کنترل مدرن

فیدبک حالت بهینه LQR

دکتر امین نیکوبین
دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک
anikoobin@semnan.ac.ir

Linear quadratic Regulator کنترل فیدبک حالت بهینه

(LQR)

تنظیم کننده خطی بهینه با شاخص عملکردی مربعی

optimal linear regulator for a quadratic performance index

روش جایابی قطب معیار مشخصه خاصی را برای جایابی قطب‌ها بهینه نمی‌کند

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته $P_d(s) = \checkmark \longrightarrow K$

کنترلر LQR شاخص عملکرد زیر را بهینه می‌کند:

$$J = \int_0^\infty \left[\Delta x^T(t)\, Q\, \Delta x(t) + \Delta u^T(t)\, R\, \Delta u(t) \right] dt$$

K به نحوی حاصل می‌شود که J را کمینه کند

$$\Delta x^T Q \Delta x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ & & & \\ q_{n1} & \cdots & & q_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

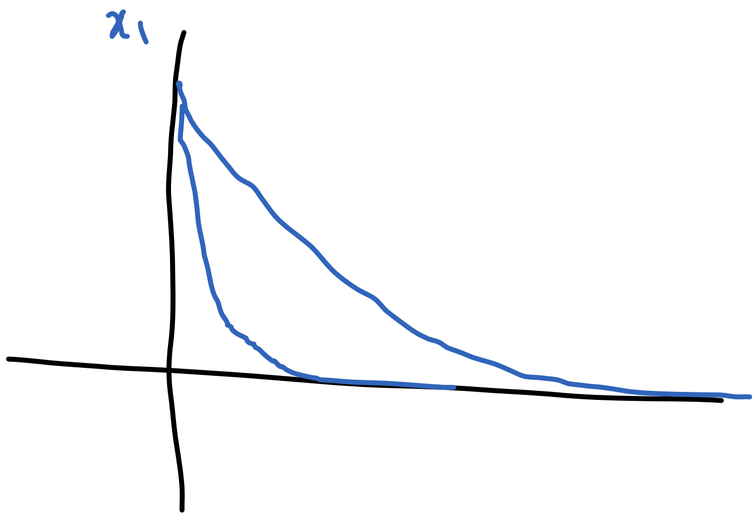
$Q \geq 0$ یک ماتریس نیمه مثبت معین

مثلا $Q = \begin{bmatrix} q_1 & & 0 \\ & q_2 & \\ 0 & & \ddots \; q_n \end{bmatrix} \rightarrow J_1 = \int_0^\infty x^T Q x \, dt = \quad , \; q_i \geq 0$

$$J_1 = \int_0^\infty \left(q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \cdots + q_n x_n^2 \right) dt$$

$x_1 \rightarrow \Delta x_1 , \quad x_2 \rightarrow \Delta x_2$

با کمینه کردن J_1 خطای پاسخ را کاهش می‌دهیم یعنی با این سرعت پاسخ را افزایش می‌دهیم



Q ، مانند [illegible]، ماتریس وزنی

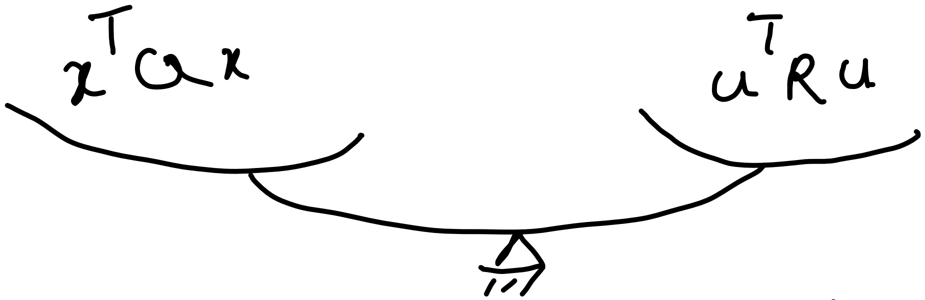
لزوماً قطری نیست

$$J_2 = \int_0^\infty u^T R u \, dt \, , \qquad R = \begin{bmatrix} r_1 & & & 0 \\ & r_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & r_n \end{bmatrix}$$

تلاش کنترلی را کمینه می‌کند.

$\underset{r \times r}{R} > 0$ مثبت معین

$$u^T R u = r_1 u_1^2 + r_2 u_2^2 + \dots + r_n u_n^2$$



- پاسخ سریعتر مستلزم تلاش کنترلی بیشتر است

- تلاش کنترلی کمتر ← سرعت پاسخ کمتر خواهد، خطا افزایش خواهد داشت.

