کنترل مدرن

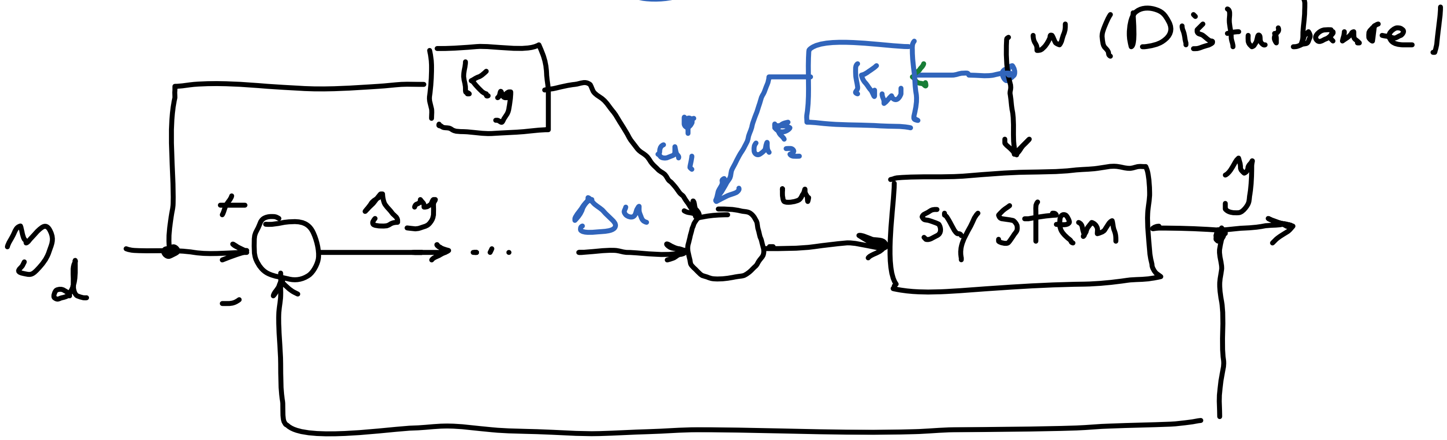
رفع اغتشاش، Disturbance Rejection

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

رفع اغتشاش و ورودی مرجع ثابت (با اندازه‌گیری اغتشاش)



در این ساختار نیاز است که اغتشاش وارد شده به سیستم را اندازه بگیریم

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w = Ax + \left[B \;\vdots\; \Gamma\right]\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \\ \Delta y = Cx - y_d \end{cases}$$

حالت ماندگار داریم

$$\dot{x} = 0$$

$$\Delta y \to 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} Ax^* + Bu^* = -\Gamma w^* \\ Cx^* = y_d \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^* \\ u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Gamma w^* \\ y_d \end{bmatrix}$$

سوال این است درستی معادله جوابیم

$$u^* = u_1^* + u_2^* = K_y y_d + K_w w^*$$

مثال: برای سیستم موتور DC، با فرض اعمال اغتشاش به صورت گشتاور ورودی پله به صورت $T_L = T_{LS}\, u(t)$ ، یک کنترلر LQR طراحی کنید که تابع عملکرد زیر کمینه شود

$$J = \int_0^\infty \left[q(\theta - \theta_d)^2 + (v - v_s)^2 \right] dt$$

و همچنین u^* را به نحوی تعیین کنید که اغتشاش وارد بر سیستم را حذف نماید.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.4 \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ -7.4 \\ 0 \end{bmatrix} T_L$$

دیاگرام بلوکی سیستم کنترلی را رسم کرده و شبیه‌سازی کنید.

$$\begin{bmatrix}\dot\theta\\ \dot\omega\\ \dot i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&4.4\\0&-12&-24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\20\end{bmatrix}v+\begin{bmatrix}0\\-7.4\\0\end{bmatrix}T_L$$

$$\begin{aligned}\dot\theta&=0\\ \dot\omega&=0\\ \dot i&=0\end{aligned}\implies\begin{cases}\omega^*=0\\ 4.4\,i^*-7.4\,T_L=0\\ \underbrace{-12\omega^*}_{0}-24\,i^*+20\,v^*=0\end{cases}$$

