ریاضی مهندسی پیشرفته

سریها، انتگرالها و تبدیلات فوریه

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

جلسه پانزدهم

Fourier series　سری‌های فوریه

سری‌های فوریه سری‌هایی با جملات سینوسی و کسینوسی می‌باشند و در مسائل عملی زیادی ظاهر می‌شوند.

این سری‌ها ابزار پرقدرتی برای حل مسائل مختلف، ازجمله

- معادلات دیفرانسیل معمولی　ode
- 〃　〃 مشتق جزئی　pde

سری‌های فوریه جامع‌تر از سری‌های تیلور می‌باشند.

بسیاری از توابع دوره‌ای ناپیوسته را که قابل نمایش با سری تیلور نیستند می‌توان با سری فوریه بسط داد.

- سری‌های فوریه
- انتگرالها فوریه
- تبدیلات فوریه

Priodic function

توابع دوره‌ای، متناوب

تابع $f(x)$ را دوره‌ای یا متناوب گویند اگر این تابع به ازای هر عدد حقیقی x تعریف شده باشد و عدد مثبتی مانند P وجود داشته باشد که

$$f(x+P) = f(x)$$

P : دوره تناوب تابع $f(x)$ گویند $f(x)$ P is Priod of

در بعضی مراجع دوره تناوب با T نمایش می‌دهند.

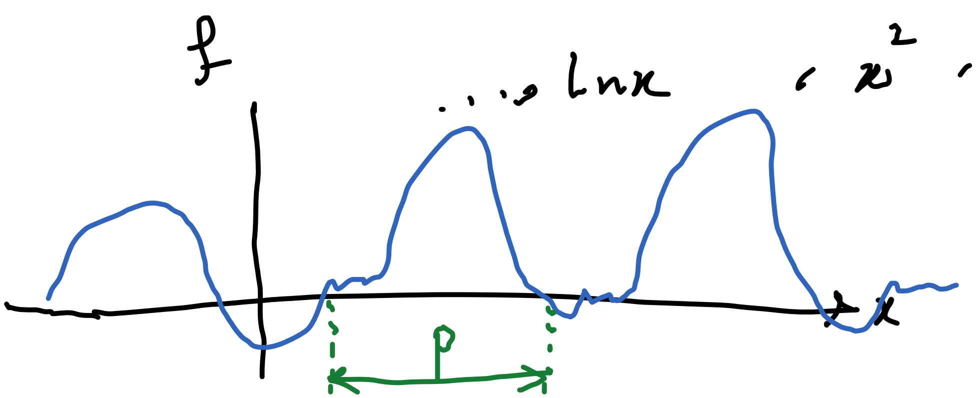
Ref. Advanced engineering Mathematics

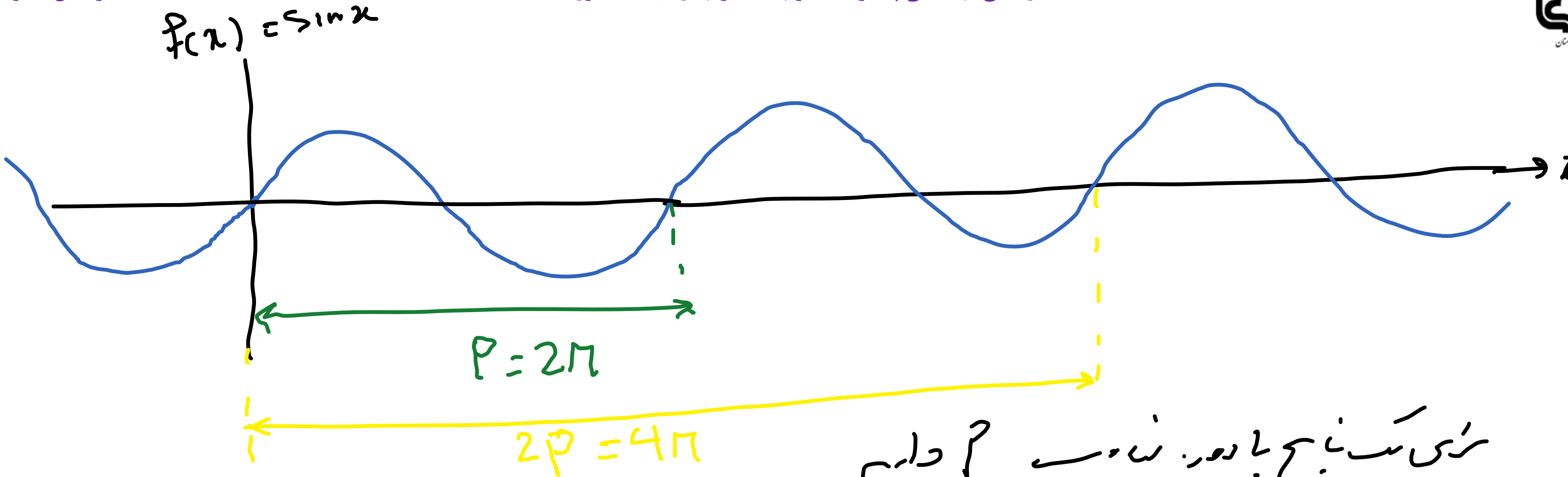
Erwin Kreyszic

ترجمه: دکتر شیدفر، جلد دوم قسمت اول

مثالی از توابع دوره‌ای: $\cos x$ ، $\sin x$ ، $\sin 2x$ و ...

توابع غیر متناوب: x ، e^{x} ، x^{2} ، $\ln x$ و ...





برای یک تابع با دوره تناوب p داریم

$f(x+np) = f(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ یک عدد صحیح

اگر دوره تناوب توابع $f(x)$ و $g(x)$ هر دو P باشد آنگاه، دوره تناوب

تابع $h(x) = af(x) + bg(x)$ به ازای هر دو عدد ثابت a و b نیز P خواهد بود.

$P \quad P \quad P$

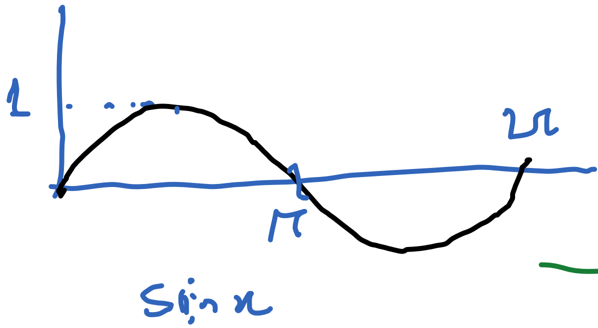
هدف یافتن نمایش توابع مختلف برحسب توابع متناوب زیر می‌باشد.

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \dots,\ \sin nx,\ \cos nx$$

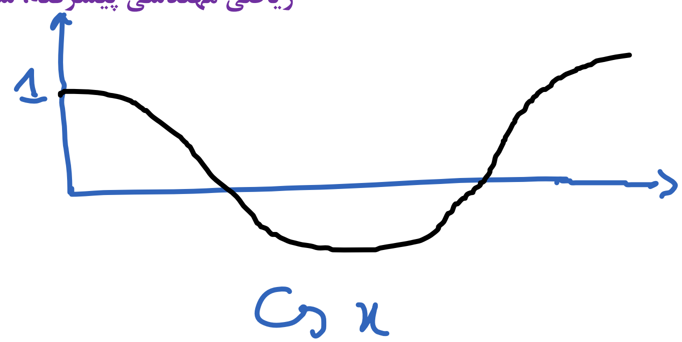
همه این توابع دارای دوره تناوب 2π هستند.

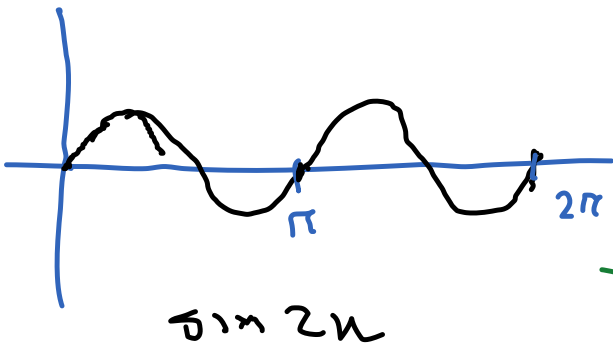
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

تابعی با دوره تناوب 2π می‌باشد. $f(x)$

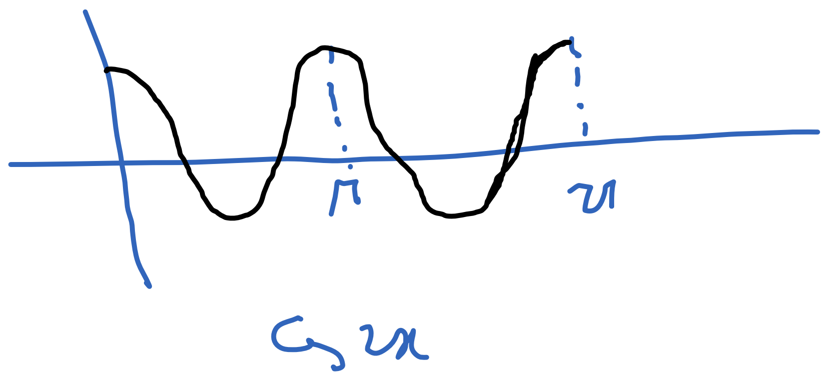


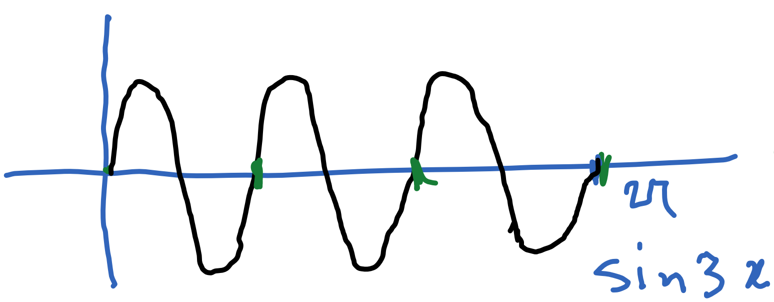
$\rightarrow 2\pi = P$





$\rightarrow P = \pi$





$P = \frac{2\pi}{3}$

. . . .

