کنترل اتوماتیک

طراحی جبران ساز به روش مکان هندسی ریشه ها

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

Performance specifications مشخصه های عملکردی

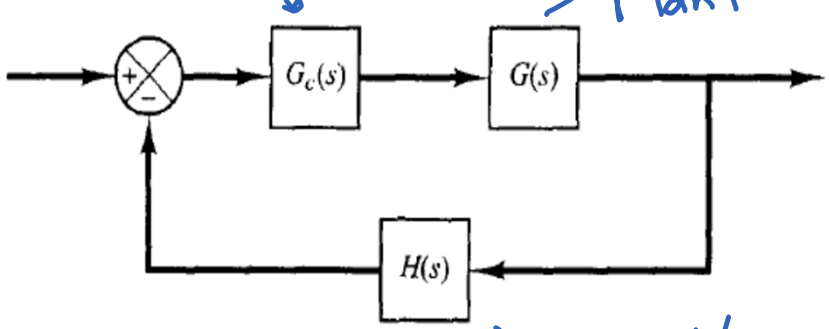
- سیستم های کنترلی بهت انجام کار مشخصی طراحی می شوند.
- به نیازمندی های سیستم کنترلی مشخصات عملکردی گفته می شود.

مشخصه های عملکردی
- حوزه زمان ✓
  - زمان نشست t_s
  - t_r
  - M_p
  - e_{ss}
- حوزه فرکانس
  - Gain Margin
  - Phase Margin

← مکان هندسی ریشه ها

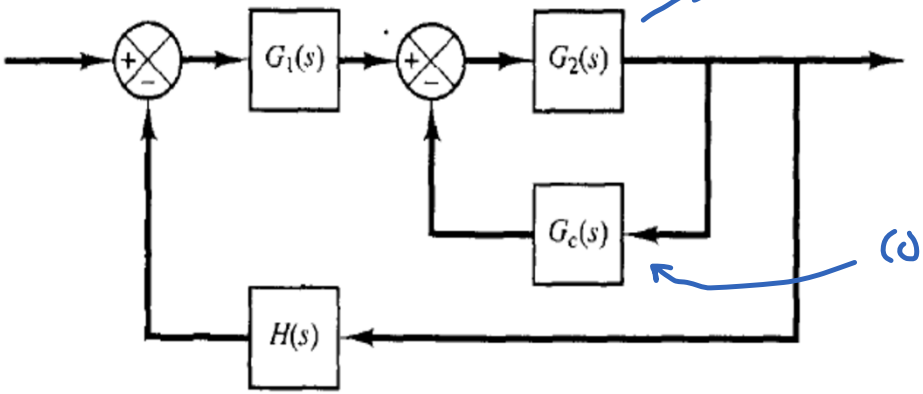
← Bode

جبران ساز
Compensator
کنترلر
controller



سری ✓

جبران ساز به صورت سری با سیستم حلقه بسته sys



موازی

جبران ساز به صورت موازی با سیستم حلقه بسته

انواع جبران سازها

- حوزه زمان
  - جبران ساز پیش فاز Lead compensator ✓
  - ~ ~ پس فاز Lag ✓
  - ~ ~ پیش پس فاز Lead-Lag ✓

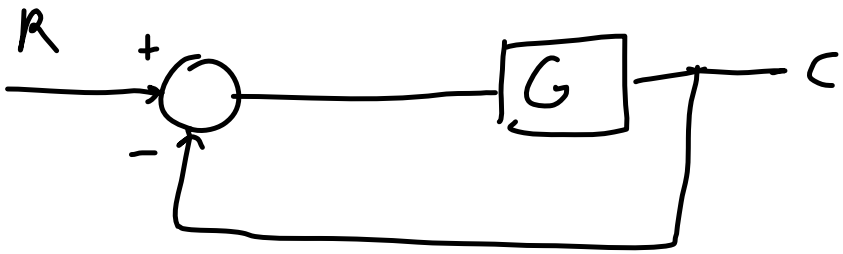
که همان هندسی ریشه‌ها

- حوزه فرکانس
  - جبران ساز پیش فاز Lead compensator
  - ~ ~ پس فاز Lag
  - ~ ~ پیش پس فاز Lead-Lag

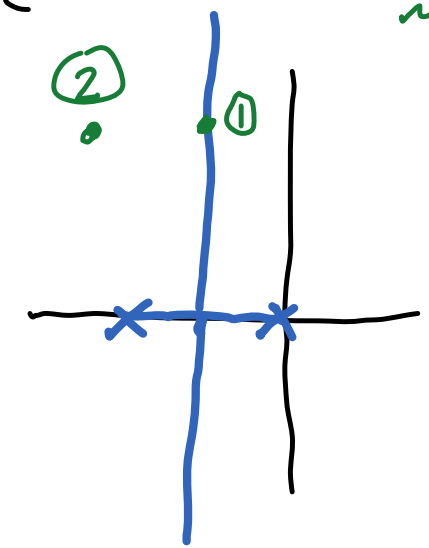
که با استفاده از دیاگرام Bode

جبران ساز پیش فاز Lead compensator

این جبران ساز در مواقعی استفاده می‌شود که پاسخ گذرای سیستم مطلوب نیست و با تنظیم بهره K نمی‌توان قطب‌های حلقه بسته را در محل مطلوب قرار داد.

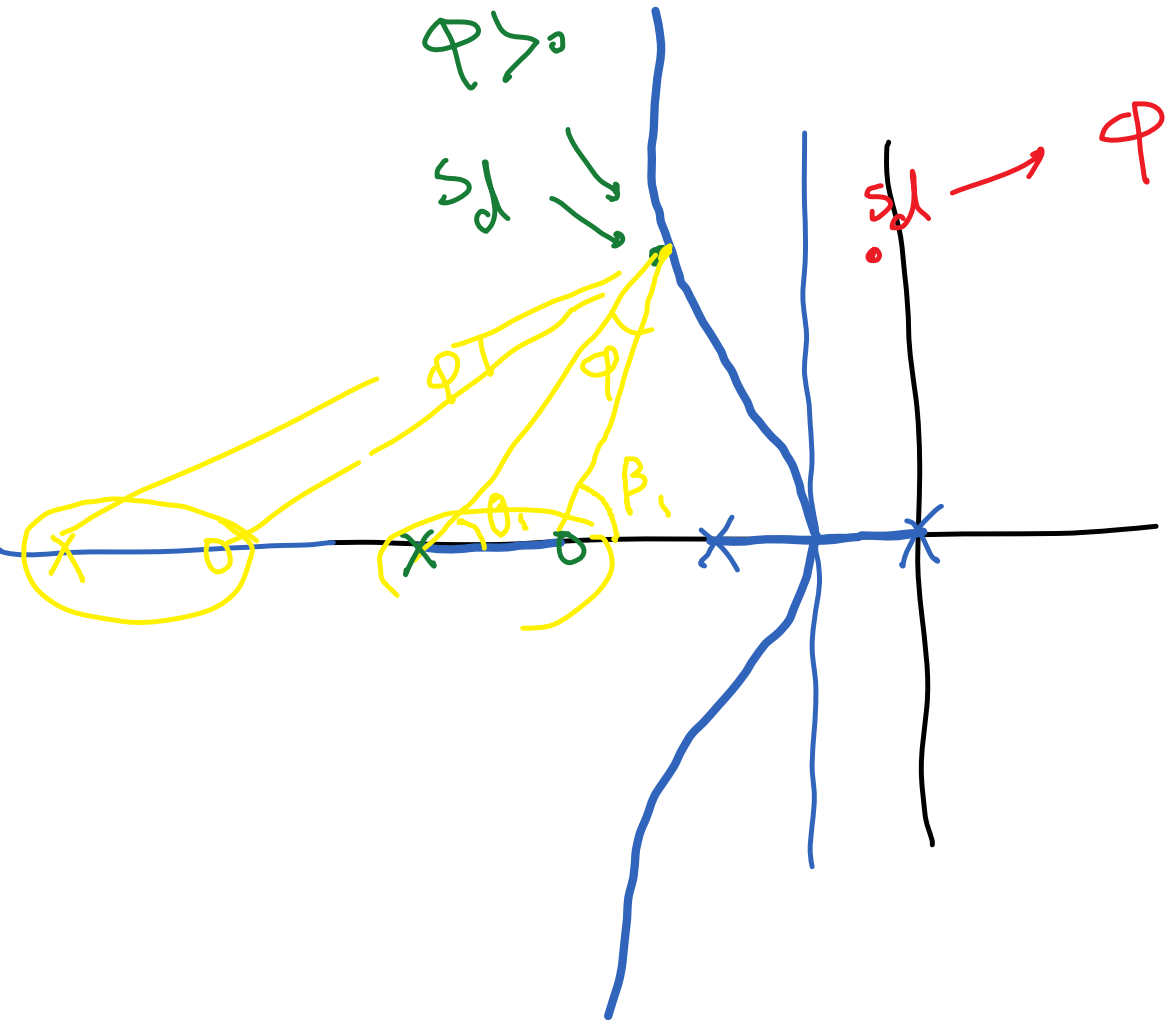


$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

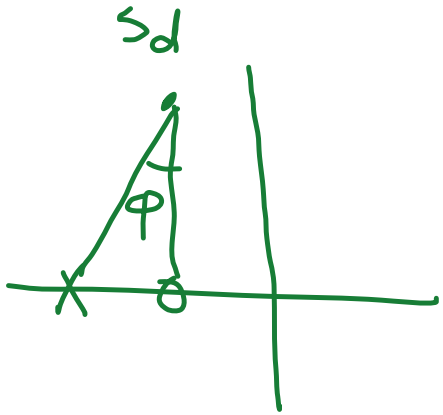


- محل قطب‌های حلقه بسته ① صدق نکرده
  ✓ با تنظیم بهره K

- محل قطب مطلوب ②
  با تغییر K قطب‌های حلقه بسته در نقطه ② قرار نمی‌گیرند.



$$\varphi = \beta_1 - \theta_1 > 0$$



مراحل طراحی جبران ساز پیش فاز

۱- با توجه به مشخصات عملکرد، محل مطلوب برای قطب‌های حلقه بسته غالب تعیین می‌گردد (S_d)

وضعیت اول: S_d دارای سه ریشه است.