$$\implies i^*=i_s=\frac{7.4}{4.4}T_L=1.68\,T_L$$

$$\implies v^*=v_s=\frac{24}{20}i^*=1.2\,i^*$$

$$\implies v^*=1.2\times1.68\,T_L=2\,T_L$$

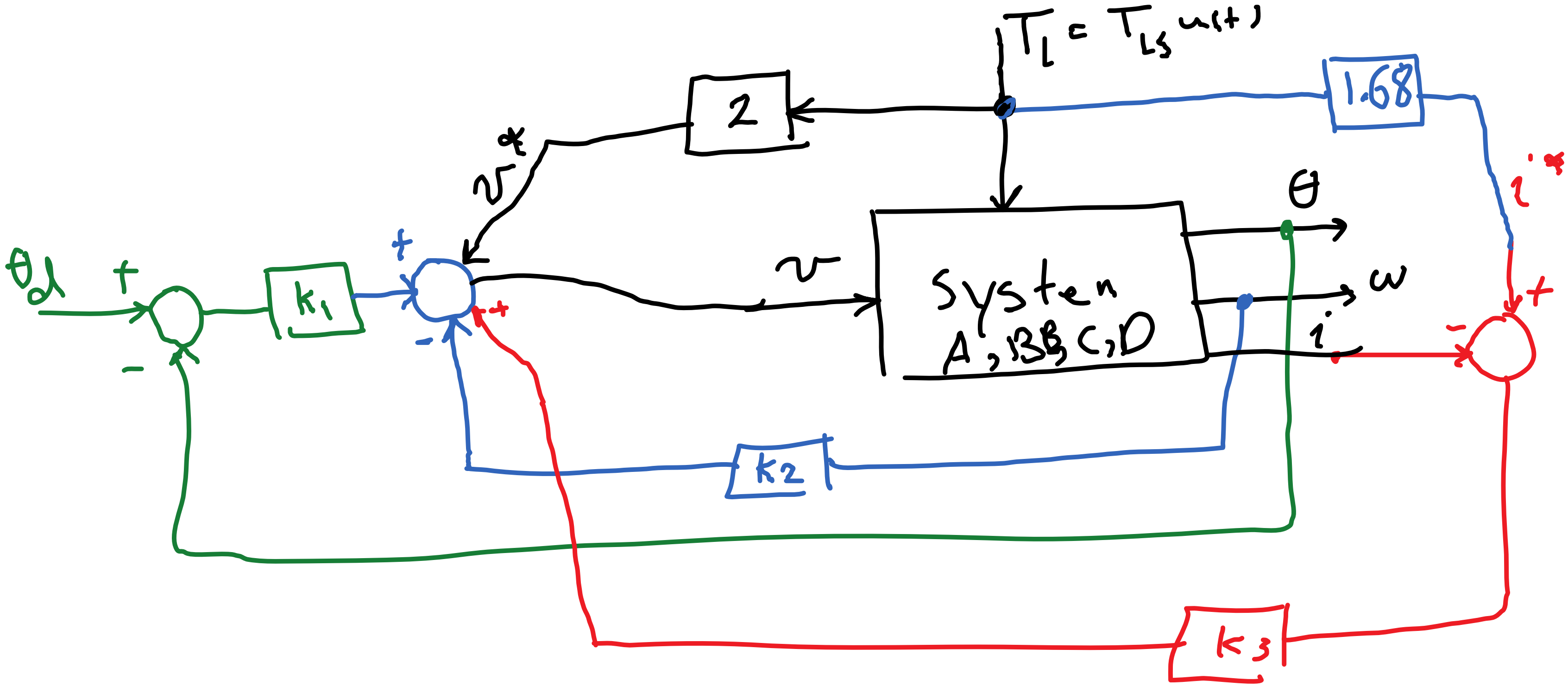
$$\Delta v = -K\Delta x = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta - \theta_d \\ \omega \\ i - i^* \end{bmatrix}$$

$$\Delta v = v - v^* = -k_1(\theta - \theta_d) - k_2\omega - k_3(i - i^*)$$

$$\Rightarrow v = v^* - k_1(\theta - \theta_d) - k_2\omega - k_3(i - i^*)$$

$$\Rightarrow v = 2T_L - k_1(\theta - \theta_d) - k_2\omega - k_3 i + k_3 \times 1.68\, T_L$$

$$\Rightarrow v = \underbrace{2T_L + k_3 \times 1.68\, T_L}_{v^*} - k_1(\theta - \theta_d) - k_2\omega - k_3 i$$



$$BB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -7.4 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}$$

فیدبک انتگرال حالت:

سیستم کنترل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w & (1) \\ y = Cx \end{cases}$$

حالت انتگرالی z را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(2)\quad \dot{z} = y - y_d = Cx - y_d$$

بدین سیستم جدید به صورت زیر می‌شود

$$\begin{matrix} (1) \rightarrow \\ (2) \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}}^{\bar{A}} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}^{\bar{B}} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} y_d + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} w$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

هدف تعیین u به گونه‌ای که این سیستم پایدار شود.