فرض کنید تابع $f(x)$ تابعی دوره‌ای با دوره تناوب 2π باشد که بتوان آن را به صورت سری مثلثاتی زیر نوشت

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (1)$$

می‌خواهیم ضرایب a_n و b_n را محاسبه کنیم.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0\,dx + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) dx}_{0}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0\,dt = \left[a_0 t\right]_{-\pi}^{\pi} = 2a_0\pi$$

$\sin\pi = 0$

$\sin -\pi = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx = a_n \left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} = a_n \times 0 = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx = b_n \left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{b_n}{n}\left[\cos\pi - \cos(-\pi)\right] = 0$$

$\cos\pi = \cos -\pi = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\pi a_0 \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)}$$

① $\times \cos mx \Rightarrow$

$$\int_{-\pi}^{-\pi} f(x)\cos mx\,dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos mx\,dx}_{0} + a_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx}_{a_n\pi} + b_n\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx}_{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos mx \, dx = \frac{a_0}{m}\Big[\sin mx\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \big(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x\big)\,dx$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\Big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\Big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big]$$

$$b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx=\frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\sin(n+m)x+\sin(n-m)x\big)\,dx$$

$$=\frac{b_n}{2}\left[\frac{-1}{n+m}\cos(n+m)x\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{b_n}{2}\left[\frac{-1}{n-m}\cos(n-m)x\right]_{-\pi}^{\pi}=0+0=0$$

$n=m$

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx=\frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\big[\cos(n+m)x+\cos(n-m)x\big]\,dx$$

$$=\frac{a_n}{2}\left[\frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{a_n}{2}\left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$n\neq m$ برای

$$n=m \rightarrow \frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{a_n}{2}(\pi-(-\pi)) = \pi a_n$$

برای محاسبه b_n شبیه حالت قبل

① $x \sin mx \quad \dots \Rightarrow$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx}$$

فرض کنید تابع $f(x)$ تابعی دوره‌ای با دوره تناوب 2π باشد که بتوان آن را به صورت سری مثلثاتی زیر نوشت

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

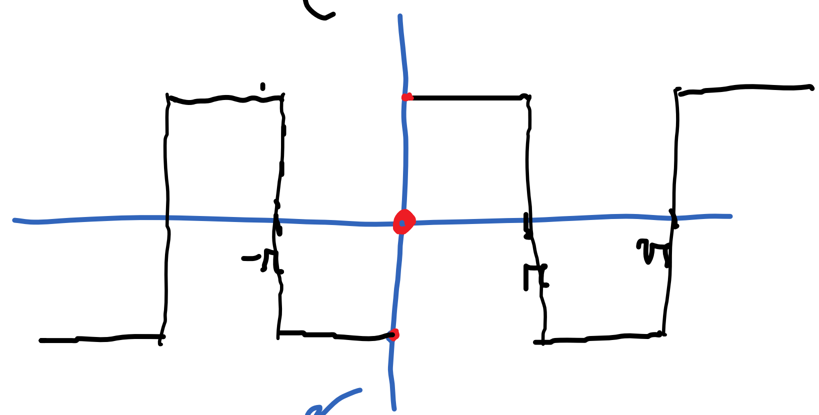
فرمولهای اویلر برای ضرایب فوریه

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \,, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

مثال: ضرائب فوریه تابع دوره‌ای $f(x)$ زیر را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} -K , & -\pi < x < 0 \\ K , & 0 < x < \pi \end{cases}$$

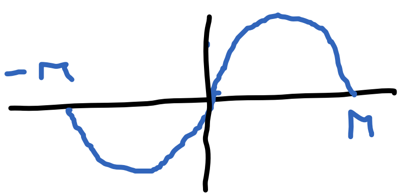


که در $x=0$ پرش دارد.

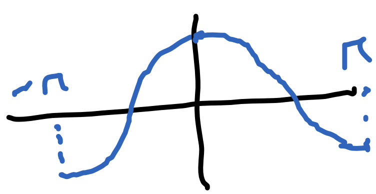
فرد

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

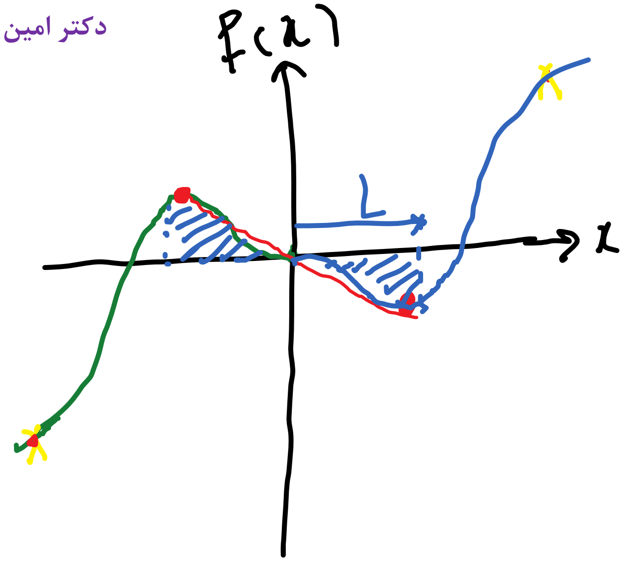
تابع $f(x)$ یک تابع فرد است



$\sin x \leftarrow f(x) = -f(-x)$

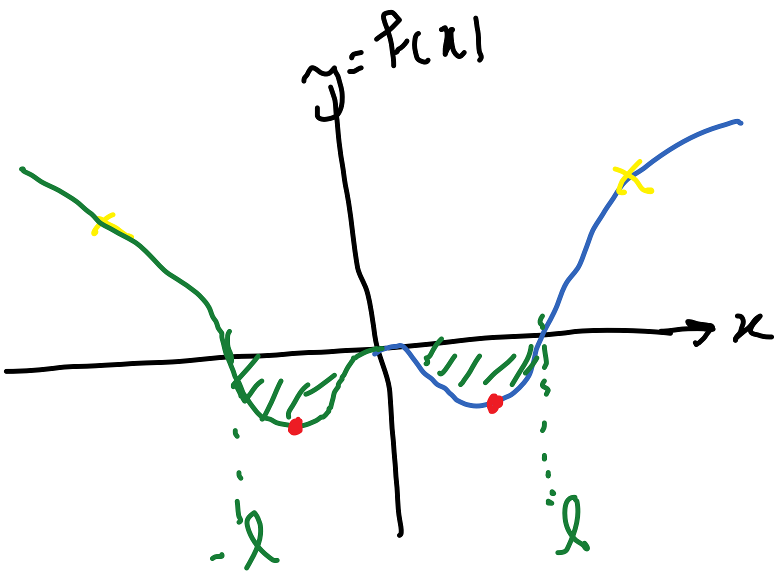


$\cos x \leftarrow f(x) = f(-x) \leftarrow$ تابع زوج



یک تابع فرد نسبت به مبدأ متقارن است

$$\int_{-l}^{l} f(x) = 0$$



یک تابع زوج نسبت به محور y متقارن است

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{فرد}}\ \underbrace{\cos nx}_{\text{زوج}}}^{\text{فرد}} = 0$$

حاصلضرب دو تابع فرد، یک تابع زوج خواهد شد

$$\underbrace{f(x)}_{\text{زوج}}\ \underbrace{g(x)}_{\text{زوج}} = \underbrace{h(x)}_{\text{زوج}}$$

$$\underbrace{f(x)}_{\text{فرد}}\ \underbrace{g(x)}_{\text{فرد}} = \underbrace{h(x)}_{\text{زوج}}$$

حاصلضرب یک تابع فرد در یک تابع زوج یک تابع فرد خواهد شد

$$\underbrace{f(x)}_{\text{فرد}}\ \underbrace{g(x)}_{\text{زوج}} = \underbrace{h(x)}_{\text{فرد}}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\underset{\text{فرد}}{f(x)}\ \underset{\text{فرد}}{\sin nx}}^{\text{زوج}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} k\sin nx\,dx = \frac{2k}{\pi}\left[\frac{-1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2k}{\pi}\left(\frac{-1}{n}\cos n\pi - \left(\frac{-1}{n}\right)\right) = \frac{2k}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right)$$

$$n=1 \rightarrow \cos\pi = -1$$
$$n=2 \rightarrow \cos 2\pi = 1$$
$$n=3 \rightarrow \cos 3\pi = -1$$
$$\vdots$$

$$\Rightarrow \quad \text{زوج } n \xrightarrow{\cos n\pi = 1} \qquad \text{فرد } n \xrightarrow{\cos n\pi = -1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} b_n = 0 \\ b_n = \dfrac{4k}{n\pi}, \quad n = 1, 3, 5 \end{array}}$$

$$b_n = 0 \quad , n = 2, 4, \cdots$$

$$b_n = \frac{4K}{n\pi} , n = 1, 3, 5, \cdots$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \frac{4K}{\pi}\sin x + \frac{4K}{3\pi}\sin 3x + \frac{4K}{5\pi}\sin 5x + \cdots + \frac{4K}{n\pi}\sin nx + \cdots$$

n اعداد فرد می باشد

$$\boxed{f(x) = \frac{4K}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)}$$

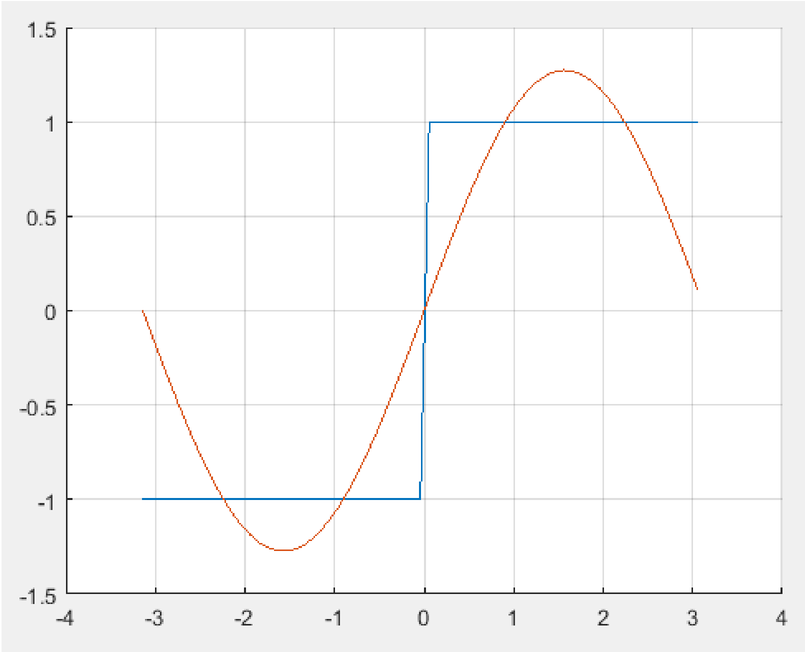
اگر $x = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = K = \frac{4K}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