$S_d = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,j$ ← ω_n و ξ قطب‌های مطلوب دارای سه ریشه است

وضعیت سوم: M_p, t_s ← ξ و ω_n ← S_d

۲- آیا S_d روی محل هندسی ریشه‌ها قرار دارد؟

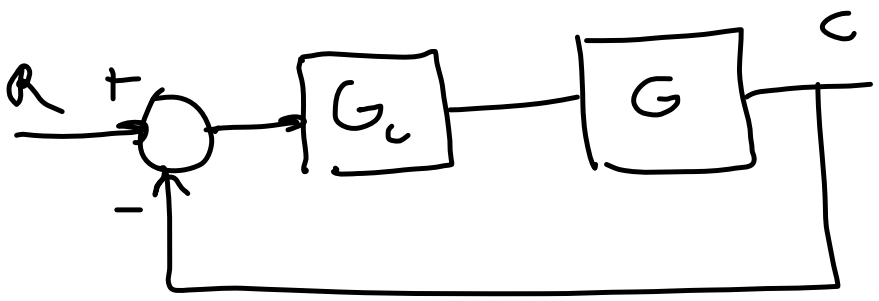
$\angle G(S_d) = \pm 180(2k+1)$ ← S_d روی محل هندسی است ← نیاز به جبران ساز پیش فاز ← (K) ← روش تحلیلی

روش دوم ← شرط زاویه چک نمی‌شود

$\angle G(S_d) \neq \pm 180(2k+1)$ ← S_d روی محل هندسی نیست ← طراحی جبران ساز

۳ - محاسبه زاویه‌ای که جبران ساز پیش فاز باید به سیستم اضافه کند تا مکان هندسی جدید از روی s_d عبور کند.

مثال $\angle G(s_d) = -200$



$$\angle G_c(s)G(s) = \angle G_c(s_d) + \angle G(s_d)$$
$$= -180$$

$$\Rightarrow \varphi = \angle G_c(s_d) = -180 - \angle G(s_d)$$

مثال $\rightarrow \varphi = -180 - (-200) = 20 \quad , \quad \varphi > 0$

۴- جبران ساز پیش فاز به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} \qquad 0<\alpha<1 \qquad T>0$$

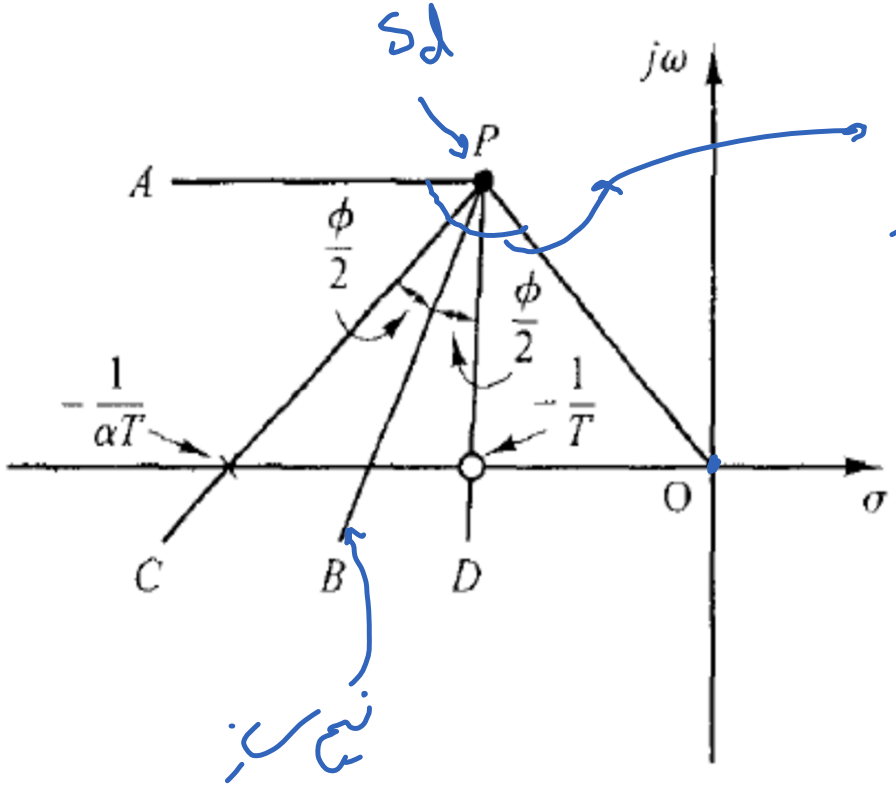
مقادیر α و T به نحوی تعیین می شوند که جبران ساز زاویه ϕ را ایجاد کند.

α را تا حد ممکن بزرگ انتخاب می کنیم. هرچه α بزرگتر باشد، K_v بزرگتر می شود و خطای حالت ماندگار به مقدار کمتری کاهش خواهد یافت. ← روش نیم ساز

۵- مقدار K_c را با استفاده از شرط اندازه

$$\left| G_c(s)G(s) \right|_{s=s_1} = 1 \rightarrow K_c$$

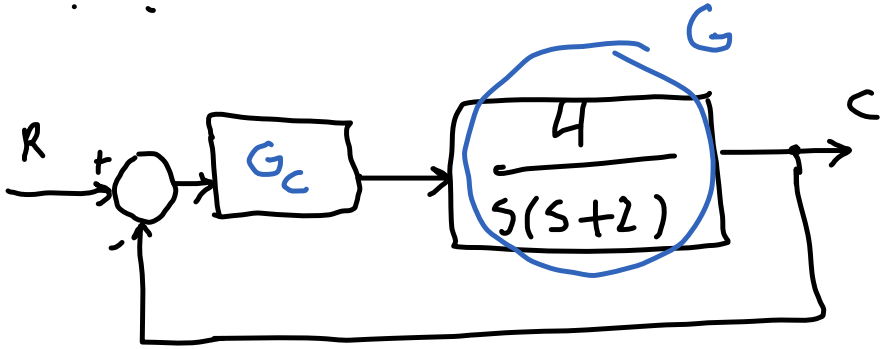
روش نیم ساز



نیم ساز این زاویه رسم می شود

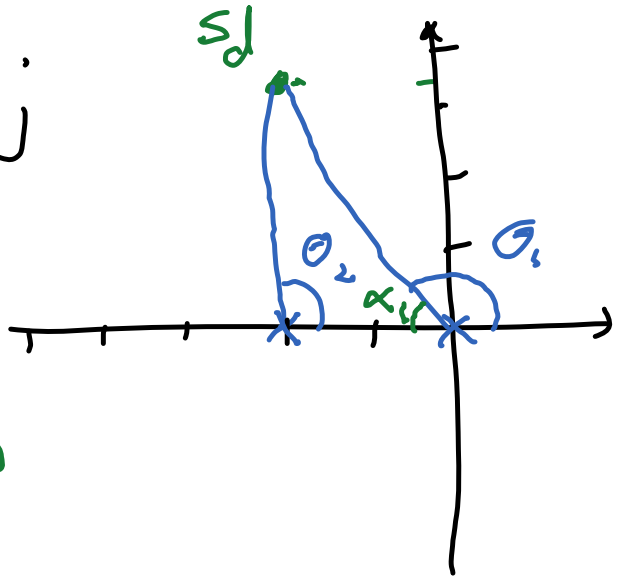
APO نیم ساز زاویه B-

مثال: برای سیستم زیر جبران سازی طراحی کنید که ξ و ω_n حلقه بسته به ترتیب ۰.۵ و ۴ شود.



$$s_d = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, j$$

$$s_d = -2 \pm 4\sqrt{1-0.25} = -2 \pm 2\sqrt{3}\, j$$



$$\angle G(s_d) = -\theta_1 - \theta_2 = -120 - 90 = -210$$

$$tg\alpha_1 = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha_1 = tg^{-1}\sqrt{3} = 60 \rightarrow \theta_1 = 120$$

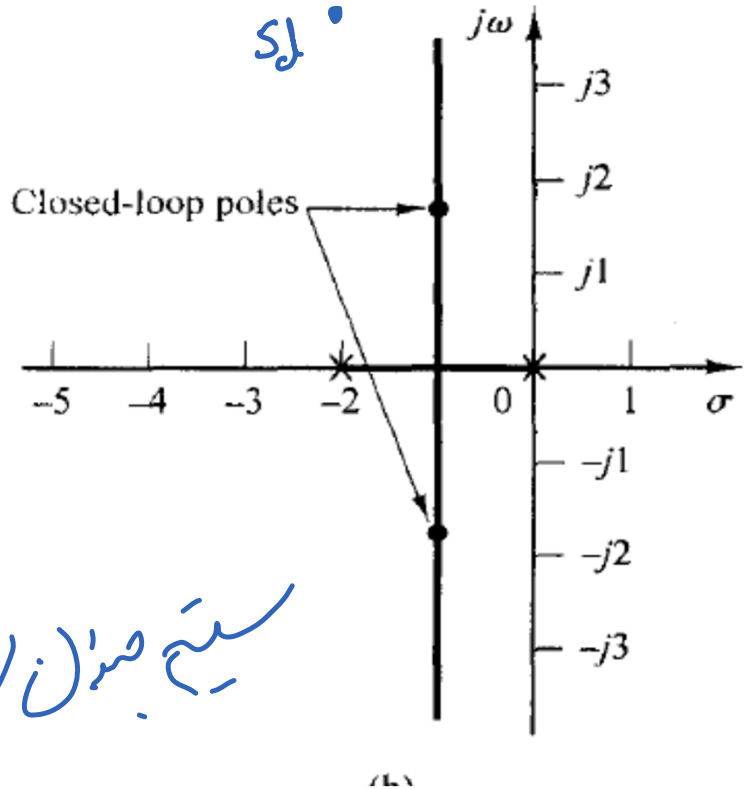
$$\angle G(s_d) = -210$$

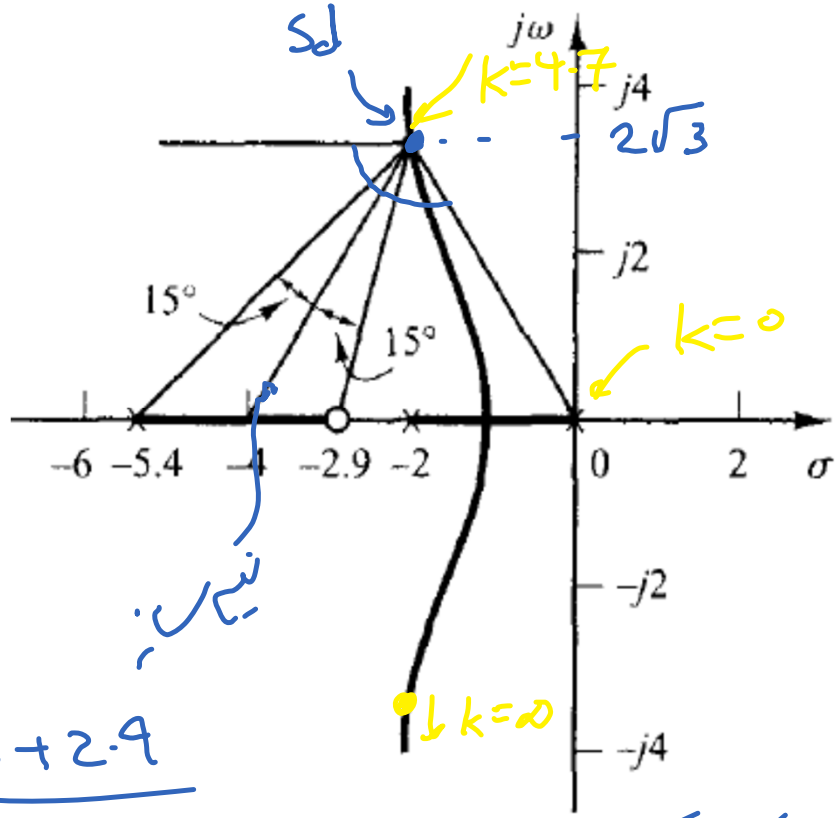
پس نتیجه می‌گیریم که s_d روی مکان هندسی نیست و نیاز به جبران ساز داریم.