با تنظیم ماتریس های R و Q به راحتی می توان به پاسخ مطلوب رسید

R و Q ← مثل پیچ های تنظیم پاسخ هستند.

معادله ماتریسی لیاپانوف

سیستم خطی $\dot{x}=Ax+Bu$ و کنترل فیدبک $u=-Kx$ را در نظر بگیرید

$$\dot{x}=(A-BK)x = A_{cl}x$$

$$J=\int_0^\infty (x^TQx+u^TRu)\,dt = \int_0^\infty (x^TQx + x^TK^TRKx)\,dt$$

$$=\int_0^\infty x^T(\underbrace{Q+K^TRK}_{S})x\,dt = \int_0^\infty x^TSx\,dt$$

برای سیستم حلقه بسته $A_{cl}=A-BK$، $(\dot{x}=A_{cl}x)$

K را به نحوی به دست آوریم که سیستم پایدار داخلی شود و J هم کمینه شود

$$Q+K^TRK=S$$

قضیه: معادله ماتریسی لیاپانوف:

$Q+K^TRK$ $\qquad$ $A-BK$

فرض کنید سیستم A پایدار داخلی باشد و S یک ماتریس متقارن، مثبت معین یا نیمه مثبت معین باشد. در این صورت به ازای شرایط اولیه $x(0)=x_0$ داریم

$$J=\int_0^\infty x^T S x \, dt = x_0^T P x_0$$

که در آن P از معادله ماتریسی لیاپانوف زیر محاسبه می شود

$$A^T P + P A = -S$$

$$\dot{x} = Ax \Rightarrow x(t) = e^{At} x_0$$

$$\Rightarrow J = \int_0^\infty x^T S x \, dt = \int_0^\infty x_0^T e^{A^T t} S e^{At} x_0 \, dt$$

$$= x_0^T \underbrace{\left[\int_0^\infty e^{A^T t} S e^{At} \, dt \right]}_{P} x_0 = x_0^T P x_0$$

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} S e^{At} \, dt$$

- ماتریس P یک ماتریس متقارن است

$$P^T = P$$

- ماتریس $P \geq 0$

$$x_0^T P x_0 = \int_0^\infty x^T \underset{S \geq 0}{S} x \, dt \geq 0$$

$$A^T P + PA = \int_0^\infty \left(A^T e^{A^T t} S e^{At} + e^{A^T t} S e^{At} A \right) dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left(e^{A^T t} S e^{At} \right) dt \quad , \quad A e^{At} = e^{At} A$$

$$= \left[e^{A^T t} S e^{At} \right]_0^\infty = 0 - S = -S$$

$$\Rightarrow A^T P + PA = -S$$

طراحی کنترلر LQR

سیستم $\dot{x} = Ax + Bu$ را با شرایط اولیه $x(0) = x_0$ در نظر بگیرید.

می‌خواهیم کنترل فیدبک حالت $u = -Kx$ را به گونه‌ای طراحی کنیم که معیار عملکرد زیر کمینه شود.

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)\, dt$$

که در آن R و Q ماتریس‌های متقارن و $R > 0$ و $Q \geq 0$ می‌باشند.

پس معادله سیستم حلقه بسته و معیار عملکرد به صورت زیر خواهد شد.

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad , \quad J = \int_0^\infty x^T (Q + K^T R K) x \, dt$$

* برای اینکه ماتریس بهینه پایدار کننده K، معیار J را به ازای همه شرایط اولیه x_0 کمینه کند باید در معادله زیر صدق کند

$$\underline{K = R^{-1} B^T P}$$

که در آن P در معادله ماتریسی ریکاتی زیر صدق می کند

Riccati

$$A^T P + PA - \underline{PBR^{-1}B^TP} + Q = 0$$

از صفحه قبلی دانستیم که

$$J(K) = \int_0^\infty x^T \overbrace{(Q + K^T R K)}^{S} x \, dt = x_0^T P x_0$$

که P در معادله ماتریسی لیاپانوف زیر صدق می‌کند

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K)$$

برای اثبات قضیه از حساب تغییرات استفاده می‌کنیم. فرض کنید کنترل کننده بهینه K^* معیار عملکرد J را کمینه می‌کند و ماتریس P متناظر با K^* را P^* می‌نامیم، پس داریم

$$(A - BK^*)^T P^* + P^*(A - BK^*) = -(Q + K^{*T} R K^*)$$

حال فرض کنید بهره کنترل را قدری مغشوش کنیم

$$K = K^* + \varepsilon \delta K$$

بنابراین تغییر ماتریس P^* نیز به صورت زیر تغییر خواهد کرد

$$P = P^* + \varepsilon \delta P_1 + \varepsilon^2 \delta P_2 + \cdots$$

حال معادله لیاپانوف را مجدداً بازنویسی می‌کنیم:

$$(A - BK^* - \varepsilon B \delta K)^T (P^* + \varepsilon \delta P_1 + \varepsilon^2 \delta P_2) + (P^* + \varepsilon \delta P_1 + \varepsilon^2 \delta P_2)(A - BK^* - \varepsilon B \delta K)$$

$$= -(Q + (K^* + \varepsilon \delta K)^T R (K^* + \varepsilon \delta K)$$

با دسته‌بندی درجات مختلف ε داریم

$$O(\varepsilon^0):\ (A-BK^*)^T P^* + P^*(A-BK^*) = -(Q+K^{*T}RK^*)$$

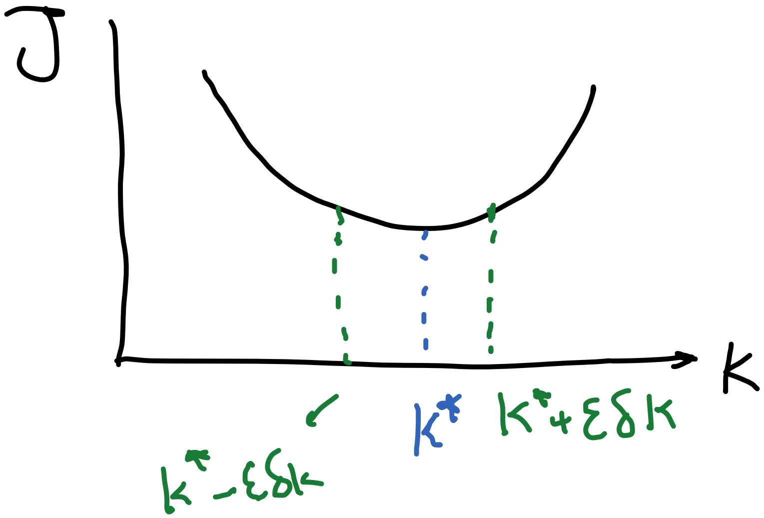
$$O(\varepsilon^1):\ \delta K^T(B^TP^* - RK^*) + (P^*B - K^{*T}R)\delta K + (A-BK^*)^T\delta P_1 + \delta P_1(A-BK^*) = 0$$

از طرفی داریم

$$J(K) = x_0^T P x_0 \Rightarrow J(K^*+\delta K) = \underbrace{x_0^T P^* x_0} + \underbrace{\varepsilon x_0^T \delta P_1 x_0 + \varepsilon^2 x_0^T \delta P_2 x_0} + \cdots$$

K^* شاخص عملکرد $x_0^T P^* x_0$ را کمینه می‌کند پس

$$\forall x_0:\ \varepsilon x_0^T \delta P_1 x_0 + \varepsilon^2 x_0^T \delta P_2 x_0 + \cdots \geq 0 \Rightarrow \varepsilon x_0^T \delta P_1 x_0 \geq 0 \quad \forall x_0$$



پس نتیجه می‌گیریم $\delta P_1 = 0$

$$\varepsilon x_0^T \delta P_1 x_0 \geq 0$$

ε دلخواه، ε را منفی کنیم

منفی

$$\varepsilon x_0^T \delta P_1 x_0 < 0$$

$$\delta k^T (B^T P^* - RK^*) + (P^* B - K^{*T} R)\delta K + \cancel{(A - BK^*)^T \delta P_1} + \cancel{\delta P_1 (A - BK^*)} = 0$$

$$\Rightarrow \delta k^T (B^T P^* - RK^*) + (P^* B - K^{*T} R)\delta K = 0$$

$$\delta K^T (B^T P^* - RK^*) + (P^* B - K^{*T} R)\, \delta K = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\delta K^T (B^T P^* - RK^*)}_{W} + \left[\delta K^T (B^T P^* - RK^*) \right]^T = 0$$

$$W + W^T = 0$$

به ازای هر δK تا به معادله بالا برقرار باشد

$$B^T P^* - RK^* = 0 \Rightarrow RK^* = B^T P^* \Rightarrow \boxed{K^* = R^{-1} B^T P^*}$$

$$R > 0$$

$$K^* = R^{-1} B^T P^*$$

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K)$$

$$\Rightarrow (A - BR^{-1}B^T P)^T P + P(A - BR^{-1}B^T P) = -(Q + P^T B R^{-T} \underbrace{R R^{-1}}_{I} B^T P^*)$$

$$R = R^T,$$

$$\Rightarrow \boxed{A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0}$$

$\underbrace{A , B}_{Sys}$ ، $\underbrace{R , Q}_{J}$ ، K ماتریس

$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \longleftarrow$ با حل معادله ریکاتی

چون یک معادله غیرخطی است ، چندین جواب دارد. $\longrightarrow$ P مثبت معین

اثبات می شود که معادله ریکاتی تنها یک جواب مثبت معین دارد.