خطاهای حالت ماندگار حذف می‌شود

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow y \rightarrow y_d$$

شرط لازم و کافی جهت وجود سیگنال کنترلی که این سیستم را پایدار کند این است که سیستم زیر $(\bar{A}, \bar{B})$ کنترل پذیر باشد

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{(n-1)}\bar{B} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:cccc} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n}B \\ 0 & CB & CAB & & CA^{n-1}B \end{array}\right]$$

بالتعریف $\Phi_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ داریم

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & A\Phi_c \\ 0 & C\Phi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & A \\ 0 & C \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Phi_c \end{bmatrix}}_{\text{Full Rank}}$$

چون A و B کنترل پذیر است، Φ_c مرتبه کامل دارد. پس برای اینکه ماتریس $\mathcal{C}$ دارای رنک کامل باشد، لازم است، ماتریس $\begin{bmatrix} B & A \\ 0 & C \end{bmatrix} \leftarrow$ Full Rank

$$u = u_f - \begin{bmatrix} K_x & K_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}, \quad u_f = K_w w + K_y y_d$$

$\longrightarrow$ feed forward term

$$u = u_f - K_x x - K_z z$$

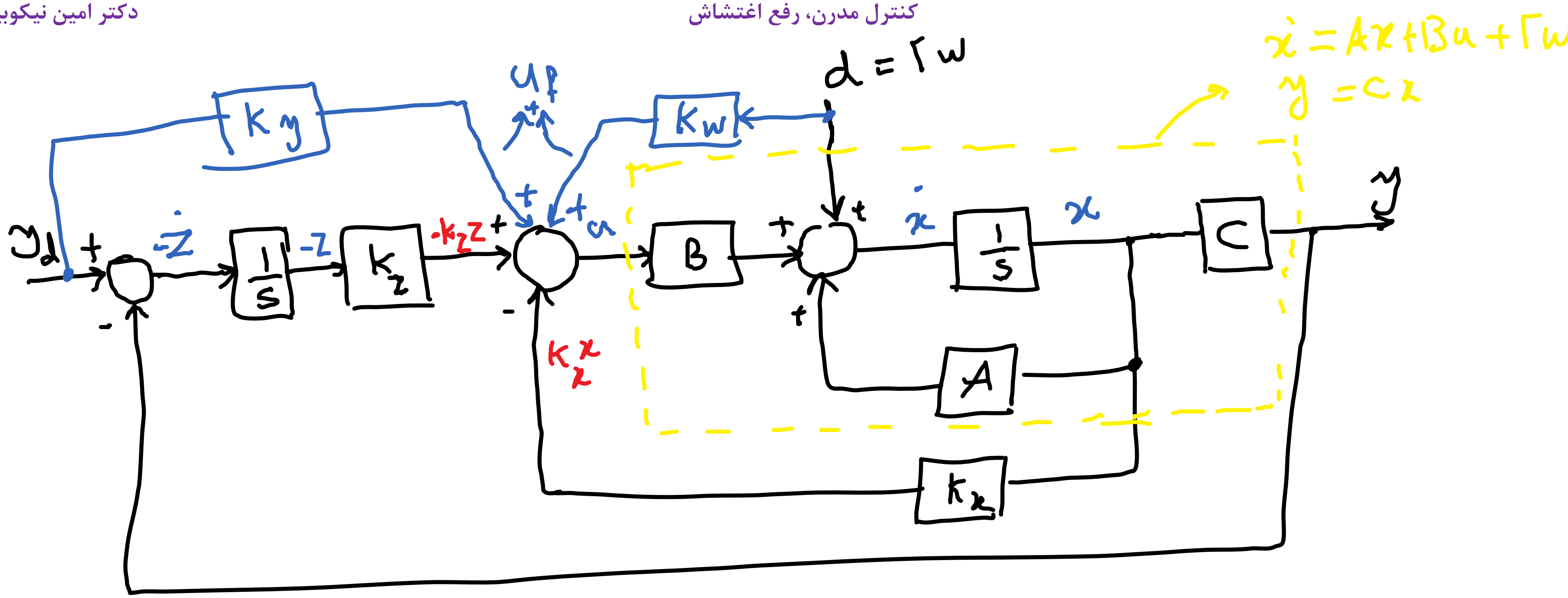
وجود ترم پیش‌خور، الزامی نیست. اگر وجود داشته باشد، پاسخ را سریع‌تر می‌کند.