حال جبران ساز چه مقدار باید زاویه ایجاد کند، $\varphi = ?$

$$\varphi - 210 = -180 \Rightarrow \boxed{\varphi = 30}$$

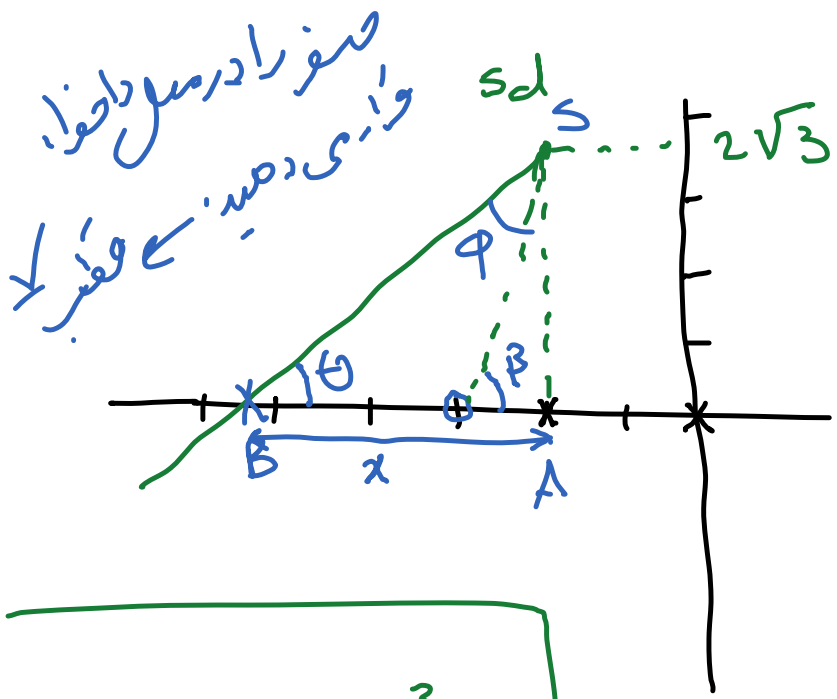
$$\angle G_c(s_d) + \angle G(s_d) = -180$$


jω
j3
j2
j1
Closed-loop poles
−5
−4
−3
−2
0
1
σ
−j1
−j2
−j3


jω
j4
2√3
j2
15°
15°
−6
−5.4
−4
−2.9
−2
0
2
σ
−j2
−j4

روش مستقیم

صفر صورت ساده‌ی 3- خواسته‌ایم



$$tg\beta = \frac{2\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \beta = 74$$

$$\varphi = \beta - \theta \Rightarrow \theta = \beta - \varphi$$

$$\Rightarrow \theta = 73 - 30 \rightarrow \theta = 43$$

$$\Delta SBA \rightarrow tg\theta = \frac{2\sqrt{3}}{x} = 0.93$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{0.93} = 3.6 \rightarrow \text{محل قطب} = 3.6 + 2 = 5.6$$

$$G_c(s) = k_c \frac{s+3}{s+5.6}$$

$$G_c(s) = k_c \frac{s+2.5}{s+?}$$

تمرین

حال نسبت K_c را به گونه ای محاسبه می کنیم که s_d روی مکان باشد.

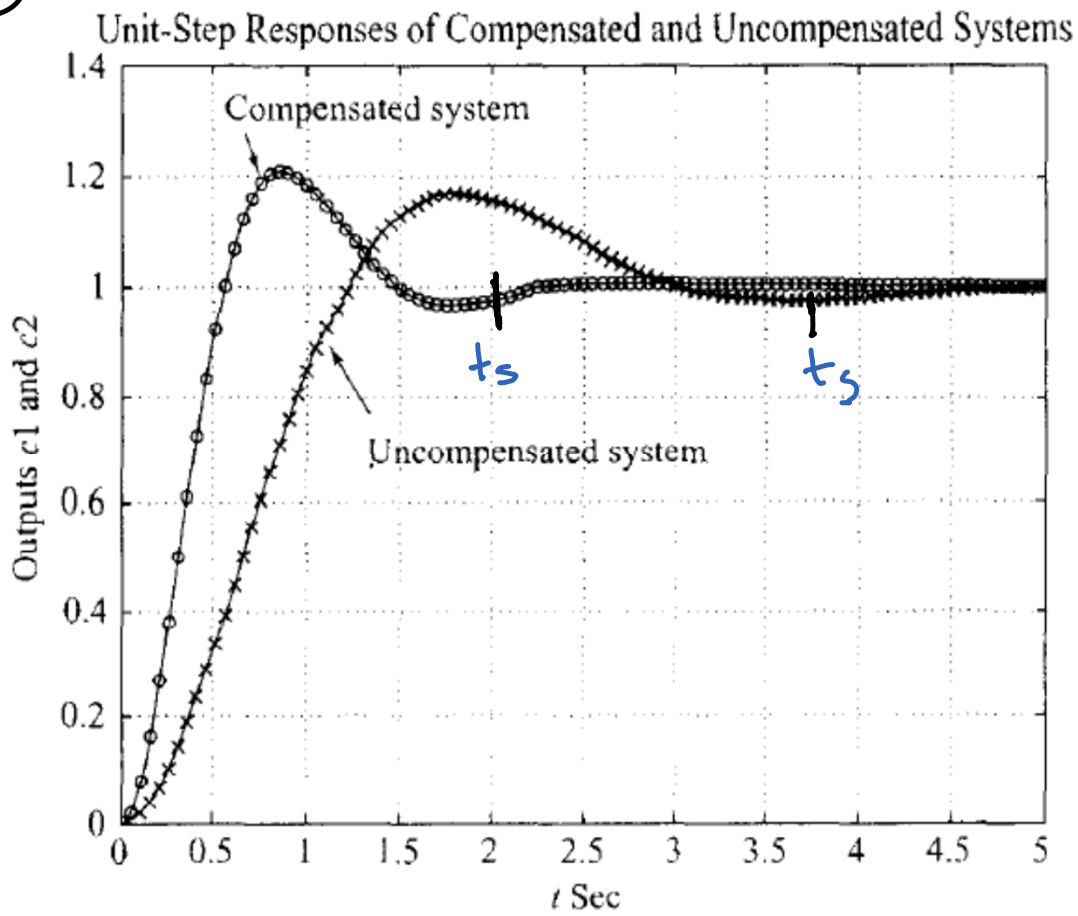
$$\left| G_c(s)\, G(s) \right|_{s_d} = 1 \Rightarrow \left| K_c \frac{s+2.9}{s+5.4} \frac{4}{s(s+2)} \right|_{s_d} = 1$$

$s_d = -2 + 2\sqrt{3}j$

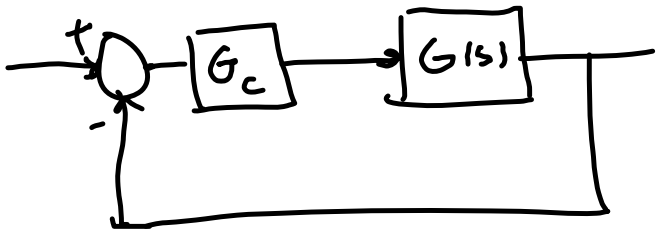
$$\Rightarrow \left| K_c \frac{0.9+2\sqrt{3}j}{3.4+2\sqrt{3}j} \frac{4}{(-2+2\sqrt{3}j)(2\sqrt{3}j)} \right| = \left| K_c \frac{\sqrt{0.9^2+12}}{\sqrt{3.4^2+12}} \times \frac{4}{\sqrt{4+12}\ 2\sqrt{3}} \right| = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{K_c = 4.7} \Rightarrow \boxed{G_c(s) = 4.7 \frac{s+2.9}{s+5.4}}$$

$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} = \frac{4}{2} = 2$



مثال: برای سیستم زیر یک کنترلر PD طراحی کنید به نحوی که قطب‌های غالب حلقه سیستم مطلوب $s_d = -3 \pm 4j$ شوند:



$$G(s) = \frac{s+2}{(s^2+2s+5)(s+4)}$$

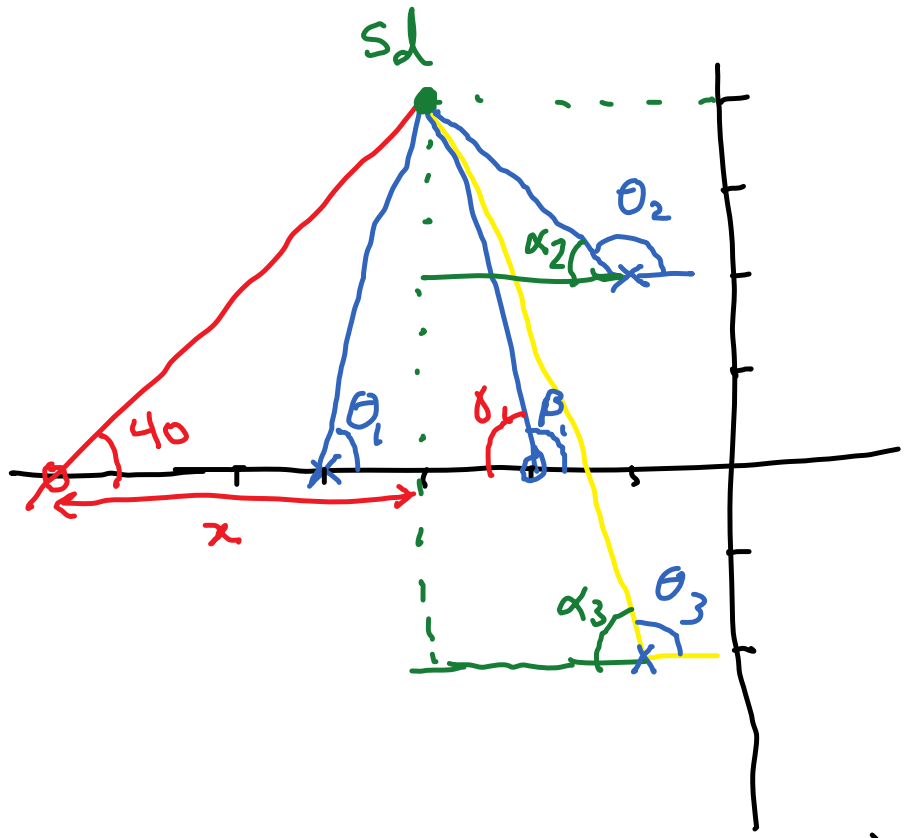
$$G_c(s) = k_p + k_d s$$

$$\angle G(s_d) = ? \rightarrow$$

صفر و قطب‌های $G(s)$

حقطبت صفر دارد.