- جواب مثبت معین معادله ریکاتی را محاسبه کنیم. $\longrightarrow$ P

$K = R^{-1} B^T P$

مثال: کنترل کننده LQR برای سیستم زیر طراحی کنید

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

با درنظر داشتن شاخص عملکرد زیر $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R = \rho > 0$

1- A, B ← کنترل پذیر یا حداقل پایدارپذیر باشد.

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Rank}(\mathcal{C}) = 2 \quad \checkmark$$

$$J = \int_0^\infty (x_1^2 + \rho u^2)\, dt$$

حل معادله ریکاتی

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} p_{12}^2 + 1 = 0 \\ 2p_{12} - \frac{1}{\rho} p_{22}^2 = 0 \\ p_{11} - \frac{1}{\rho} p_{11} p_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\,\rho^{\frac{1}{4}} & \rho^{\frac{1}{2}} \\ \rho^{\frac{1}{2}} & \sqrt{2}\,\rho^{3/4} \end{bmatrix}$$

چک شود که P مثبت معین باشد

$$\det(P) > 0$$

$$K = R^{-1}B^T P = \begin{bmatrix} \rho^{-\frac{1}{2}} & \sqrt{2}\,\rho^{-\frac{1}{4}} \end{bmatrix}$$

مثال: بهره فیدبک حالت را برای سیستم موتور DC به طوری به دست آورید که

مشخصه تنظیم به $\theta = \theta_d$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.4 \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} v$$

شاخص عملکرد زیر را کمینه کند

$$J = \int_0^\infty \left(Q_{11} \Delta\theta + Q_{22} \Delta\omega + v^2 \right) dt$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

$$x^* = \begin{bmatrix} \theta^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.4 \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} v$$

$$u^* = v^* = 0$$

$$\omega^* = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.4 \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^* \\ \omega^* \\ i^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} v^* \Rightarrow 4.4 i^* = 0 \rightarrow i^* = 0$$

$$-12\omega^* - 24 i^* = 20 v^*$$

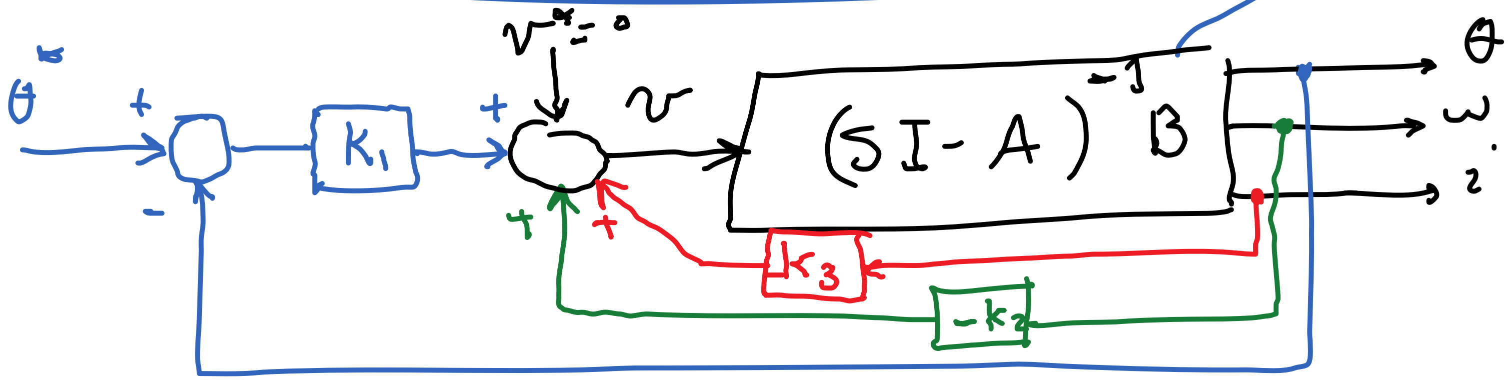
$$\rightarrow v^* = 0$$

$$v = v^* - K\Delta x = 0 - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta-\theta^* \\ \omega - \cancel{\omega^*} \\ i - \cancel{i^*}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = -k_1(\theta-\theta^*) - k_2\omega - k_3 i}$$

