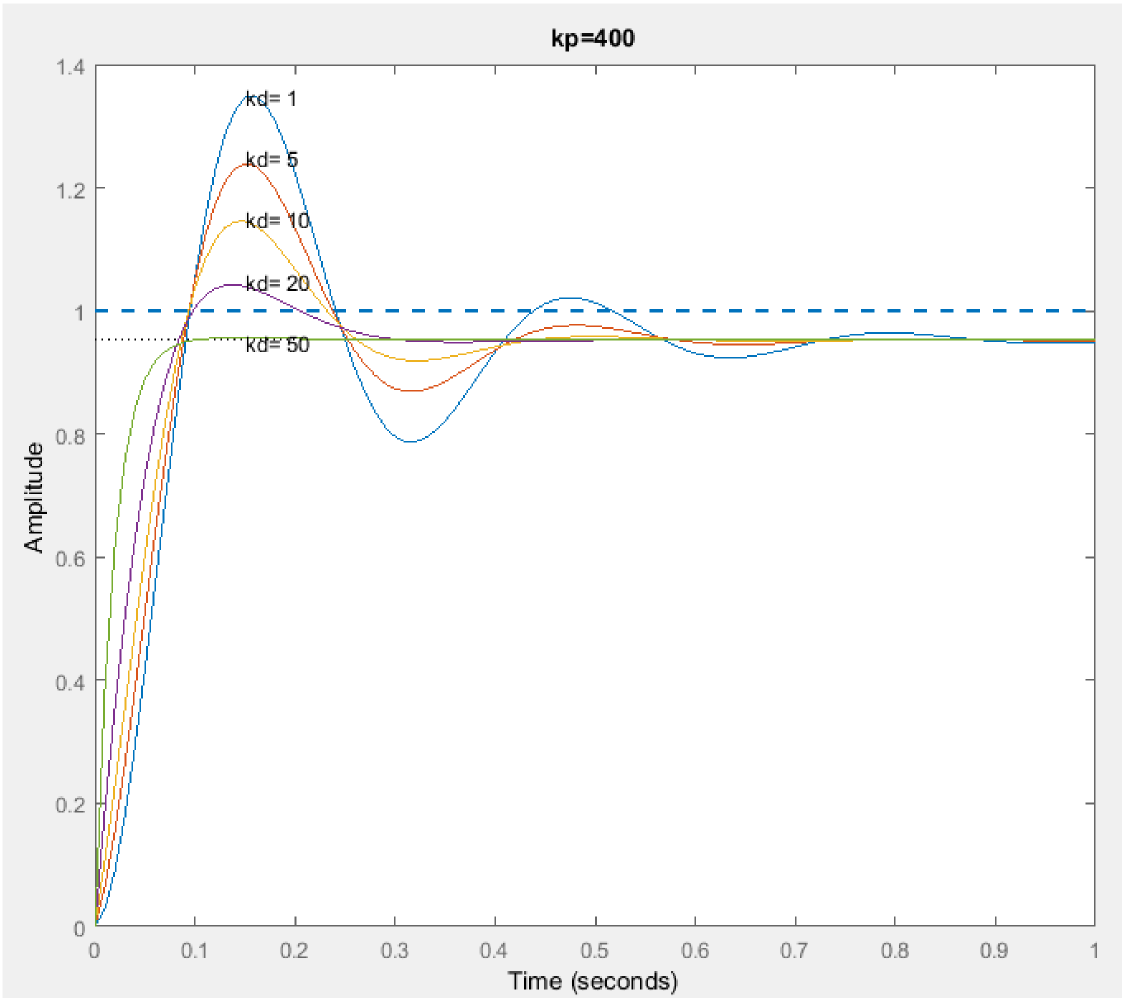


$\Rightarrow$





$$\frac{C}{R} = \frac{K_d s + K_p}{s^2 + (10 + K_d)s + 20 + K_p}$$



$K_d \uparrow$ افزایش

$M_p \downarrow$ ✓

t_r — تغییر چندانی نمی‌دهد

e_{ss} — 〃 〃 〃

$t_s \downarrow$ ✓

کنترلر انتگرالی

$$u = K_i \int e\,dt$$

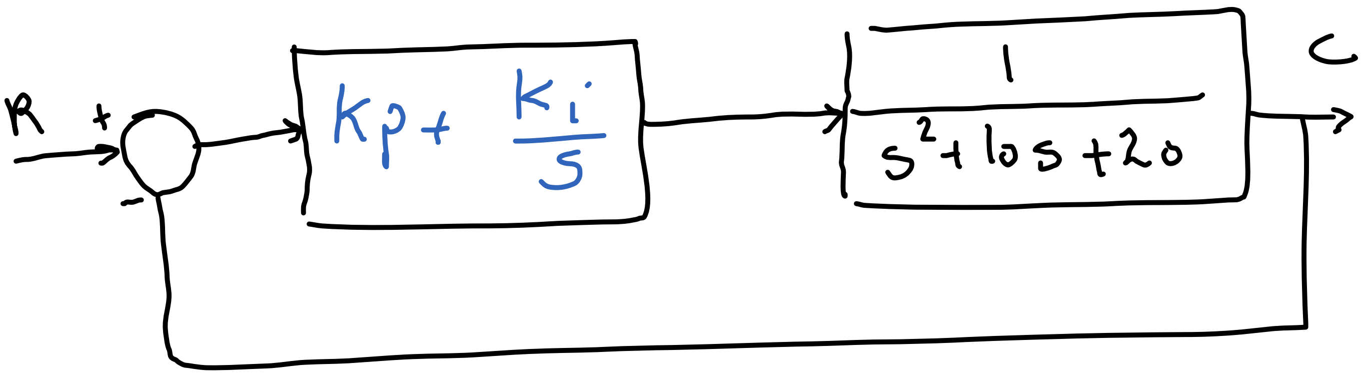
$$U(s) = \frac{K_i E(s)}{s}$$

$$E \longrightarrow \boxed{\frac{K_i}{s}} \longrightarrow U$$

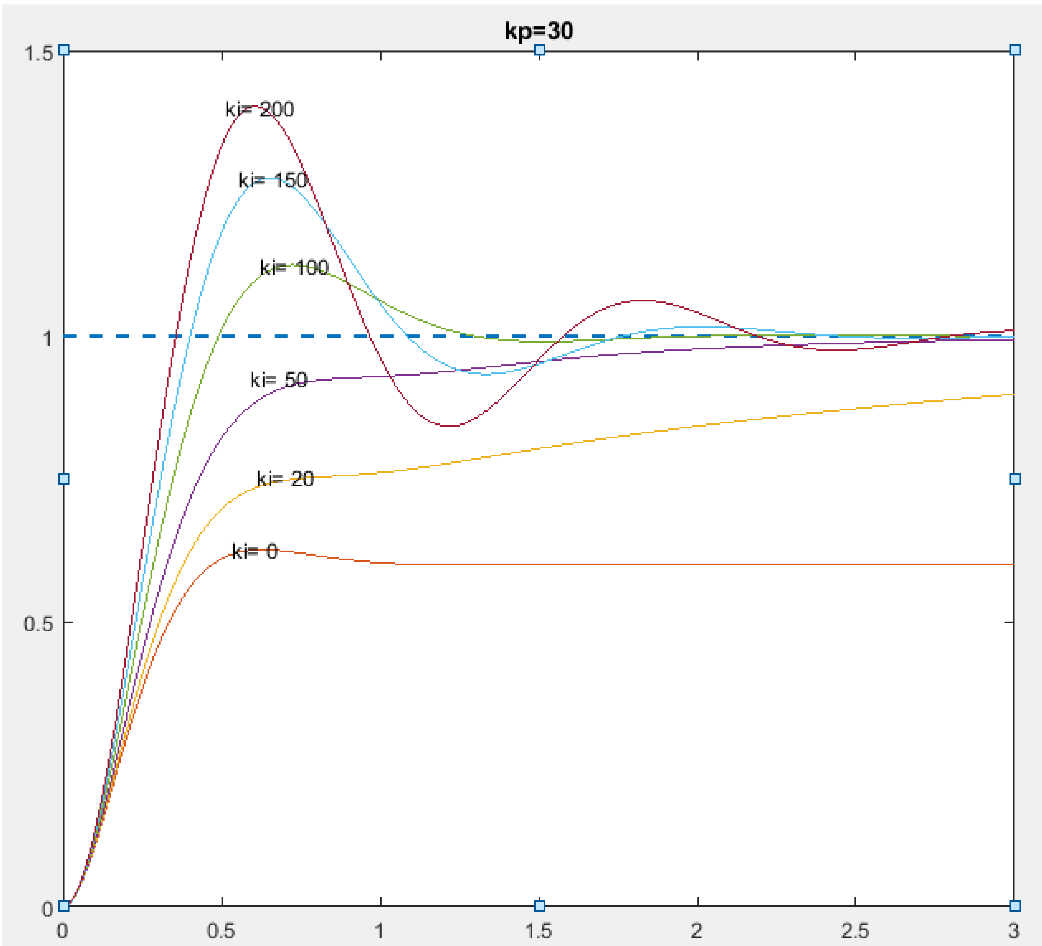
type

- این نوع کنترلر، نوع سیستم را یک واحد افزایش می‌دهد ← کاهش یا حذف e_{ss}
- در حقیقت یک قطب به سیستم اضافه می‌کند. ← کاهش ناپایداری ← $M_p \uparrow$
- نسبت به نویز حساس نیست و آنرا تقریباً از بین می‌برد

PI



$$\frac{C}{R} = \frac{K_p s + K_i}{s^3 + 10 s^2 + (20+K_p)s + K_i}$$



افزایش k_i

$e_{ss} \downarrow$ ✓ یا حذف

$t_r \downarrow$ ✓

$M_p \uparrow$ ✗

$t_s \uparrow$ ✗

تقریباً شبیه k_p

	t_r	M_p	t_s	e_{ss}
K_p	$\downarrow$	$\uparrow$	—	$\downarrow$
K_d	—	$\downarrow$	$\downarrow$	—
K_i	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	حذف $\downarrow$