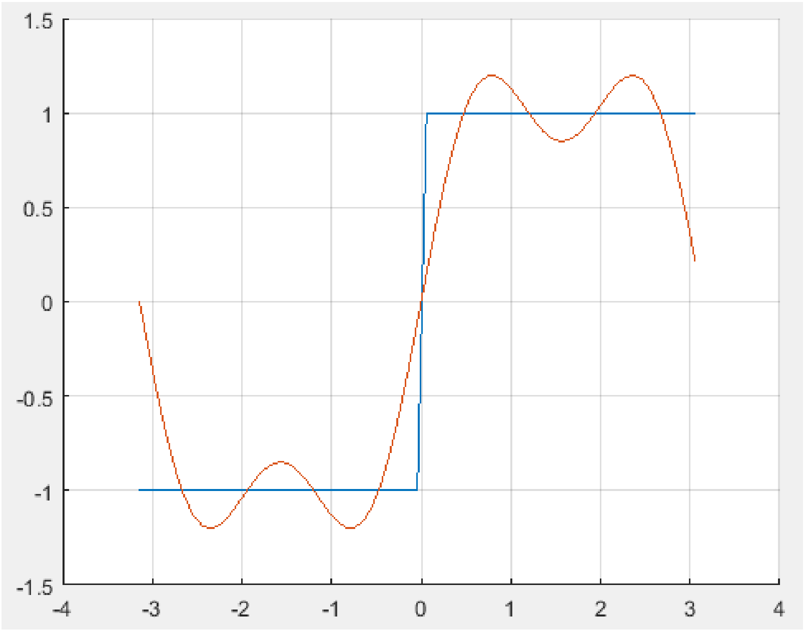
$$\cancel{k} = \frac{4\cancel{k}}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

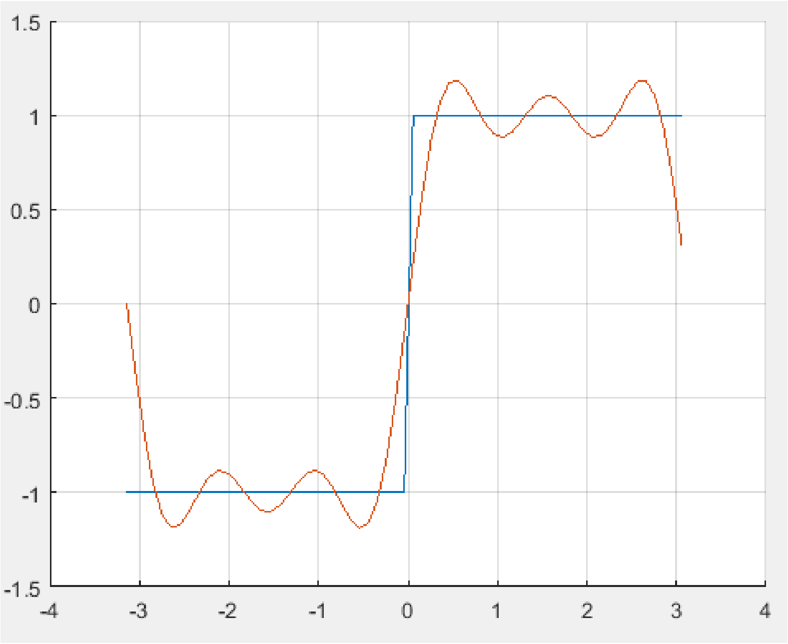
```
%Fourier Series
clc
clear
k=1;
x=-1*pi:0.1:1*pi;
N=1;
f=0;
for n=1:2:N
    fn=(4*k/(n*pi))*sin(n*x);
       f=f+fn;
end

s=size(x,2);
for i=1:s
    if x(i)<0
ff(i)=-k;
    else
  ff(i)=k;
    end
end

figure (1)
hold on
plot(x,ff)
plot(x,f)
```



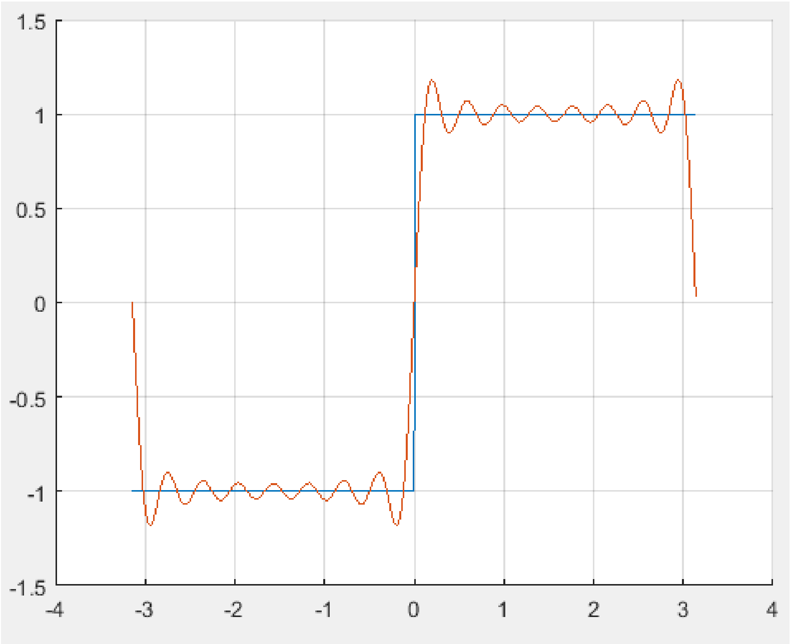
N=1

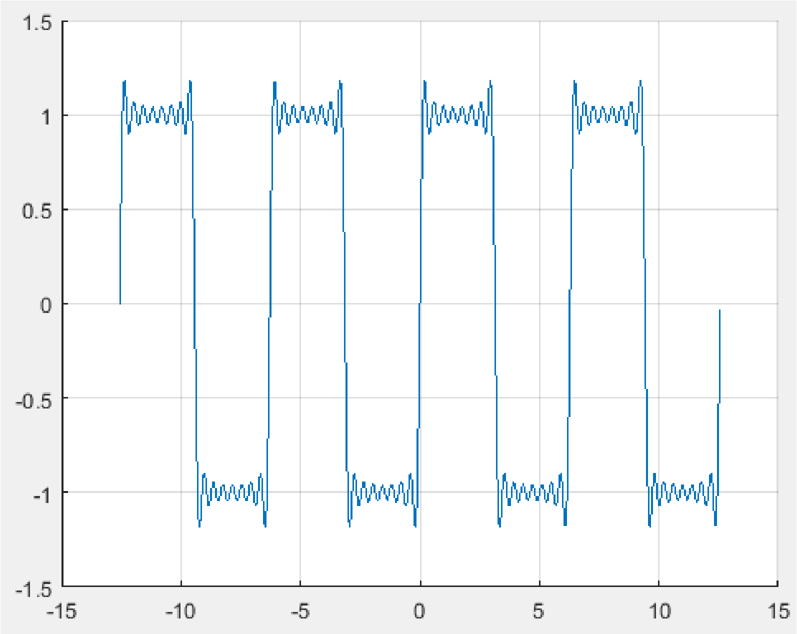


N=3



N=5





N=15

x=[-pi pi]

N=15

x=[-4pi 4pi]

تعامد دنباله های مثلثاتی

دو تابع $\varphi_m(x)$ و $\varphi_n(x)$ را متعامد گویند اگر

$$\int_{-l}^{l} \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = 0 \quad , \quad m \neq n$$

این رابطه برای دنباله های مثلثاتی برقرار است

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0 \quad , \quad m \neq n$$

اثبات در جلسه 13

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0 \quad , \quad m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\underbrace{\cos nx}_{\text{زوج}} \underbrace{\sin mx}_{\text{فرد}}}^{\text{فرد}} \, dx = 0 \qquad \text{برای هر } m, n$$

$$\sin x, \ \sin 2x, \ \cos x, \ \cos 2x, \ \sin 3x, \ \cos 3x, \ \dots$$

هر تابعی که در نظر بگیریم بر مابقی توابع مثلثاتی عمود است،

همگرایی سری فوریه

شرط لازم برای همگرایی سری فوریه مشخص نیست اما شرایط کافی متعددی وجود دارد.

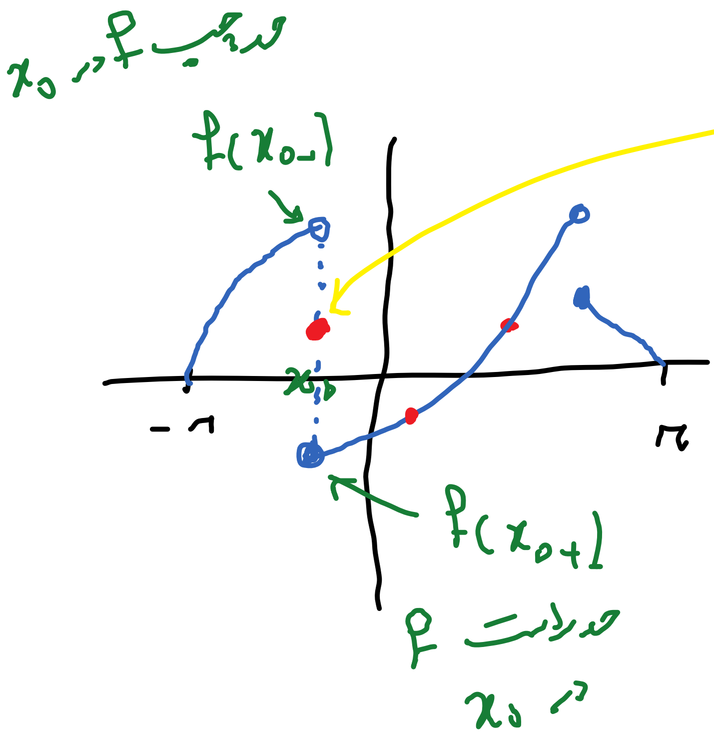
قضیه: تابع $f(x)$ با دوره تناوب 2π را در نظر بگیرید. اگر تابع $f(x)$ به طور تکه‌ای در فاصله $-\pi < x < \pi$ پیوسته باشد (piecewise continous) و در هر نقطه در فاصله $[-\pi, \pi]$ دارای مشتق چپ و راست باشد در این صورت سری فوریه آن همگراست و جمع سری برابر $f(x)$ خواهد بود به جز در نقاط ناپیوستگی x_0 که در آن

حاصلجمع سری برابر است با

$$\frac{f(x_{0+}) + f(x_{0-})}{2}$$

یعنی میانگین تابع $f(x)$ در x_0

در x_0 سری فوریه به نقطه این همگرا می‌شود



اثبات از کتاب خوانده شود.