$$\begin{cases} z_1 = -2 \\ p_1 = -4 \\ p_{2,3} = -1 \pm 2j \end{cases}$$



$$\angle G(s_d) = \beta_1 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} 4 \Rightarrow \theta_1 = 75$$

$$\gamma_1 = \tan^{-1} 4 \Rightarrow \gamma_1 = 75$$

$$\Rightarrow \beta_1 = 180 - \gamma_1 = 105$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1} \frac{2}{2} = \tan^{-1} 1 = 45$$

$$\theta_2 = 135$$

$$\alpha_3 = \tan^{-1} \frac{6}{3} = \tan^{-1} 2 \simeq 63$$

$$\theta_3 = 180 - \alpha_3 = 116$$

$$\tan 40 = \frac{4}{x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{\tan 40}$$

$$\Rightarrow x = 4.7$$

$$\angle G(s_d) = 105 - (75 + 135 + 116)$$

$$= -220$$

$\angle G(s_d) = -220 \longrightarrow \boxed{\varphi = 40}$

زاویه‌ای که جبران ساز باید ایجاد کند

$-220 + 40 = -180$

$\angle G(s_d) + \angle G_c(s_d) = -180$

$G_c(s) = k_p + k_d s = k_d\left(s + \frac{k_p}{k_d}\right) = k_d(s+a)$

محل صفر

$\Rightarrow a = 4.7 + 3 = 7.7 \Rightarrow \frac{k_p}{k_d} = 7.7$

$G_c(s) = k_d(s + 7.7)$

$$|G_c(s)\,G(s)| = 1$$

$$\left| k_d (s+7.7) \frac{s+2}{(s+1-2j)(s+1+2j)(s+4)} \right| = 1 \qquad s_d = -3+4j$$

$$\Rightarrow \left| k_d \frac{(4.3+4j)(-1+4j)}{(-2+2j)(-2+6j)(1+4j)} \right| = \frac{k_d \sqrt{4.3^2+16}\ \sqrt{1+16}}{\sqrt{4+4}\ \sqrt{9+36}\ \sqrt{1+16}} = 1$$

$$\Rightarrow k_d = \checkmark \,, \quad \frac{k_p}{k_d} = 7.7 \Rightarrow k_p = \checkmark$$

به عنوان تمرین

- $k_d = 0$ و k_p را طوری تنظیم کنید

- با استفاده از MATLAB مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران نشده را رسم کنید و چک کنید که آیا مکان هندسی سیستم جبران نشده از نقطه $-3+4j$ عبور می‌کند یا خیر.

```
rlocus
sisotool
```

کنترل اتوماتیک

طراحی جبران ساز به روش مکان هندسی ریشه ها

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

جبران ساز پس فاز — Lag Compensator

این جبران ساز مواقعی استفاده می‌شود که سیستم مشخصه پاسخ مطلوبی دارد ولی رفتار حالت ماندگار آن رضایت بخش نیست.

در این حالت اساس جبران سازی افزایش بهره حلقه باز است بدون اینکه مشخصات پاسخ گذرا تغییر محسوس کند. ← M_p ، t_s ، t_r ... خواسته است یعنی فعلا هیچ تغییر نکنند.

به همین دلیل در طراحی هندسی در اطراف قطب‌های غالب حلقه بسته نباید تغییر زیادی کند.

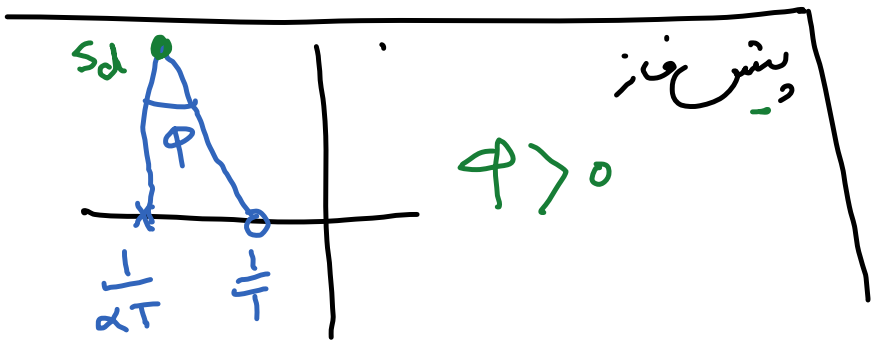
هدف جبران ساز پس فاز ← بهبود رفتار حالت ماندگار ← کاهش خطای حالت ماندگار e_{ss}

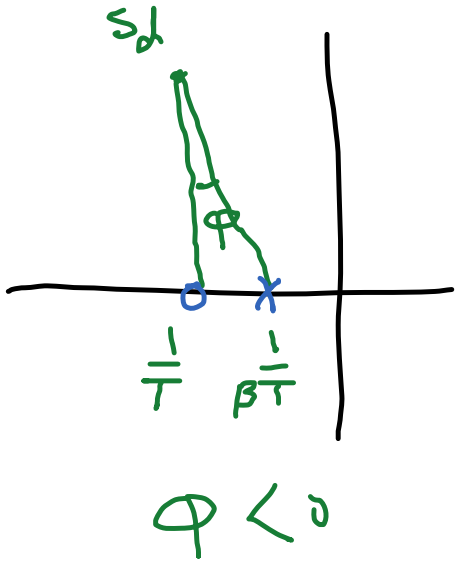
روش طراحی جبران ساز پیش فاز

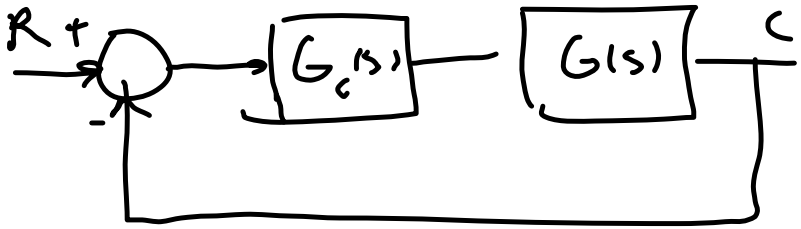
۱- تعیین محل قطب‌های حلقه بسته ← s_d

۲- تابع تبدیل جبران ساز به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$G_c(s) = \hat{K}_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad , \beta > 1$$







β ... ۳-۵۰

$$\beta = \frac{k_{vd}}{k_v} \longrightarrow \text{سیستم جبران شده}$$

$$k_v = \lim_{s} s\,G(s)$$

$$k_{vd} = \lim_{s} s\,G_c(s)G(s) = \lim_{s} G_c(s)\,\underbrace{(s\,G(s))}_{k_v} = \beta\,k_v$$

$s \to 0$ ، $s \to 0$

$$G_c(s) = \hat{k}_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \quad \hat{k}_c \simeq 1 \Longrightarrow G_c(0) = \beta$$

$s \to 0$

$$\beta = \frac{k_{vd}}{k_v}$$

۴- حدس T ، به نحوی که رابطه زیر برقرار باشد (با حفظ پایداری)

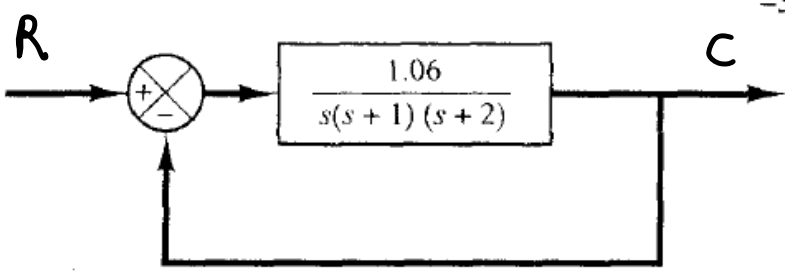
$$-5 < \angle G_c(s_d) < -1$$

این حدس، منطقی و مطابق با تجربه است. و می خواهیم مکان هندسی از نزدیک s_d عبور کند. صفر و قطب های جبران ساز پیش فاز خیلی کوچک و نزدیک به هم هستند.