با جانشین u داریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_x & -BK_z \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} y_d + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} w$$

با انتخاب مناسب K_x و K_z سیستم حلقه بسته پایدار خواهد شد.

$$\lim_{t \to \infty} \dot{z} = Cx - y_d = 0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} Cx = y_d$$


$\dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w$
$y = Cx$
$d = \Gamma w$
K_y
K_w
u_f
y_d
$\dot{z}$
$\frac{1}{s}$
z
K_z
$-K_z z$
u
B
$\dot{x}$
x
C
y
A
K_x
$K_x x$

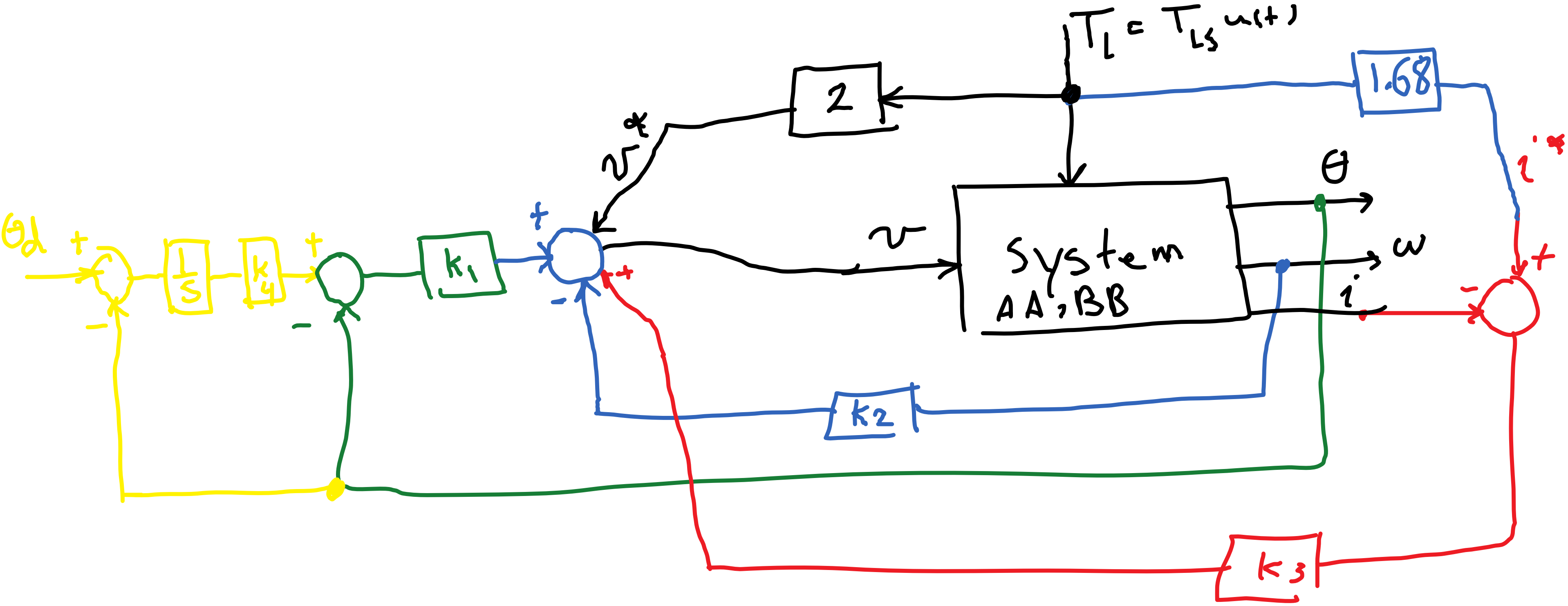
$$\begin{bmatrix} \dot\theta \\ \dot\omega \\ \dot i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.4 \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix}}_{AA} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ -7.4 \\ 0 \end{bmatrix} T_L$$

مدل موتور DC

$$BB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -7.4 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot z = \theta - \theta_d$$

$$\begin{bmatrix} \dot\theta \\ \dot\omega \\ \dot i \\ \dot z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.4 & 0 \\ 0 & -12 & -24 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \\ z \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} v + \begin{bmatrix} 0 \\ -7.4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} T_L + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \theta_d$$



$$K = LQR(A, B, Q, R)$$,

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & & \\ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

جهت محاسبه ماتریس بهره (K)

$$R = 1$$

مثال ربات تک لینکی:

```
A2=[0 1;m*g*L/(4*I) -c/I];%xs1=pi/6
B=[0;1/I];
```

$$\dot{z} = \theta - \theta_d \ ,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{4I} & -\frac{c}{I} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{mgl}{4I} & -\frac{c}{I} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow K = lqr(A, B, Q, R) \nearrow$$

K_1
K_2

$K_3 \rightarrow K_2$