جلسه شانزدهم

توابع با دوره تناوب دلخواه $P = 2L$

توابعی که تاکنون بررسی کردیم دارای دوره تناوب 2π بودند که سری فوریه آن به صورت زیر شد

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad , \quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

توابع با دوره تناوب دلخواه $P=2L$

$P=2\pi \rightarrow$ مثل $L=\pi$

برای تابع $f(x)$ با تناوب دلخواه $2L$ سری فوریه بصورت زیر خواهد شد:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

اگر بجای L، π بگذاریم
به همان روابط قبل میرسیم

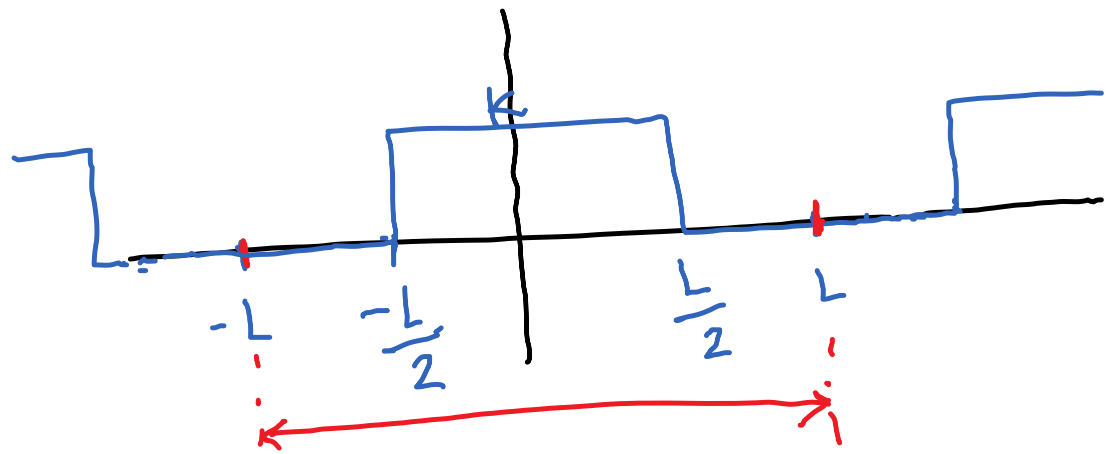
که در آن

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad ,$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\,, \qquad a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

مثال: سری فوریه موج مربعی زیر را بیابید

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & -L < x < -\frac{L}{2} \\ K , & -\frac{L}{2} < x < +\frac{L}{2} \\ 0 , & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$



دوره تناوب این تابع $P=2L$ است.

$f(x)$ تابعی زوج است بنابراین $b_n=0$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{2L}\left[KL\right] = \frac{K}{2}$$

(در کتاب $L=2$ در نظر گرفته است)

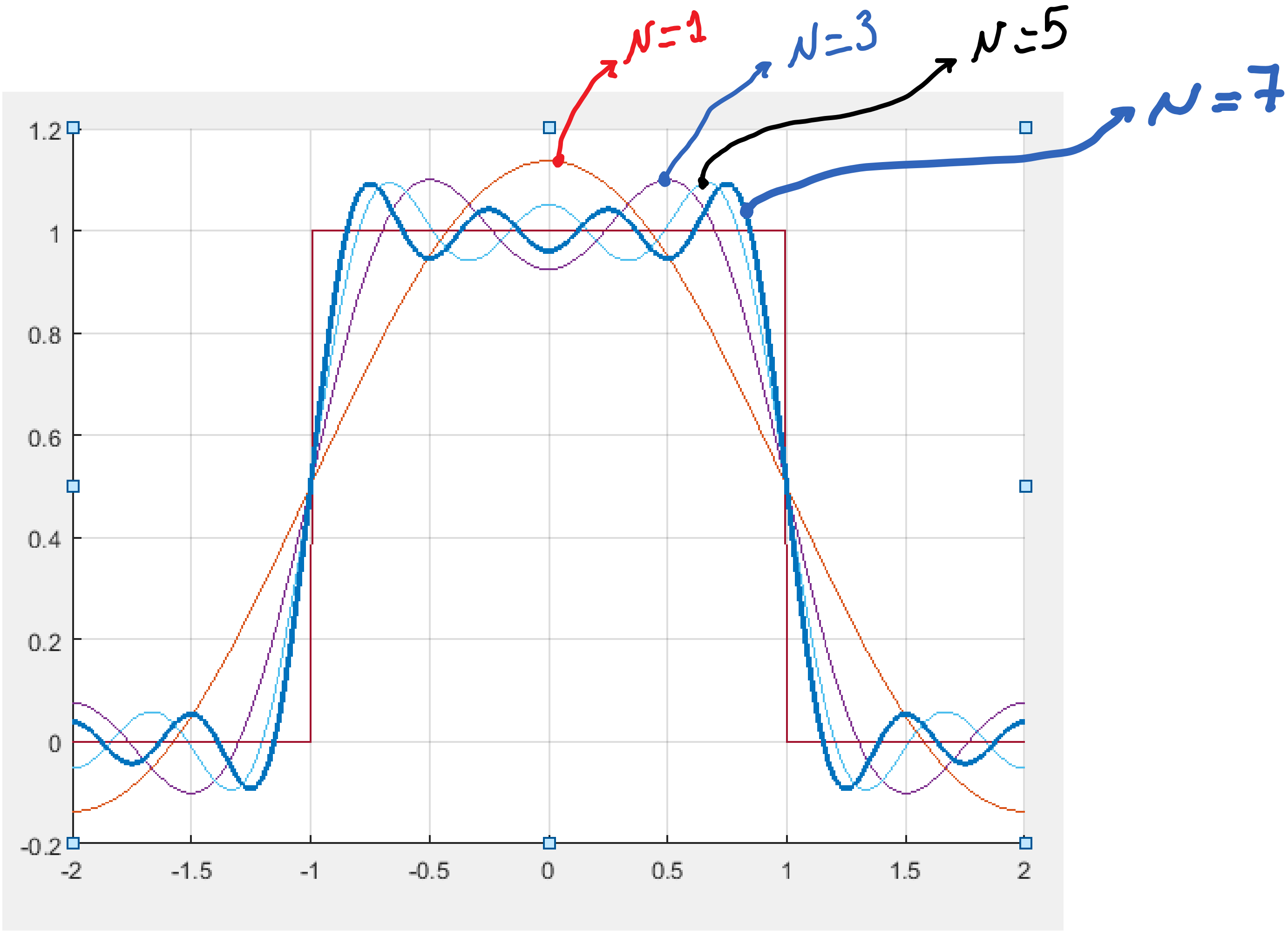
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} K\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

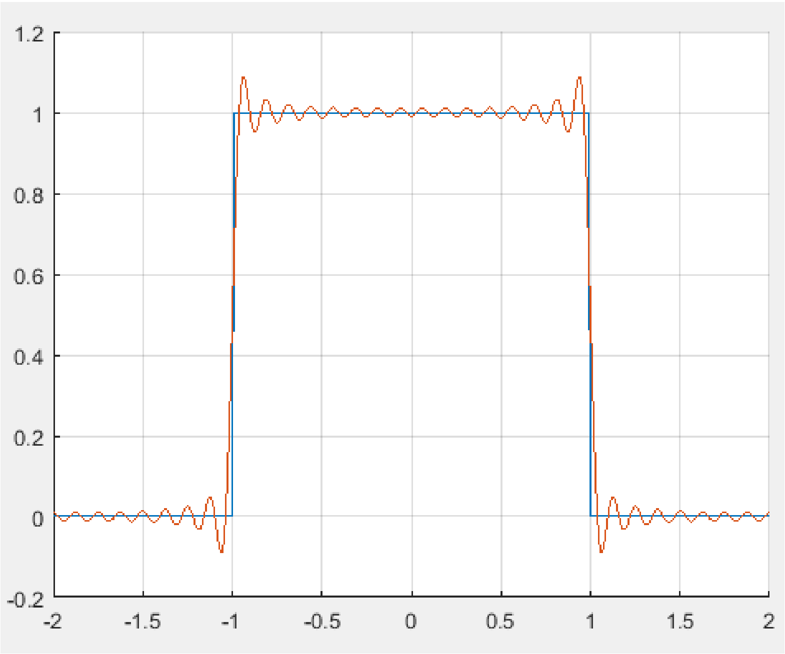
$$= \frac{K}{L}\left[\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{K}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2} - \sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2K}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{K}{2} + \sum_{n=1}^{n}\underbrace{\left(\frac{2K}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)}_{a_n}\cos\frac{n\pi x}{L}}$$

$$a_1 = \frac{2K}{\pi},\quad a_2 = 0,\quad a_3 = \frac{-2K}{3\pi},\quad a_4 = 0,\quad a_5 = \frac{2K}{5\pi},\ \ldots$$

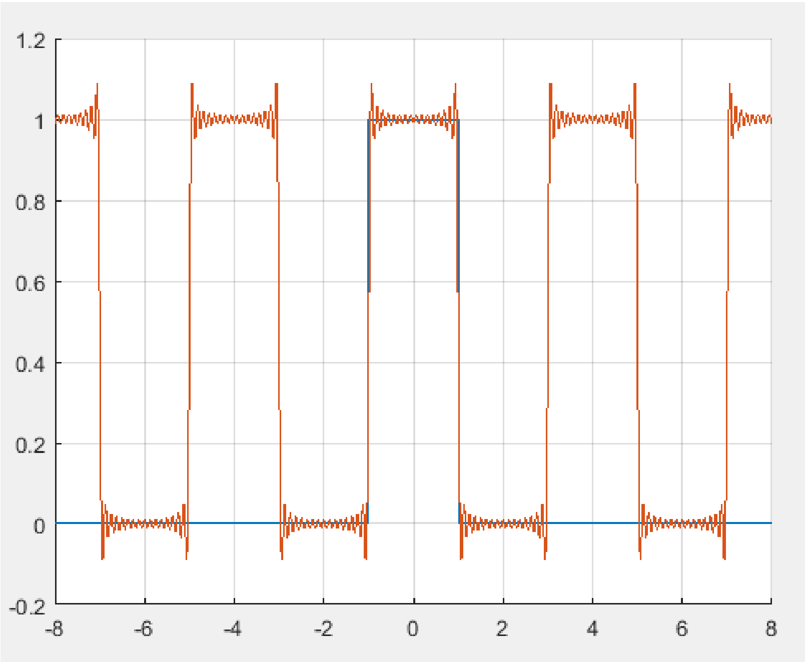
$$f(x) = \frac{K}{2} + \frac{2K}{\pi}\cos\frac{\pi x}{L} - \frac{2K}{3\pi}\cos\frac{3\pi x}{L} + \frac{2K}{3\pi}\cos\frac{5\pi x}{L}\ \ldots$$