روند طراحی کنترل PID

۱- اضافه کردن K_p جهت تنظیم t_r

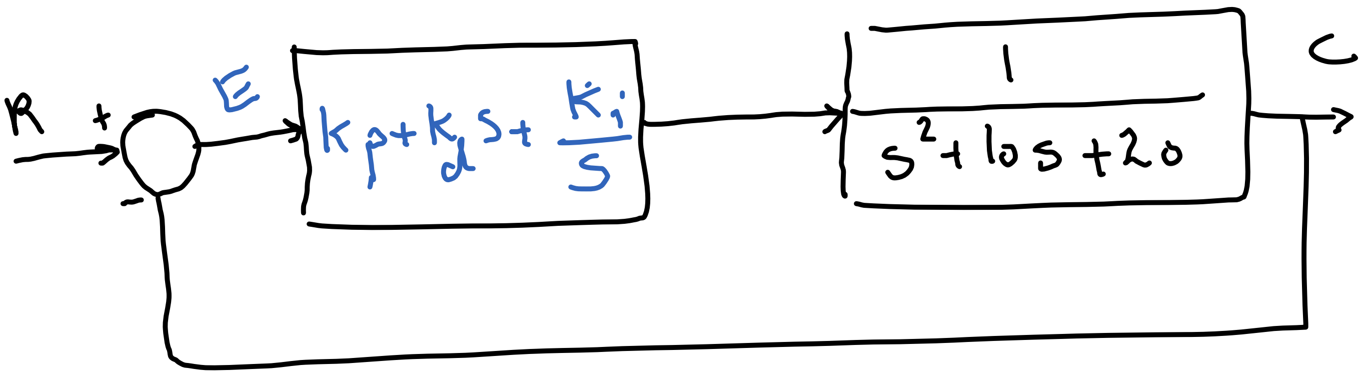
۲- اضافه کردن K_d جهت تنظیم M_p

۳- اضافه کردن K_i جهت کاهش e_{ss}

۴- تنظیم هر سه پارامتر جهت رسیدن به پاسخ مطلوب

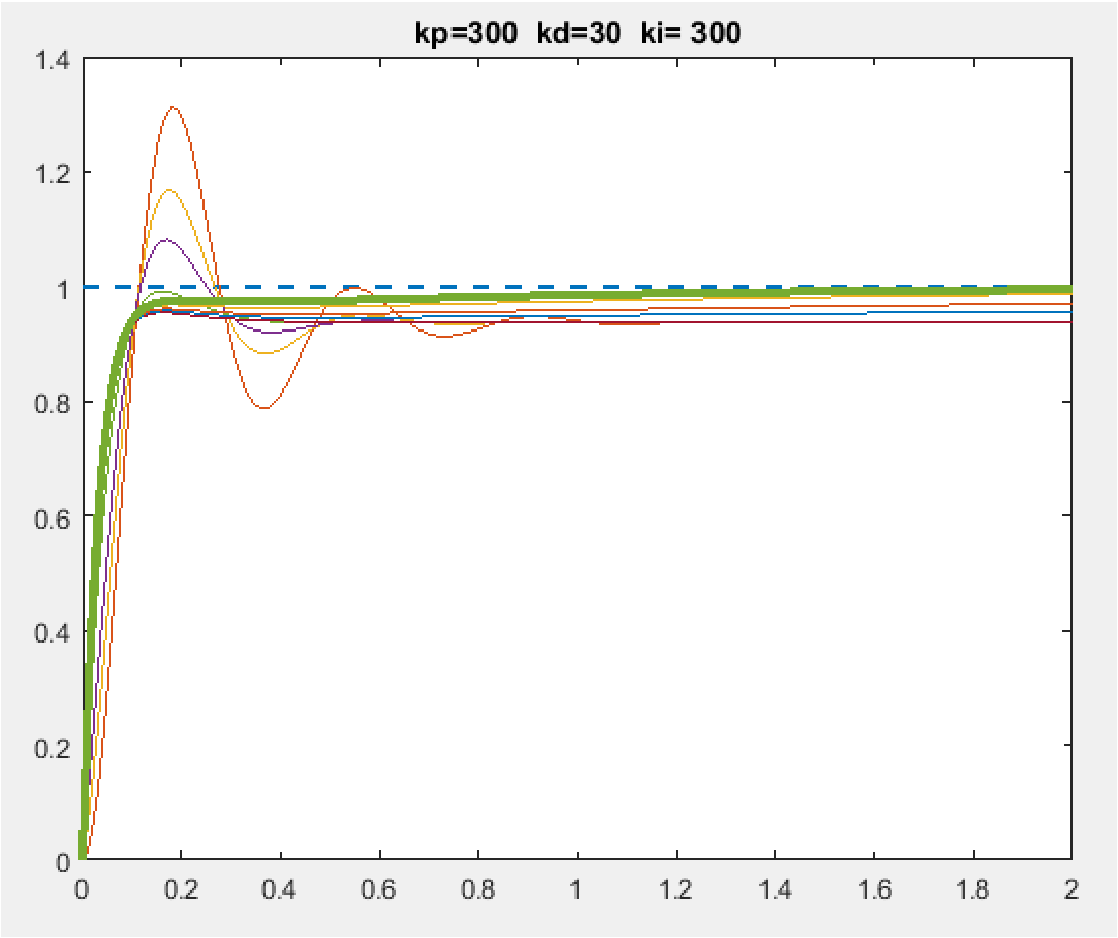
PID

PID



$$U = \left(K_p + K_d s + \frac{K_i}{s}\right) E(s)$$

$$\frac{C}{R} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s^3 + (10 + K_d)s^2 + (20 + K_p)s + K_i}$$


kp=300 kd=30 ki= 300
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

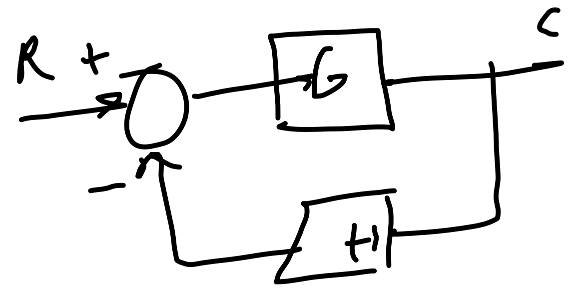
$$U = K_d \frac{N}{1+\frac{N}{s}} = \frac{K_d N}{\frac{s+N}{s}} = (K_d s)\frac{N}{s+N}$$

$$\frac{K_d s}{\frac{s}{N}+1} = \frac{K_d s}{T_f s+1}$$

Filter Coeff. $: T_f$

$$T_f = \frac{1}{N} ,$$

$$d)\ G(s)=\frac{20}{s(s+1)(s+4)},\ H(s)=1+ks$$



$$\frac{C}{R}=\frac{G}{1+GH}=\frac{\frac{20}{s(s+1)(s+4)}}{1+\frac{20(1+ks)}{s(s+1)(s+4)}}$$

$$=\frac{20}{s(s+1)(s+4)+20(1+ks)}$$

$$s(s+1)(s+4)+20+20ks=0$$

$$s(s+1)(s+4) + 20 + 20Ks = 0$$

$$1 + KF(s) \longrightarrow 1 + \frac{20Ks}{s(s+1)(s+4)+20} = 0$$

$z_1 = 0$

$P_i \longrightarrow s(s^2+5s+4)+20 = s^3+5s^2+4s+20 = 0$

$P_1 =$

$P_2 =$

$P_3 =$