۵- محاسبه $\hat{k}_c$ با استفاده از شرط اندازه،

$$\left| \hat{k}_c G_c(s) G(s) \right|_{s_d} = 1 \Rightarrow \hat{k}_c = ?$$

$$\hat{k}_c \simeq 1$$



برای سیستم زیر می خواهیم رنج حدای پستای سیستم K_p را به صورت 5 برسانیم، بدون اینکه محل قطبهای غالب حلقه بسته تغییر زیادی داشته باشد.

s_d

قطب های غالب

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)+1.06}$$

$$= \frac{1.06}{(s+0.3307-j0.5864)(s+0.3307+j0.5864)(s+2.3386)}$$

$s_{1,2} = -0.3307 \pm 0.5864j$

$s_3 = -2.3386$

قطب غیر غالب

محاسبه ثابت خطای سرعت سیستم جبران نشده،

$$K_v = \lim_{s \to 0} s\,G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1.06}{2} = 0.53$$

$s \to 0$

$s \to 0$

$$\beta = \frac{K_{vd}}{K_v} = \frac{5}{0.53} \simeq 10$$

$\beta = 10$ ، $T = 20$ فرض می‌کنیم T محاسبه

$$G_c(s) = \hat{k}_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} = \hat{k}_c \frac{s + 0.05}{s + 0.005}$$

$$\angle G_c(s)\Big|_{s_1} = \angle \frac{-0.3307 + 0.05 + 0.5864j}{-0.3307 + 0.005 + 0.5864j}$$

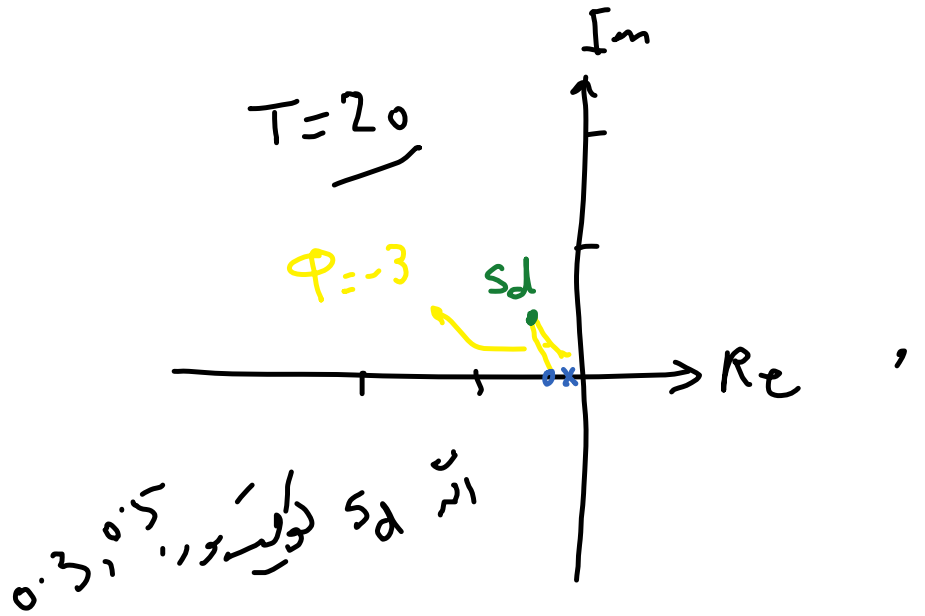
$s_1 = -0.3307 + 0.5864j$

$$= \angle -0.2807 + 0.5864j - \angle -0.3257 + 0.5864j$$

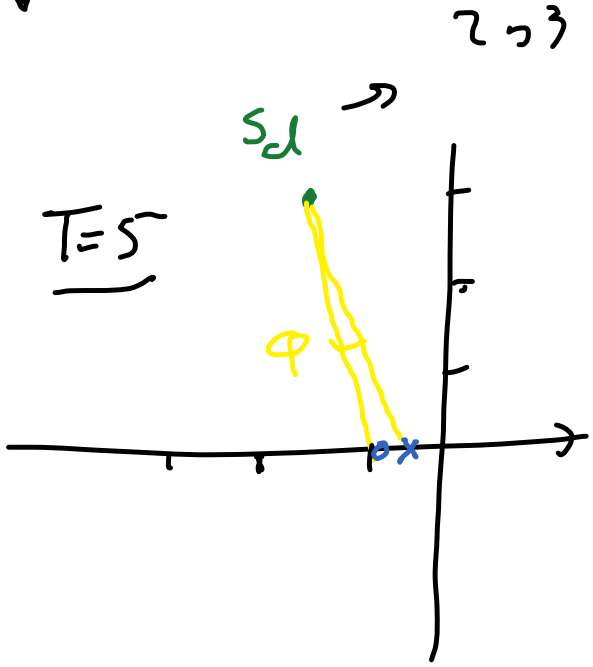
$$= \tan^{-1}\frac{0.5864}{-0.2807} - \tan^{-1}\frac{0.5864}{-0.3257} = -64 - (-60.1) = -3.9$$ ✓

اگر $\angle G_c(s_d) = -10 \rightarrow T \uparrow$

اگر $\angle G_c(s_d) = -0.1 \rightarrow T \downarrow$



اگر s_d کوچک‌تر: 0.3، 0.5



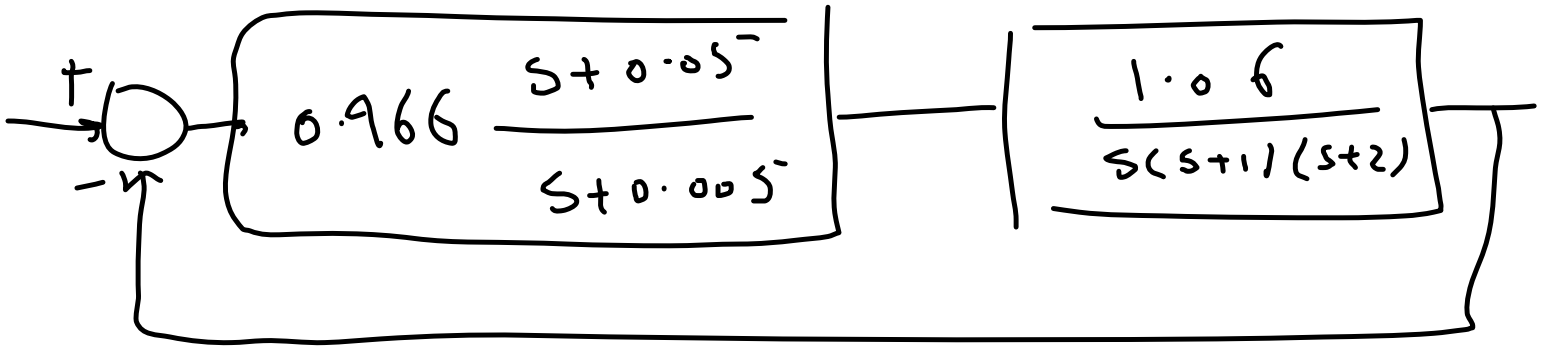
$$G_c(s) = \hat{K}_c \frac{s+0.05}{s+0.005}, \quad G(s) = \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)}$$

$\hat{K}_c$ مثبت

$$\left| G_c(s) G(s) \right|_{s_d} = 1$$

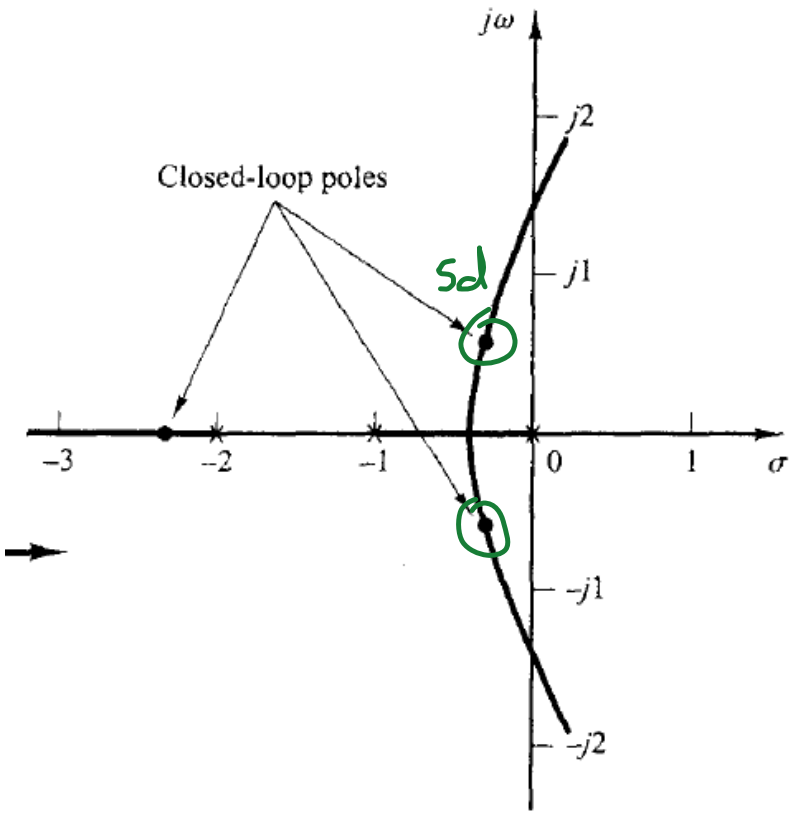
$$\left| \hat{K}_c \frac{s+0.05}{s+0.005} \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)} \right|_{s_d = -0.3307 + 0.5864j} = 1$$

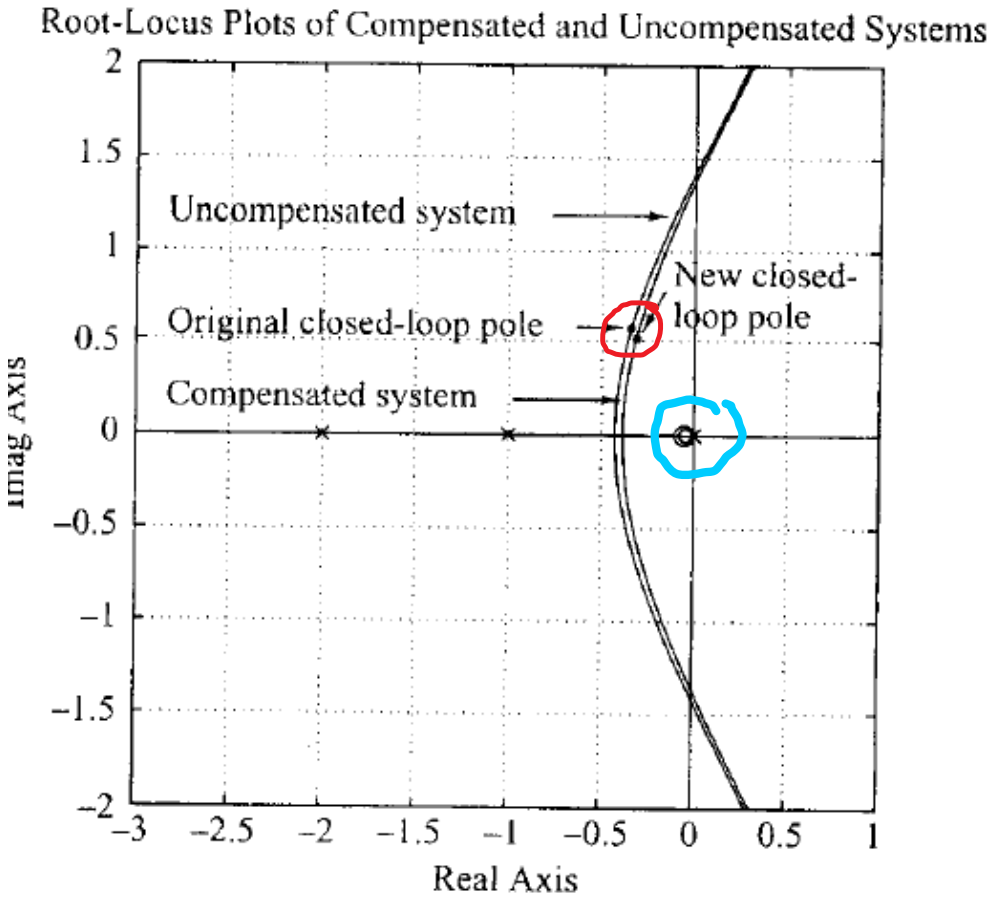
$$\Rightarrow \boxed{\hat{K}_c = 0.966}$$