N=1
N=3
N=5
N=7
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2



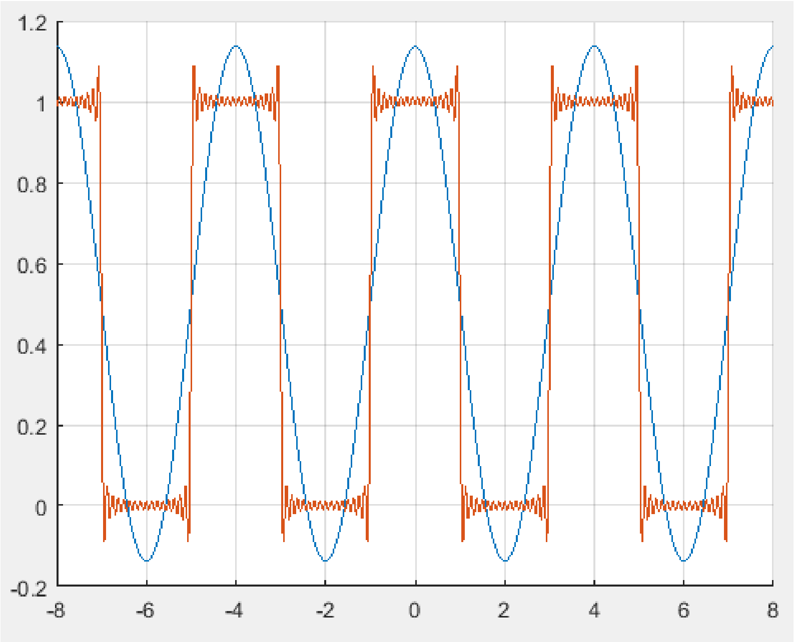
N=31

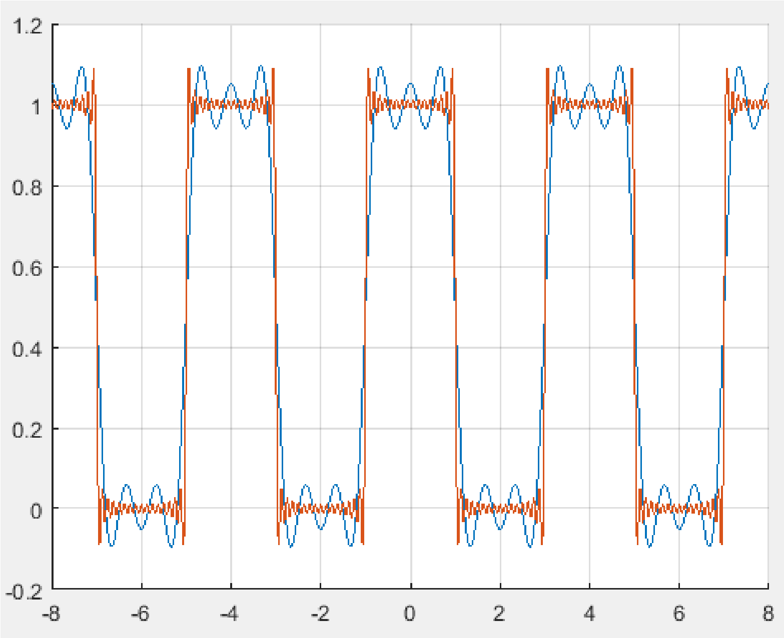
x=[-2 2]



N=31

x=[-8 8]





N=1, 31

x=[-8 8]

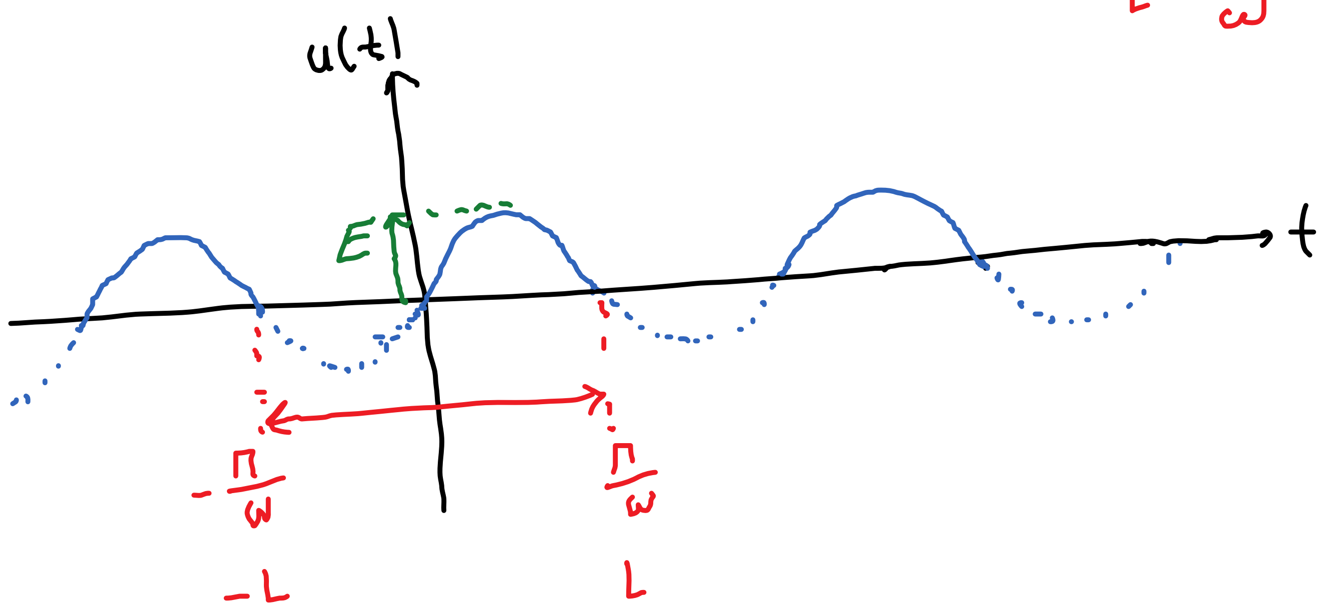
N=5, 31

x=[-8 8]

مثال: یکسوکننده نیم موج، بخش منفی موج را حذف می‌کند.

$$u(t) = \begin{cases} 0, & -L<t<0 \\ E\sin\omega t, & 0<t<L \end{cases}$$

$$L = \frac{\pi}{\omega}$$



$$L = \frac{\pi}{\omega}$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} u(t)\,dt = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E\sin\omega t = \frac{E}{\pi}$$

L

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} u(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E\sin\omega t\cos\frac{n\cancel{\pi}\omega t}{\cancel{\pi}}\,dt$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} u(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} E\sin\omega t\sin n\omega t\,dt$$

$$a_n = \frac{E\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} \sin\omega t \cos n\omega t \, dt$$

$$\rightarrow \sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$a_n = \frac{E\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}\left[\sin(n+1)\omega t + \sin(1-n)\omega t\right]dt$$

$$= \frac{E\omega}{2\pi}\left\{\left[\frac{-\cos(n+1)\omega t}{(n+1)\omega}\right]_0^{\pi/\omega} + \left[\frac{-\cos(1-n)\omega t}{(1-n)\omega}\right]_0^{\pi/\omega}\right\}$$

$$a_n = \frac{E\omega}{2\pi}\left\{ \left[\frac{-\cos(n+1)\omega t}{(n+1)\omega}\right]_0^{\pi/\omega} + \left[\frac{-\cos(1-n)\omega t}{(1-n)\omega}\right]_0^{\pi/\omega} \right\}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{E\omega}{2\pi}\left\{ \left[\frac{-\cos(n+1)\pi}{(n+1)\omega} - \frac{-1}{(n+1)\omega}\right] + \left[\frac{-\cos(1-n)\pi}{(1-n)\omega} - \frac{-1}{(1-n)\omega}\right] \right\}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{E\omega}{2\pi}\left\{ \frac{1-\cos(n+1)\pi}{(n+1)\omega} + \frac{1-\cos(1-n)\pi}{(1-n)\omega} \right\}$$

$n=1,3,5,\dots \longrightarrow a_n = 0$, $\qquad n=2,4,\dots \longrightarrow a_n = \dfrac{2E}{(n-1)(n+1)\pi}$

بطور مشابه : $\longrightarrow \quad b_1 = \dfrac{E}{2}$, $\quad n=2,3,4,\dots \longrightarrow b_n = 0$

$$\sin a \sin b = \left(\frac{e^{ai} - e^{-ai}}{2i}\right)\left(\frac{e^{bi} - e^{-bi}}{2i}\right)$$

$$= \frac{-1}{4}\left[\underline{e^{(a+b)i}} - \underline{e^{(a-b)i}} - \underline{e^{-(a-b)i}} + \underline{e^{-(a+b)i}}\right]$$

$$= \frac{-1}{2}\left[\frac{e^{(a+b)i} + e^{-(a+b)i}}{2} - \frac{e^{(a-b)i} + e^{-(a-b)i}}{2}\right]$$

$$= \frac{-1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

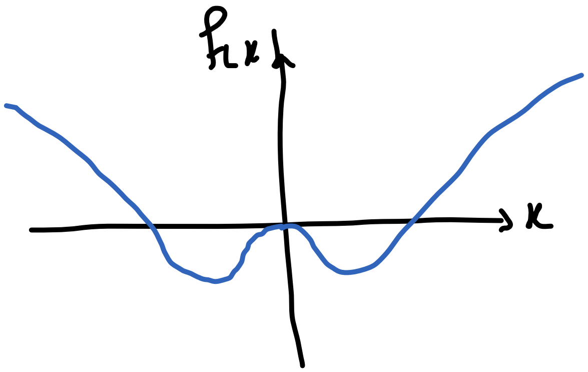
$$1.\quad \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$2.\quad \cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$3.\quad \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$4.\quad \cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

سری فوریه توابع زوج

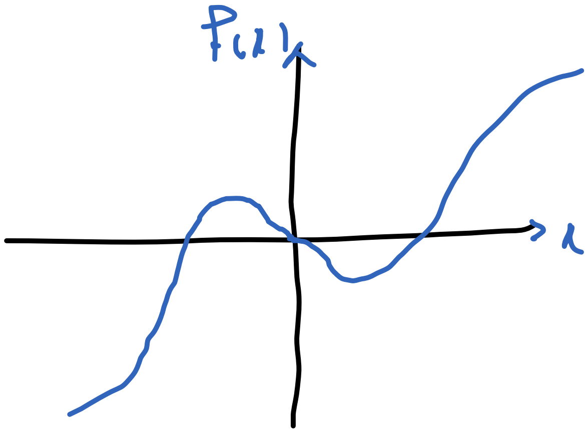


$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \quad , \qquad b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