MATLAB

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Ix + Du\end{aligned}}$$



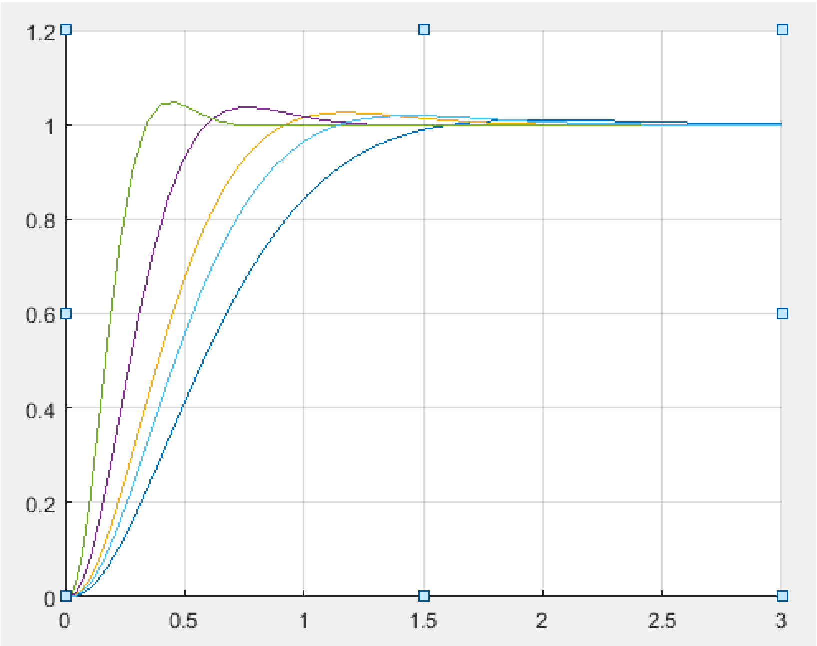
$$Q_{22} = 0, \qquad Q_{11} = 4, 9, 20$$

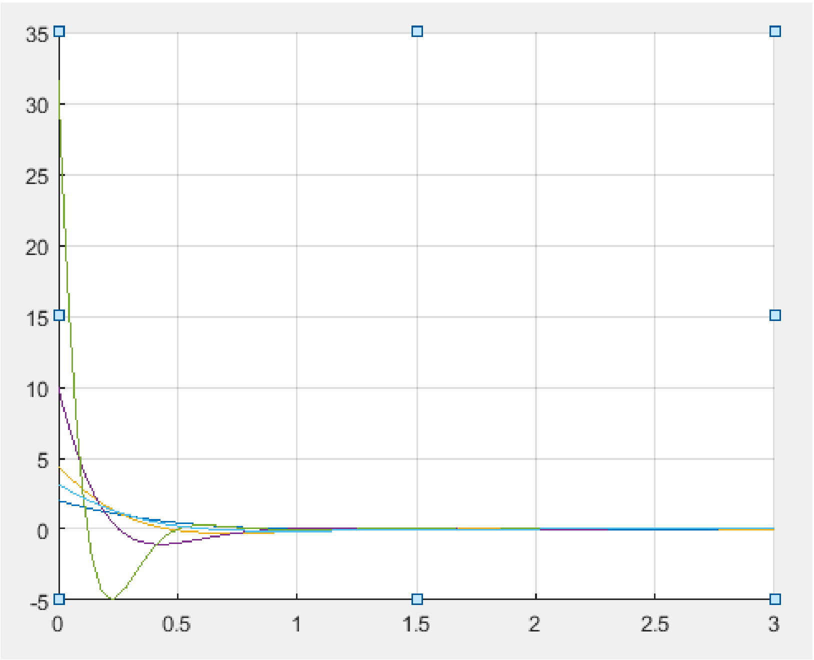
$$J = \int_0^\infty \left(Q_{11}\,\Delta\theta^2 + v^2\right)$$

$Q_{11} = 4 \longrightarrow Q_{11} = 10$

$4\,\Delta\theta^2 + v$

$10\,\Delta\theta^2 + v$


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


35
30
25
20
15
10
5
0
-5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

انتخاب اولیه

انتخاب ماتریس وزنی مناسب

$$Q = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{x_{1max}}\right)^2 & & \\ & \left(\frac{1}{x_{2max}}\right)^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$\text{Rad} \leftarrow x_1$

$\text{Rad/s} \leftarrow x_2$

$\text{mili Amp} \leftarrow x_3$

پارامترها را دارای ابعاد یکسان کنید

$$R = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{u_{1max}}\right)^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \left(\frac{1}{u_{rmax}}\right)^2 \end{bmatrix}$$