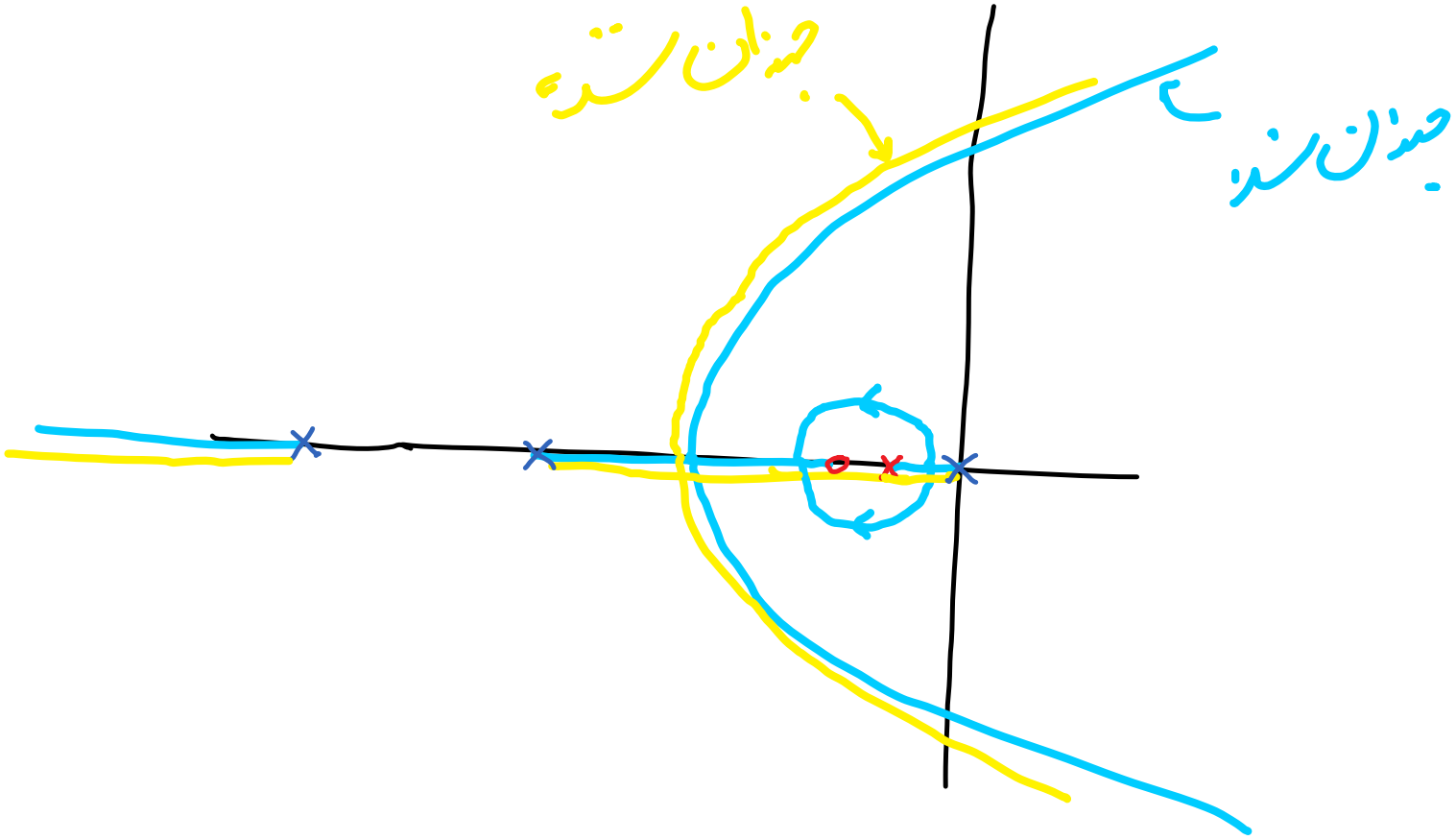


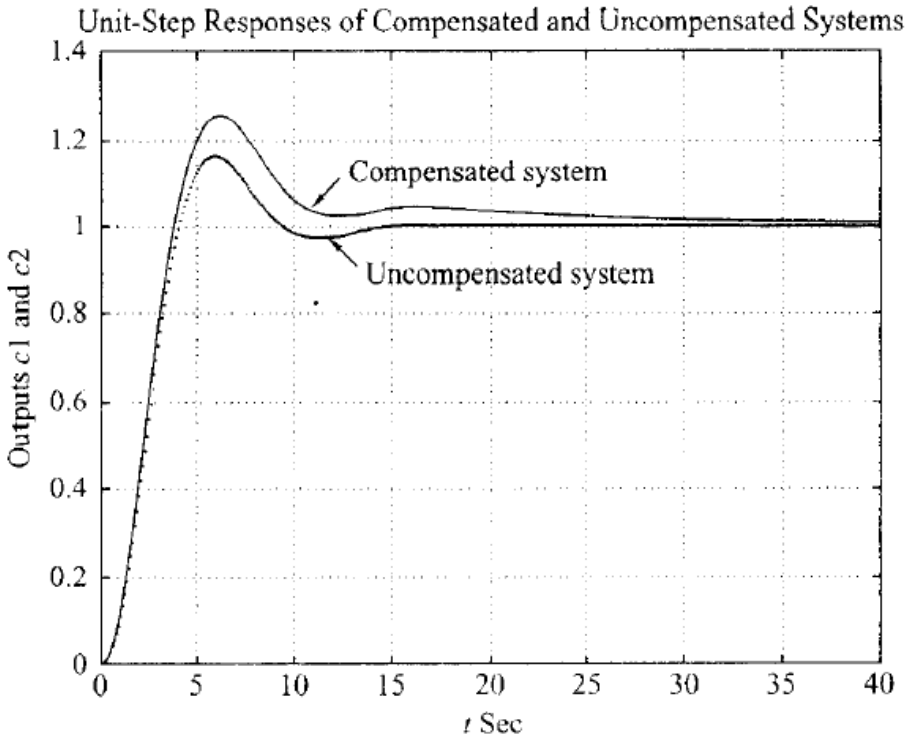
$$K_v = \lim_{s \to 0} s G_c(s) G(s) = 0.966 \times \frac{0.05}{0.005} \times \frac{1.06}{2}$$

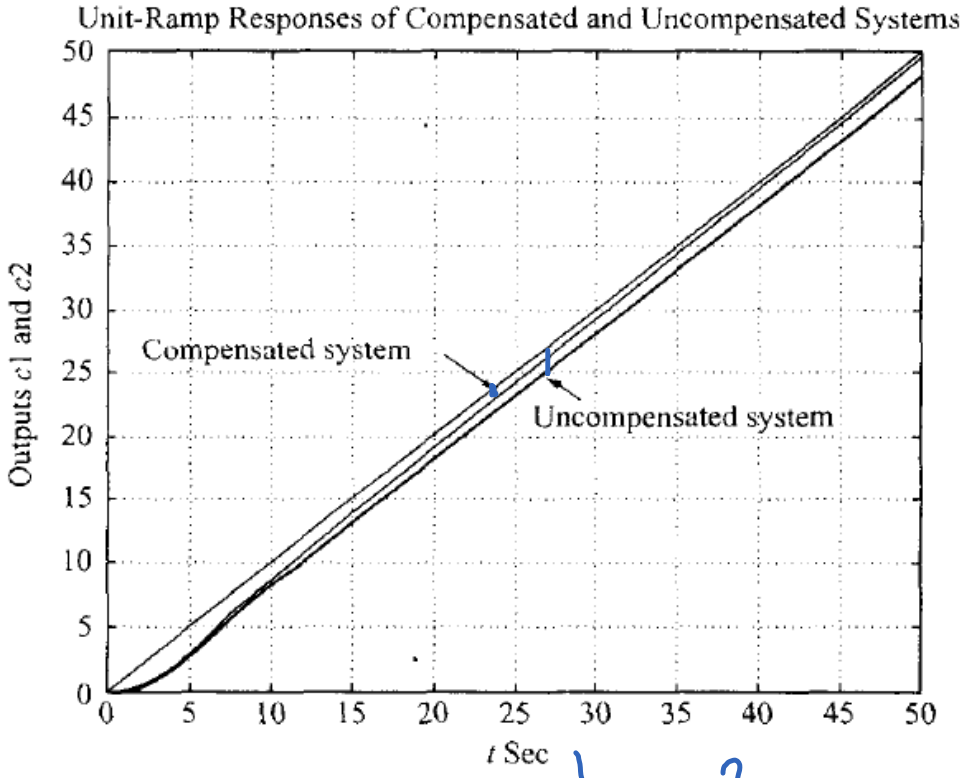
$$= 5.1 \checkmark$$


jω
j2
j1
−j1
−j2
Closed-loop poles
−3
−2
−1
0
1
σ


Root-Locus Plots of Compensated and Uncompensated Systems
Uncompensated system
New closed-loop pole
Original closed-loop pole
Compensated system
Imag Axis
Real Axis
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1


جبران کننده
جبران کننده





$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$ → $e_{ss} = \frac{1}{0.5} = 2$

$e_{ss} = \frac{1}{5} = 0.2$

کنترل اتوماتیک

طراحی جبران ساز به روش مکان هندسی ریشه ها

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

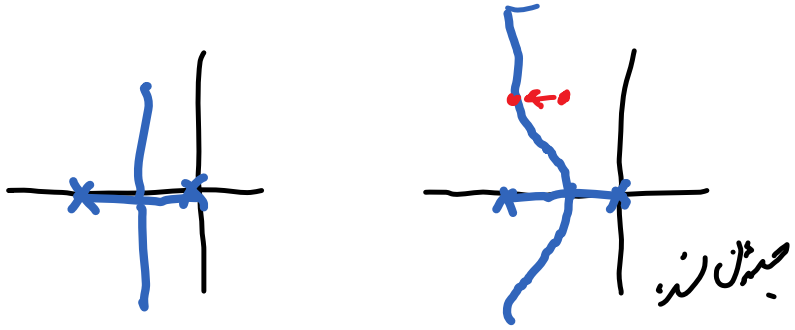
Lead-Lag Compensator

جبران ساز پیش فاز - پس فاز

Lead compensation basically speeds up the response and increases the stability of the system. Lag compensation improves the steady-state accuracy of the system, but reduces the speed of the response.