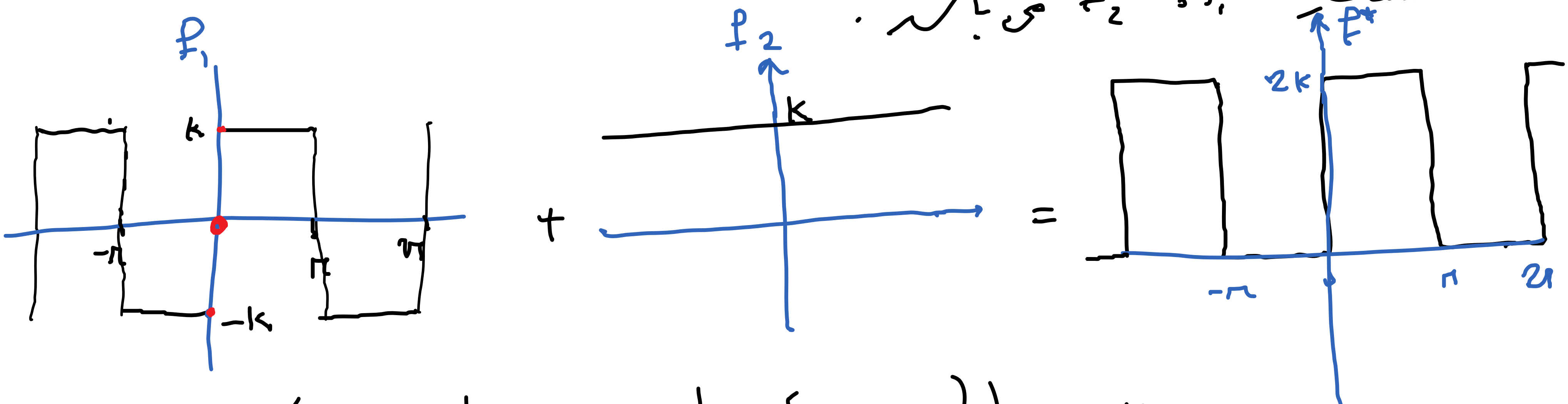
سری فوریه توابع فرد



$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \quad , \quad a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \overbrace{f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}}^{\text{زوج}}\, dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

قضیه : ضرائب فوریه مجموع $f_1 + f_2$ برابر مجموع ضرایب فوریه متناظر f_1 و f_2 می باشد.



$$f_1(x) = \frac{4K}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

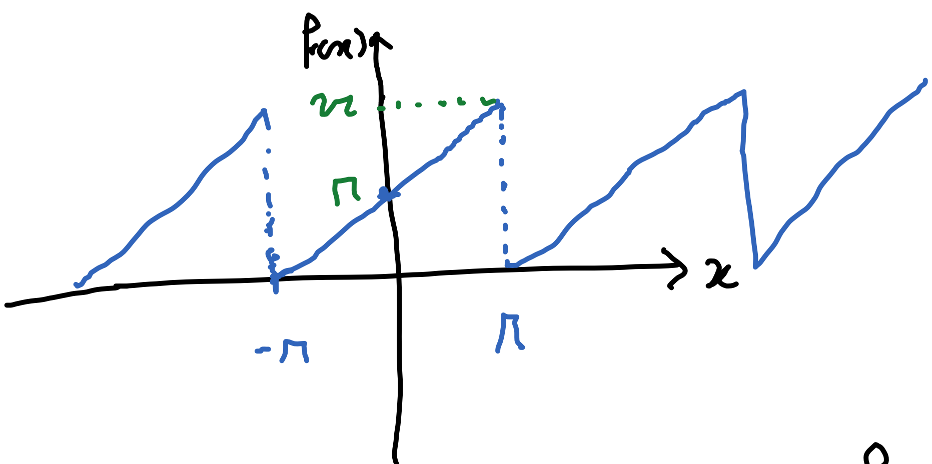
$$f_2(x) = K$$

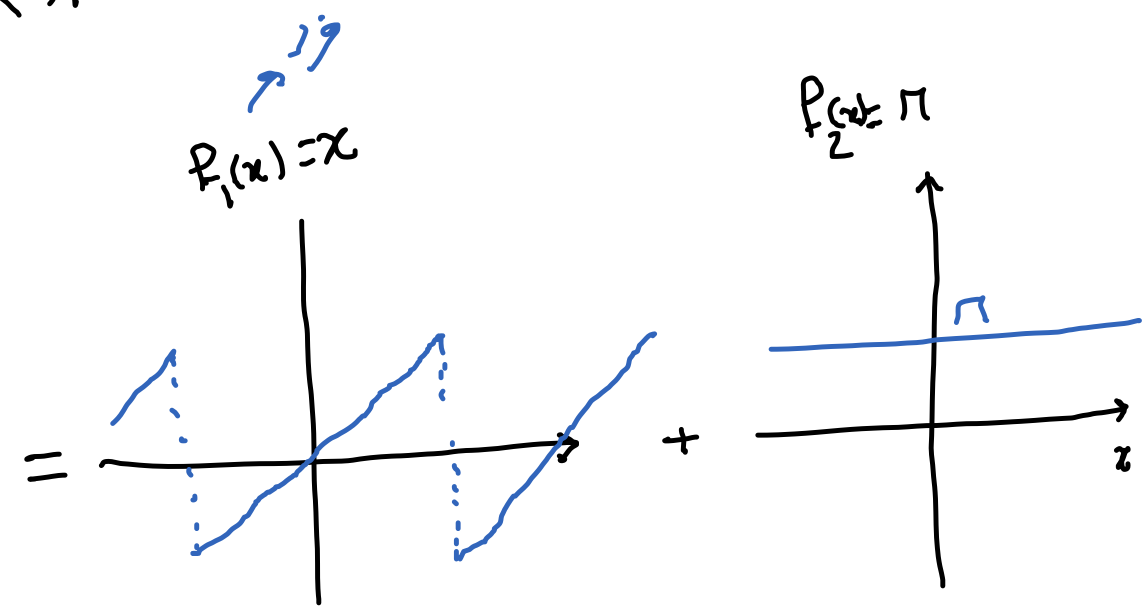
$$\Rightarrow f^* = f_1 + f_2$$

مثال: سری فوریه تابع زیر (دندانه اره‌ای) را محاسبه کنید.

$$f(x) = x + \pi, \quad -\pi < x < \pi$$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$





$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$f_2 = \pi$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \overset{v}{x}\,\overbrace{\sin nx\,dx}^{du}$$

$$\int v\,du = [uv] - \int u\,dv$$

$$du = \sin nx\,dx \rightarrow u = \frac{-1}{n}\cos nx$$

$$v = x \rightarrow dv = dx$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\cos nx}{n}\,dx\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\left[\sin nx\right]_0^{\pi}\right\} = -\frac{2}{n}\cos n\pi$$

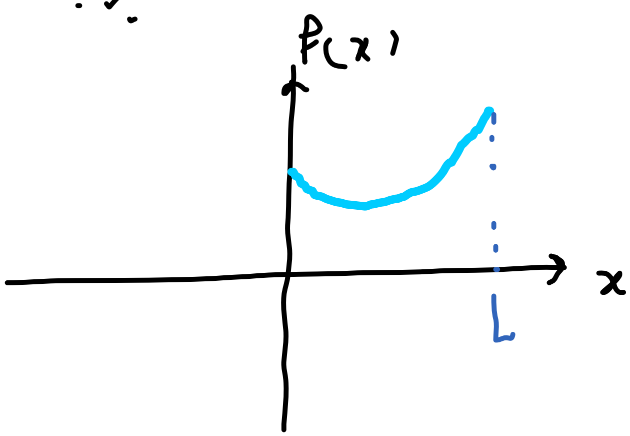
$$f(x) = \pi + 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \dots\right)$$

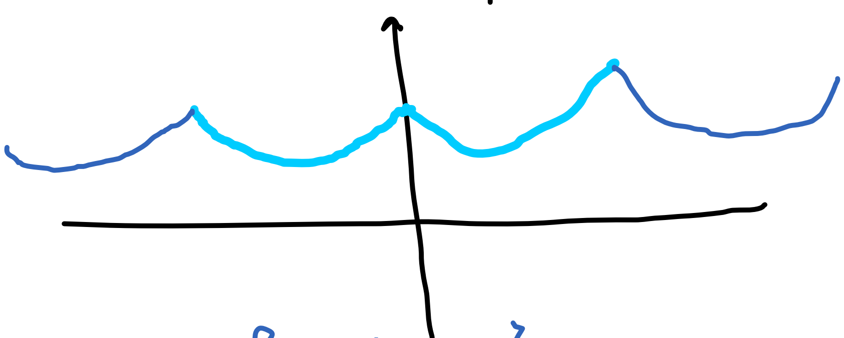
Half Range expansion

بسط نیم دامنه

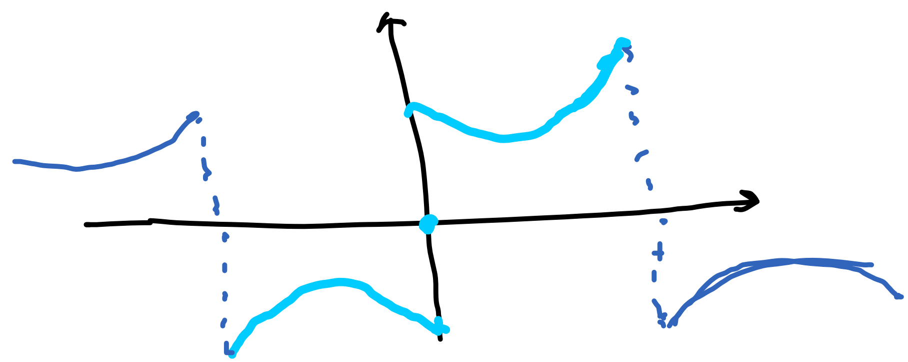
تابع دلخواه $f(x)$ که در بازه $0<x<L$ تعریف شده است را در تحلیل به

می‌توان این تابع را به صورت یک تابع زوج یا فرد گسترش داد.





بسط زوج تابع $f(x)$



بسط زوج تابع $f(x)$

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & 0<x<L \\ f(-x) & -L<x<0 \end{cases} \quad , \longrightarrow f_1(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{n} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$f_1(x) = f_1(x+2L)$$

بسط فرد تابع $f(x)$

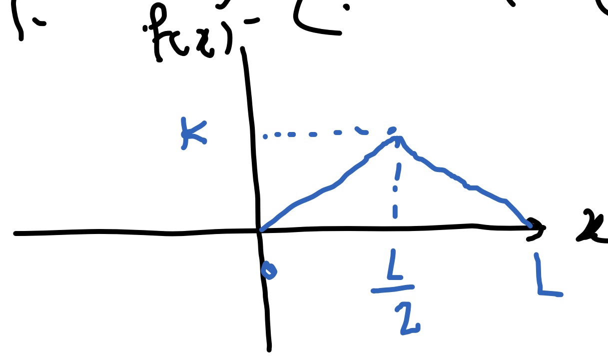
$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & 0<x<L \\ -f(-x) & -L<x<0 \end{cases}$$

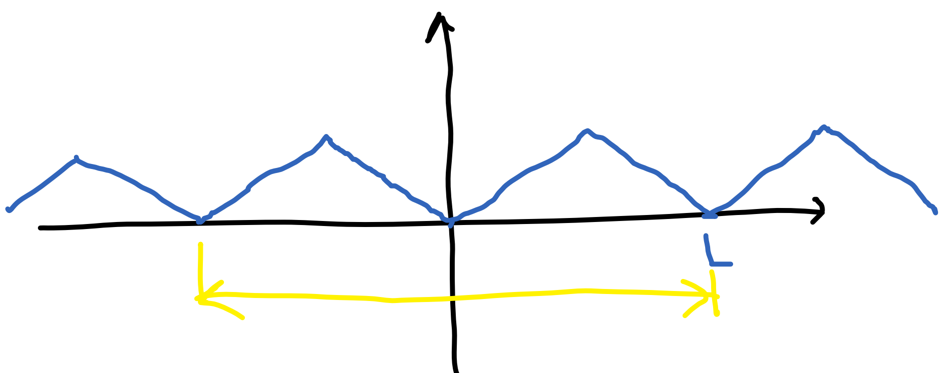
$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{n} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$f_2(x) = f_2(x+2L)$$

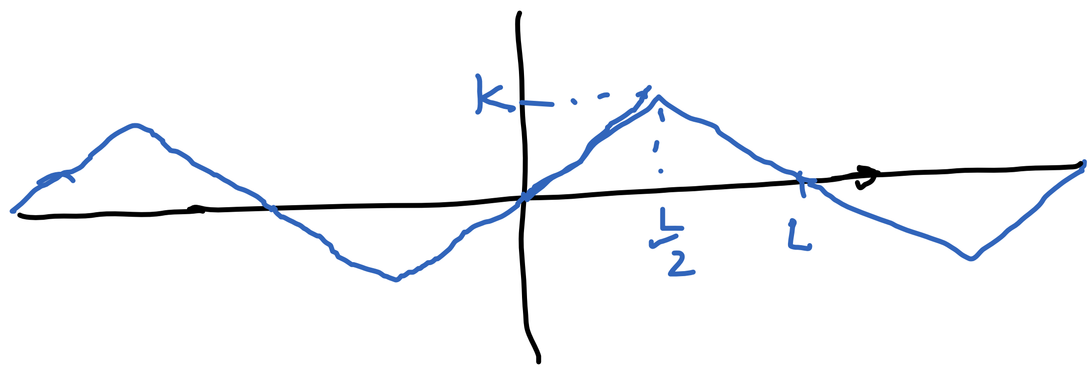
مثال: برای تابع زیر سری نیم دامنه زوج و فرد را محاسبه کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2Kx}{L} & 0<x<\dfrac{L}{2}\\[2mm] \dfrac{2K}{L}(L-x) & \dfrac{L}{2}<x<L\end{cases}$$





سری نیم دامنه زوج



سری نیم دامنه فرد

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

گسترش زوج

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{1}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} x\,dx + \frac{2k}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{L}(L-x)\,dx\right] = \frac{k}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$= \frac{2}{L}\left\{\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2k}{L}x\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L}\frac{2k}{L}(L-x)\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}$$

با استفاده از انتگرال جزء به جزء ... $\Rightarrow a_n = \dfrac{4k}{n^2\pi^2}\left(2\cos\dfrac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right)$

$$f(x) = \frac{K}{2} - \frac{16K}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{L} + \cdots\right)$$

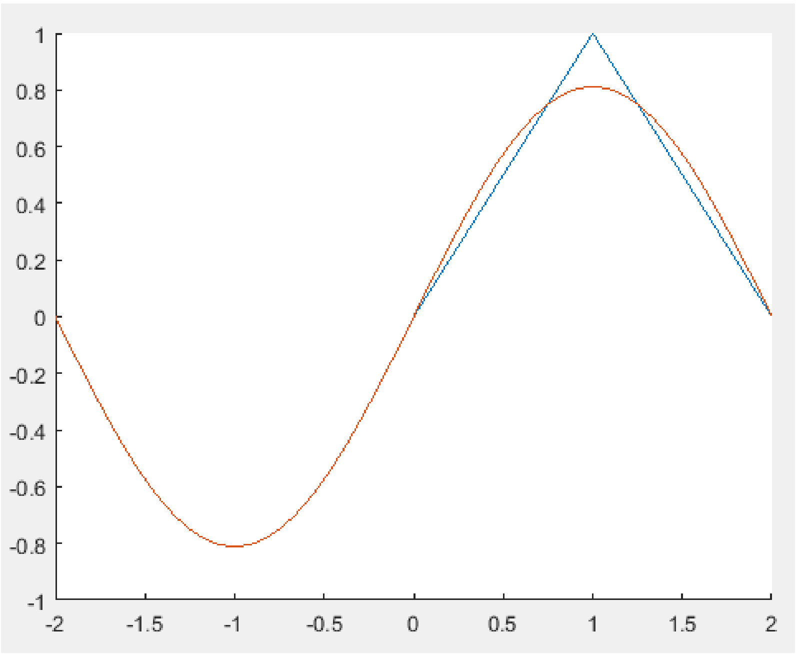
سرحا فرد تابع $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

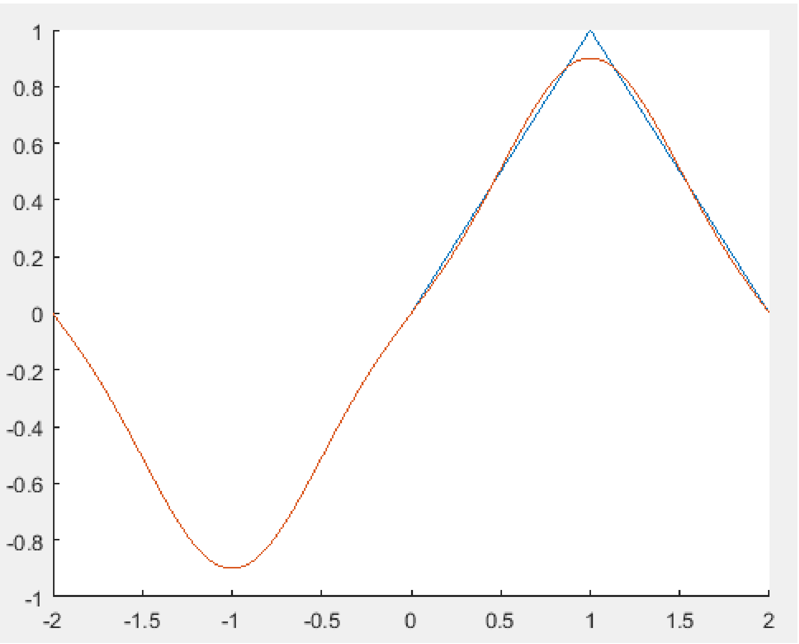
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$= \frac{2}{L}\left[\int_{0}^{L/2}\frac{2K}{L}x\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx + \int_{L/2}^{L}\frac{2K}{L}(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\right]$$

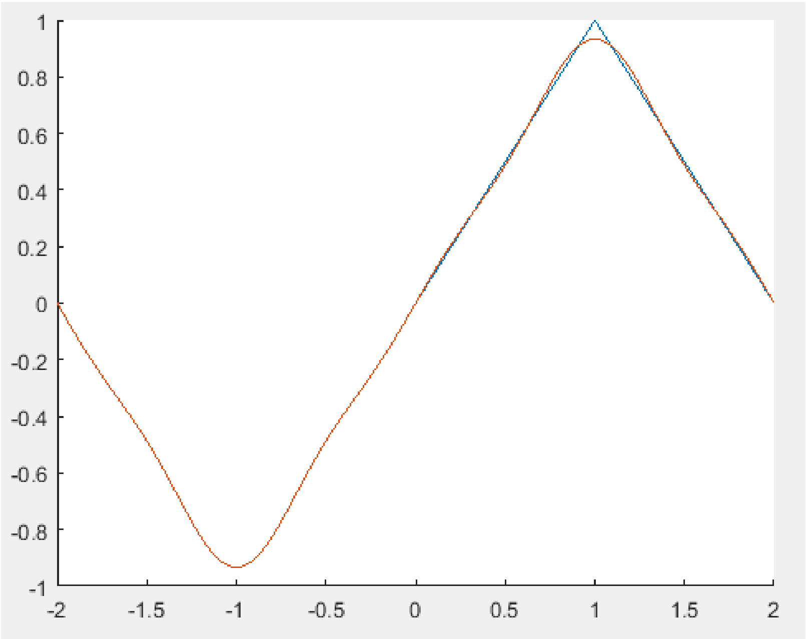
$$= \cdots = \frac{8K}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