If improvements in both transient response and steady-state response are desired, then both a lead compensator and a lag compensator may be used simultaneously. Rather

Lead → افزایش سرعت پاسخ
→ افزایش پایداری → $\varphi > 0$ → تغییر مسیر شاخه‌های مکان هندسی ریشه‌ها به سمت چپ صفحه‌ی s



Lag → $\varphi < 0$ → پس فاز → سرعت پاسخ کم می‌شود

اگر بخواهیم به طور همزمان هم مشخصه پاسخ گذرا lead بهبود یابد

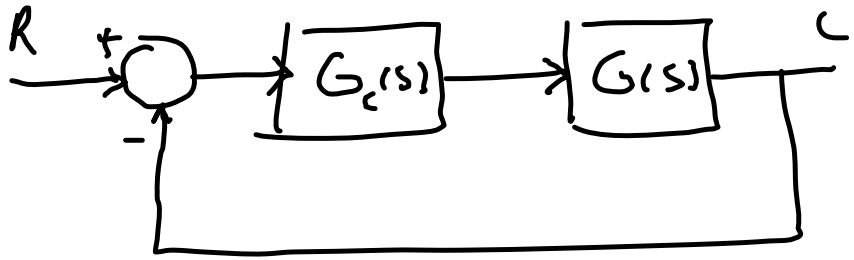
و هم مشخصه پاسخ ماندگار lag اصلاح شود

s_d ← به مقدار مطلوب برسد ← e_{ss}

باید از جبران ساز پیش فاز-پس فاز استفاده کنیم

مراحل طراحی جبران ساز پیش فاز پس فاز

۱- تابع تبدیل جبران ساز به صورت زیر در نظر گرفته می شود:



اساس طراحی ابتدا جبران ساز پیش فاز و پس جبران ساز پس فاز را طراحی می کنیم

$$G_c(s) = K_c \underbrace{\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{1}{\alpha T_1}}}_{\text{Lead}} \underbrace{\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}}_{\text{Lag}}$$

$0 < \alpha < 1$ $\qquad$ $\beta > 1$

1 → Lead

2 → Lag

۲ - تعیین محل صفرهای حلقه سیستم مطلوب ← s_d

۳ - محاسبه مقدار فازی که جبران ساز پیش فاز باید اضافه کند ← ϕ

۴ - α و T_1 به نحوی انتخاب می شوند که بخش پیش فاز جبران ساز زاویه ϕ را ایجاد کند

$$\angle \frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{1}{\alpha T_1}} = \phi$$

۵ - باخرض اینکه T_2 را به اندازه‌ی بزرگ انتخاب کنیم به نحوی که

$$\left| \frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}} \right| \simeq 1 \quad , \quad -5^\circ < \angle \frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}} < -1^\circ$$

می‌توان K_c را از شرط اندازه به صورت زیر محاسبه کرد

$$\left| K_c \frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{1}{\alpha T_1}} G(s) \right|_{s_d} = 1 \Rightarrow K_c = ?$$

نقش پیش‌فاز حداکثر شد

۶- طراحی جبران ساز پیش فاز، محاسبه β

ثابت خطای لنگی سیستم ← $K_v = \lim_{s \to 0} sK_c \dfrac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{1}{\alpha T_1}} G(s)$

جبران شده با جبران ساز پیش فاز

$$\beta = \frac{K_{vd}}{K_v}$$

کمترین ثابت خطای لنگی سیستم جبران شده با جبران ساز پیش فاز

K_{vd} ثابت خطای لنگی سیستم

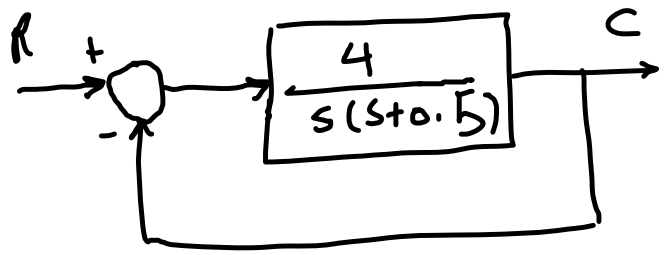
K_v ثابت خطای لنگی سیستم اولیه،

$$K_c \frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{1}{\alpha T_1}} G(s)$$

۷ - تعیین T_2 به نحوی که

$$-5 \angle \frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\alpha T_2}} \angle -1$$

مثال: برای سیستم زیر



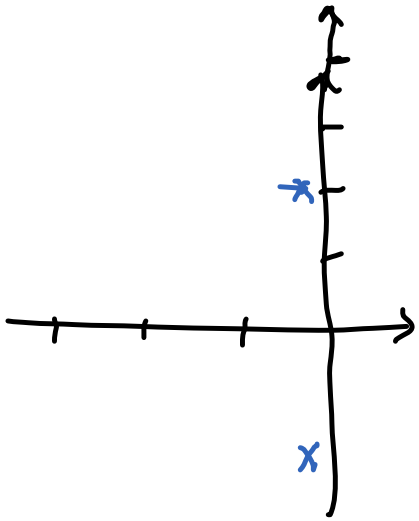
قطب‌های حلقه بسته $s_{1,2}=-0.25\pm 2j$ هستند

$$\frac{C}{R}=\frac{4}{s^2+0.5s+4}\quad ,\quad \omega_n=\underline{2}\quad ,\quad 2\xi\omega_n=0.5\rightarrow \xi=\underline{0.125}$$

$$K_v=\lim_{s\to 0} sG(s)=\frac{4}{0.5}=\underline{8}$$

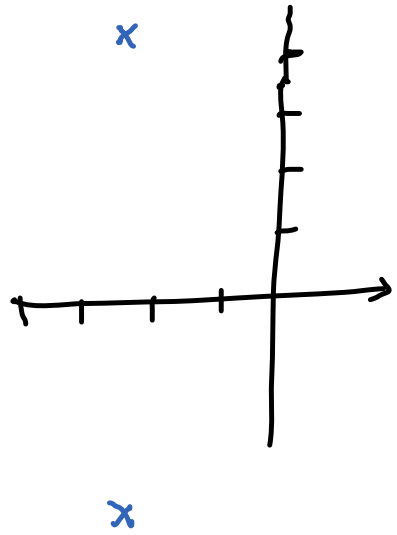
می خواهیم ضریب میرایی قطب‌های حلقه بسته را به 0.5، و فرکانس طبیعی نامیرای آن را به 5، بدون خطای حالت دائمی سرعت به 8 برسد.

$$s_d=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,j=-2.5\pm 4.33j$$



سیستم جبران نشده

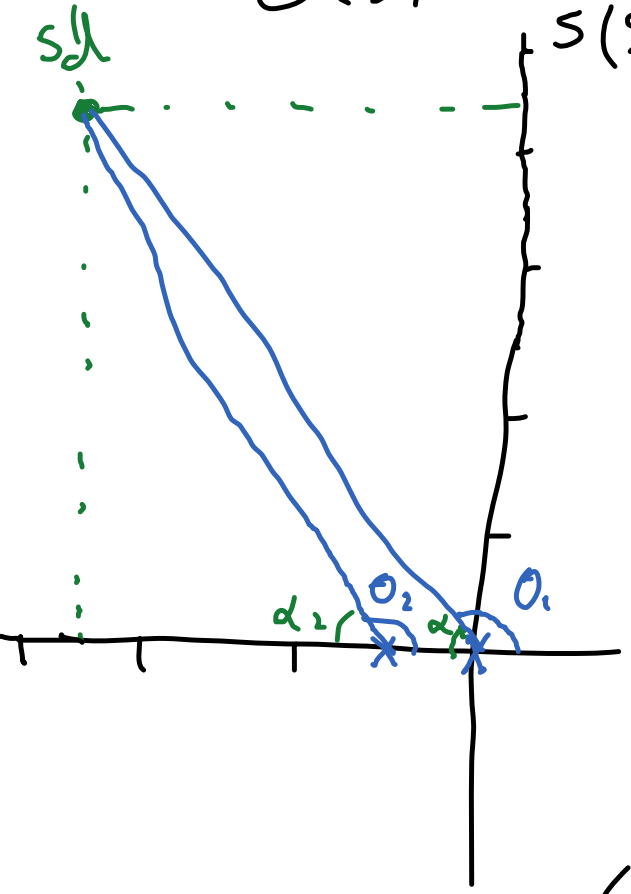
$k_r = 8$



سیستم جبران شده

$k_r = 80$

$$G(s) = \frac{4}{s(s+0.5)}$$



۱- طراحی جبران ساز پیش فاز

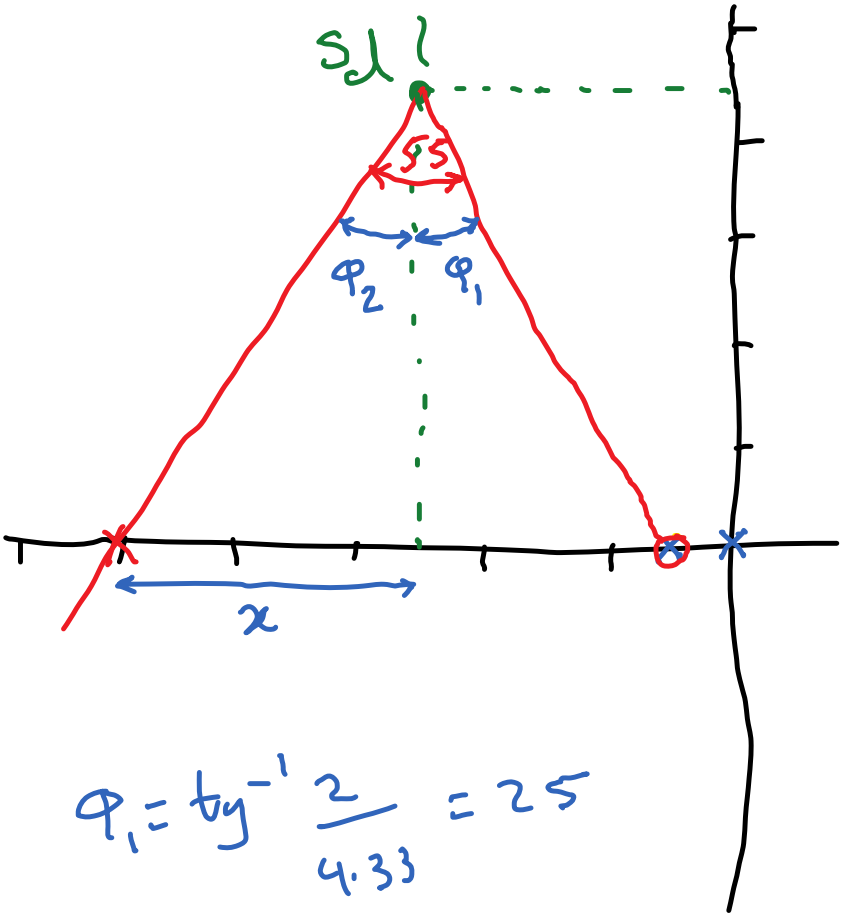
$$s_d = -2.5 \pm 4.33j$$

$$\angle G(s_d) = -\theta_1 - \theta_2 = -120 - 115 = -235$$

$$\alpha_1 = tg^{-1}\frac{4.33}{2.5} = 60 \rightarrow \theta_1 = 120$$

$$\alpha_2 = tg^{-1}\frac{4.33}{2} = 65 \rightarrow \theta_2 = 115$$

$$\angle G(s_d) = -235 \rightarrow -180 \rightarrow \text{میزان جبران } \Phi = 55^\circ$$

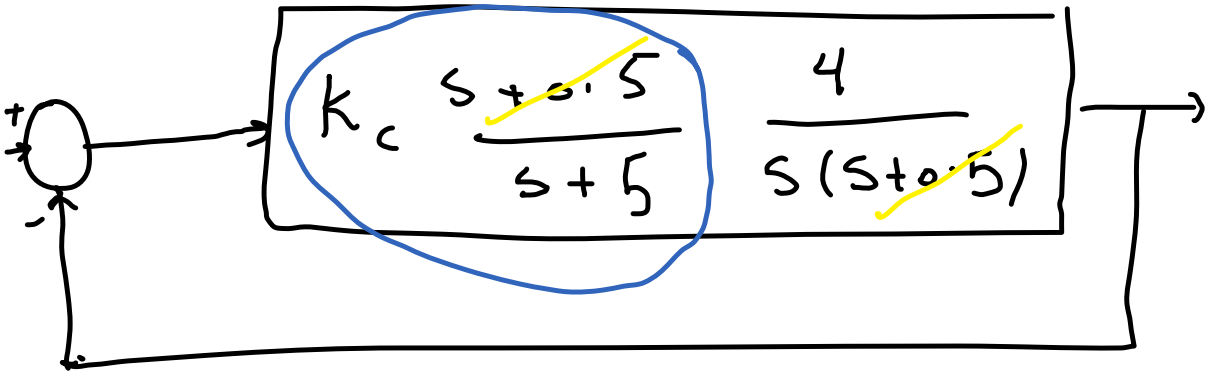


$$\varphi_1 = \tan^{-1}\frac{2}{4.33} = 25$$

$$\varphi_2 = 55 - 25 = 30 \rightarrow \tan 30 = \frac{x}{4.33} \Rightarrow x = 2.5 \rightarrow p = 5$$

$$K_c \frac{s+0.5}{s+p} = K_c \frac{s+0.5}{s+5}$$

پس سیستم حلقه بسته به صورت زیر میشود



$$\frac{4K_c}{s(s+5)}$$

$$\left| K_c \frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{1}{\alpha T_1}} G(s) \right|_{s_d} = 1 \Rightarrow \left| \frac{4K_c}{s(s+5)} \right|_{s_d = -2.5 + 4.33j} = 1$$

$$\left|\frac{4K_c}{s(s+5)}\right|_{s_1=-2.5+4.33j} = 1 \Rightarrow \left|\frac{4K_c}{(-2.5+4.33j)(2.5+4.33j)}\right| = 1$$

$$\Rightarrow K_c = 6.26$$

$$\Rightarrow K_c \frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{1}{\alpha T_1}} G(s) = \frac{4\times 6.26}{s(s+5)} = \frac{25}{s(s+5)}$$

$$\Rightarrow K_v = \lim_{s \to 0} s \frac{25}{s(s+5)} = 5 \longrightarrow 80$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{K_{vd}}{K_v} = \frac{80}{5} = 16$$

جبران ساز پیش فاز: $\dfrac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}}$.

$$\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}} = \frac{s+0.2}{s+0.0125}$$

$T_2 = 5$ فرض

$$\angle \left. \frac{s+0.2}{s+0.0125} \right|_{s_d} = \angle \frac{-2.3+4.33j}{-2.4878+4.33j}$$

$s_d = -2.5 + 4.33j$

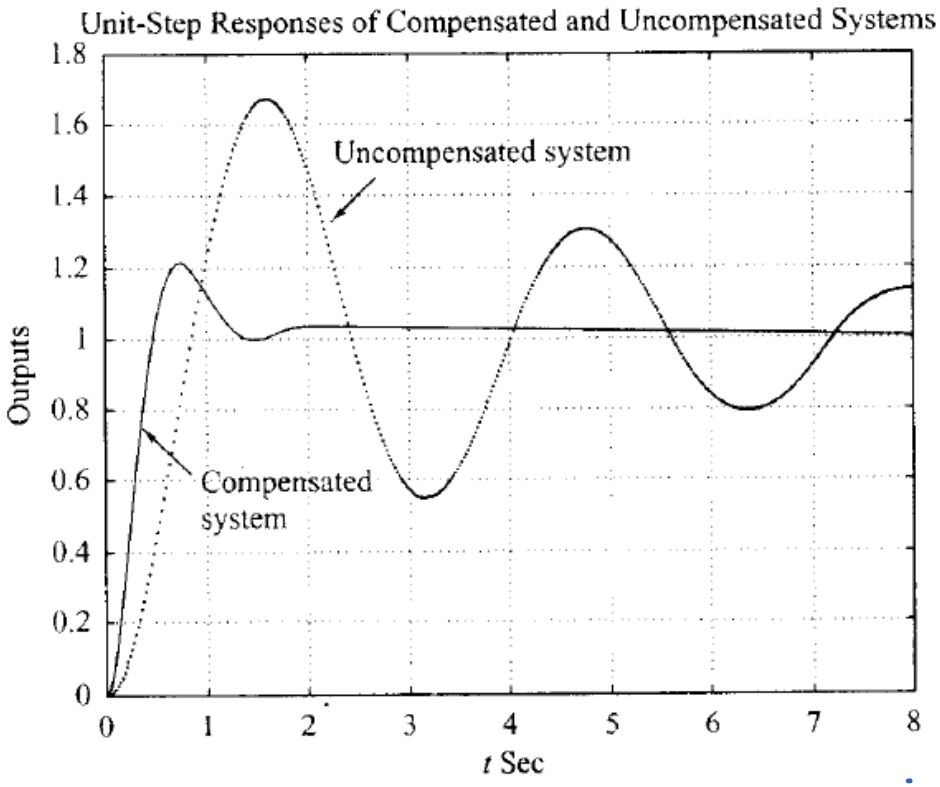
$$= tg^{-1}\frac{4.33}{-2.3} - tg^{-1}\frac{4.33}{-2.4875} = -62 - (-60) = -2$$ ✓

$$G_c(s) = 6.26 \frac{s+0.5}{s+5} \frac{s+0.2}{s+0.0125}$$

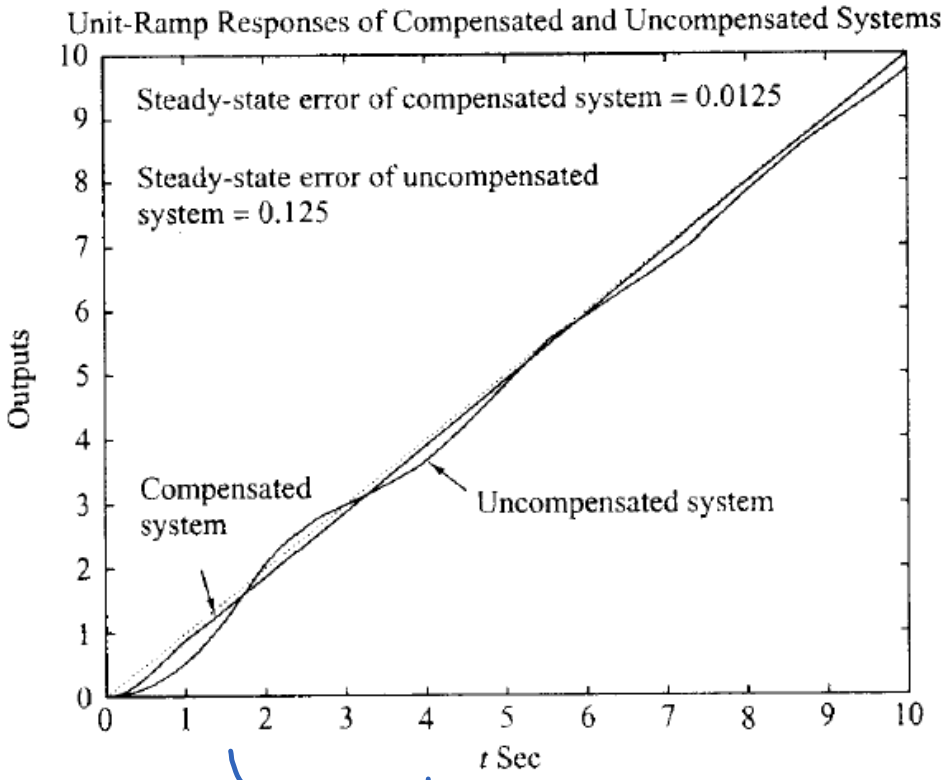
$$G(s) = \frac{4}{s(s+0.5)}$$

$$k_v = \lim_{s \to 0} s\, G_c(s) G(s) = 6.26 \times \frac{0.5}{5} \times \frac{0.2}{0.0125} \times \frac{4}{0.5} = 80 \checkmark$$

Lead



Lag



جبران نشده $e_{ss} = \frac{1}{8} = 0.125$

جبران شده $e_{ss} = \frac{1}{80} = 0.0125$