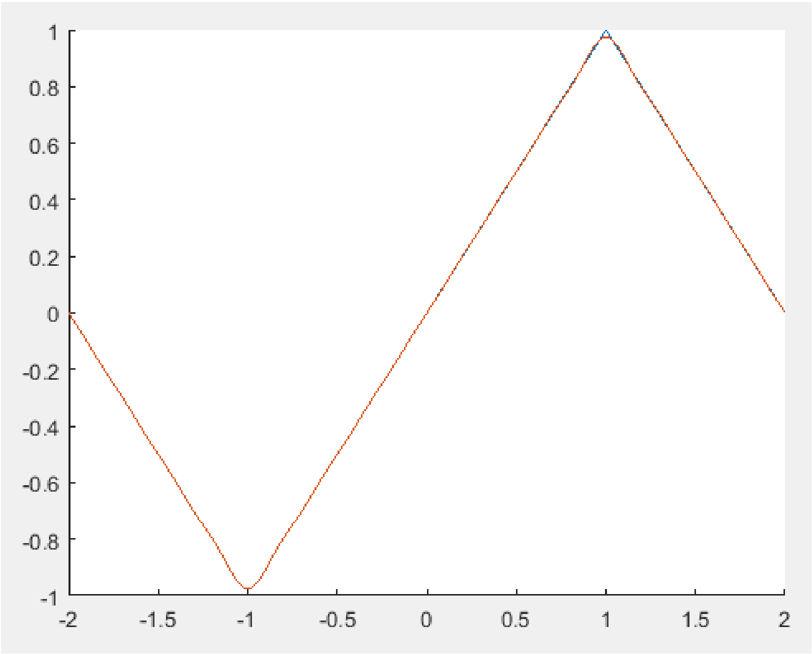
N=1


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

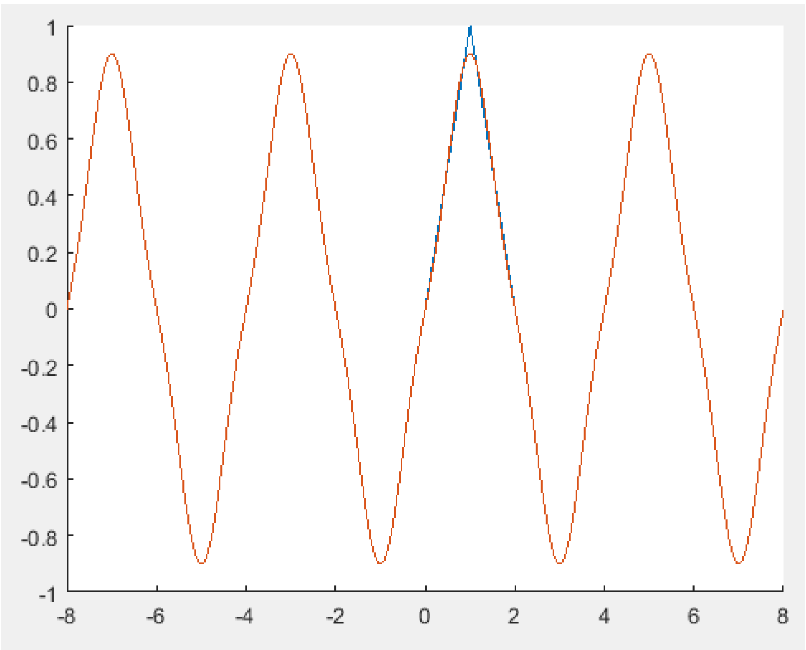
N=3


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

N=5

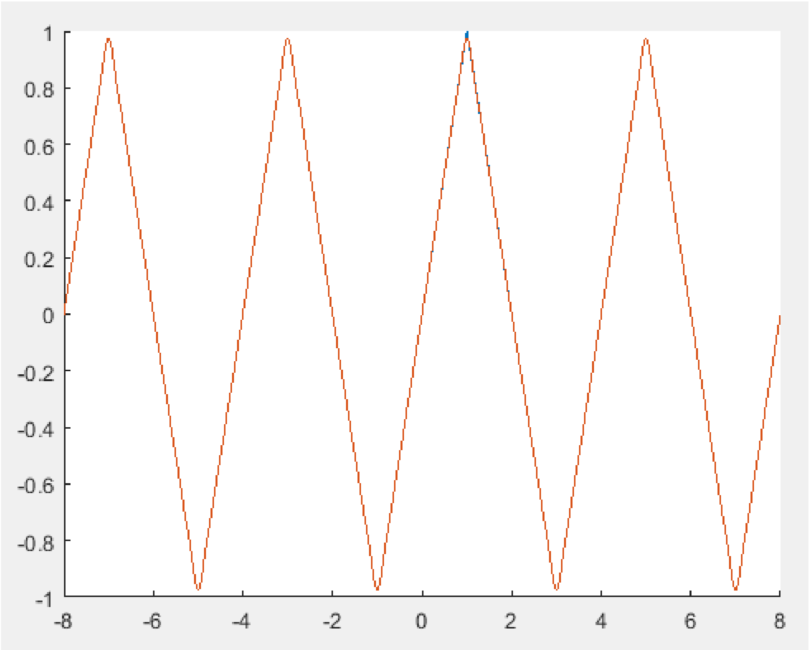

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

N=15



N=3

x=[-8 8]



N=15

x=[-8 8]

سری فوریه مختلط

داشتیم

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

از فرمول اویلر داریم

$$\cos nx = \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right)$$

$$\sin nx = \frac{1}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)$$

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \underbrace{\frac{1}{2}(a_n - ib_n)}_{c_n} e^{inx} + \underbrace{\frac{1}{2}(a_n + ib_n)}_{k_n} e^{-inx}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{inx} + k_n e^{-inx}\right), \quad c_0 = a_0$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

شبیه تعریف‌های سری فوریه ضرایب a_n و b_n که قبلاً داشتیم، (فرمولهای اویلر)

$$K_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{inx}\,dx$$

همچنین داریم $K_n = C_{-n}$، نهایتاً داریم

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}$$

$f(x)$ دارای دوره تناوب 2π می‌باشد

سری فوریه مختلط برای دوره تناوب دلخواه $2L$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} \quad , \quad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{L}}\, dx$$

مثال: سری فوریه مختلط تابع

$$f(x) = e^{x} \quad , \quad -\pi < x < \pi$$

$$f(x) = f(x+2\pi)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x} e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}\, dx$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{1-in}\left[e^{(1-in)x}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-in)}\left[e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}\right] =$$

$$= \frac{1+in}{2\pi(1+n^2)}\left[e^{\pi}e^{-in\pi} - e^{-\pi}e^{in\pi}\right] = \frac{(1+in)(-1)^n}{2\pi(1+n^2)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)$$

$$e^{in\pi} = \cos n\pi + i\,\cancel{\sin n\pi}^{\,0} = (-1)^n$$

$$e^{-in\pi} = (-1)^n$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} =$$

$$= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{(1+in)}{1+n^2} e^{inx}$$

سری فوریه حقیقی

$$a_n = c_n + c_{-n} , \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

$$a_0 = c_0$$

$$c_n = \frac{(1+in)(-1)^n}{2\pi(1+n^2)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{(1+\cancel{in})(-1)^n}{2\pi(1+n^2)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) + \frac{(1-\cancel{in})(-1)^n}{2\pi(1+n^2)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)$$

$$= \frac{2(-1)^n\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)}{2\pi(1+n^2)} = \frac{(-1)^n\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)}{\pi(1+n^2)}$$

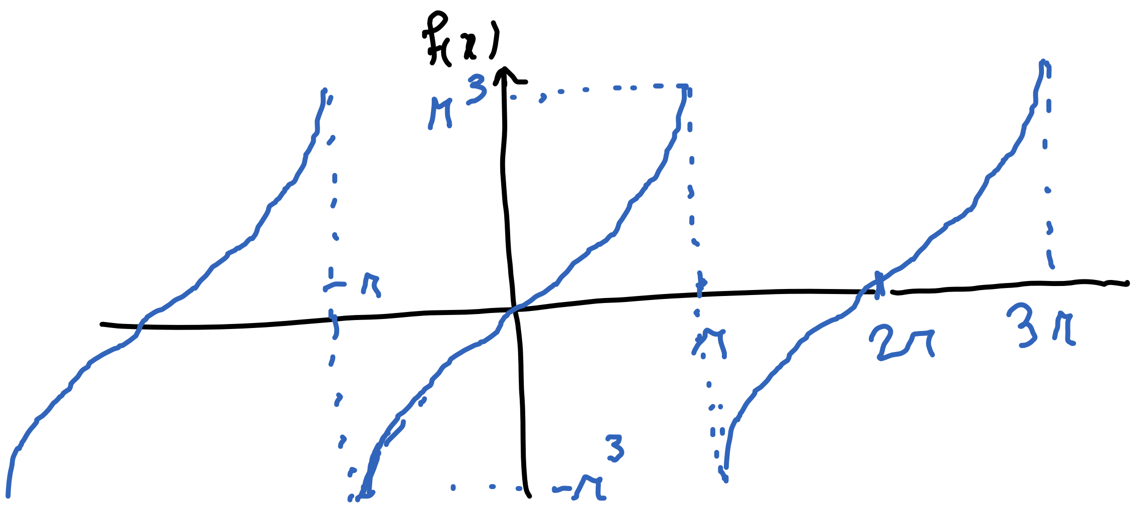
$$b_n = i\left(c_n - c_{-n}\right) = \frac{-(-1)^n n\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)}{\pi(1+n^2)}$$

$$e^{x} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \left(\cos nx - \sin nx \right)$$

مثال: سری فوریه تابع $f(x)$ زیر را بنویسید.

$$f(x) = x^3 , \quad -\pi < x < \pi , \quad f(x+2\pi) = f(x)$$



$f(x)$ یک تابع فرد.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin nx \, dx$$

Kronecker Formula — فرمول کرونکر

اگر $p(x)$ یک چندجمله‌ای از مرتبه m باشد و $f(x)$ یک تابع پیوسته دلخواه.

$$\int p(x) f(x)\,dx = pF_1 - p'F_2 + p''F_3 - \cdots + (-1)^m p^{(m)} F_{m+1}$$

از $p(x)$ به طور متوالی مشتق گرفته می‌شود تا صفر شود،

$$p'(x) = \frac{dp(x)}{dx}$$

$$F_1 = \int f(x)\,dx, \quad F_2 = \int F_1(x)\,dx, \quad \ldots, \quad F_3 = \int F_2(x)\,dx$$

$$\int x^3 \sin nx \, dx$$

و

$$P(x) = x^3, \quad P'(x) = 3x^2, \quad P'' = 6x,$$

$$P''' = 6, \quad P^{(4)} = 0$$

$$f(x) = \sin nx \longrightarrow F_1 = \int \sin nx \, dx = \frac{-1}{n} \cos nx$$

$$F_2 = \frac{-1}{n} \int \cos nx \, dx = \frac{-1}{n^2} \sin nx$$

$$F_3 = \frac{-1}{n^2} \int \sin nx \, dx = \frac{1}{n^3} \cos nx \longrightarrow F_4 = \frac{1}{n^4} \sin nx$$

$$\int x^3 \sin nx \, dx = P F_1 - P' F_2 + P'' F_3 - P''' F_4$$

$$\int x^3 \sin nx \, dx = \frac{x^3}{n}(-\cos nx) - (3x^2)\left(\frac{-1}{n^2}\sin nx\right)$$
$$+ (6x)\left(\frac{1}{n^3}\cos nx\right) - 6\left(\frac{1}{n^4}\sin nx\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin nx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 \sin nx \, dx$$

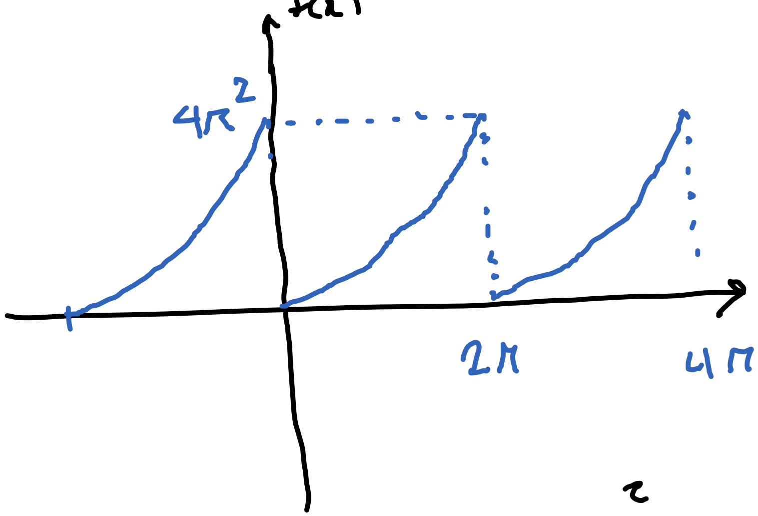
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{n}(-\cos nx) - (3x^2)\left(\frac{-1}{n^2}\sin nx\right)\right.$$
$$\left. + (6x)\left(\frac{1}{n^3}\cos nx\right) - 6\left(\frac{1}{n^4}\sin nx\right)\right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow b_n = -2\cos n\pi \left[\frac{(n\pi)^2 - 6}{n^3} \right] = -2(-1)^n \left[\frac{(n\pi)^2 - 6}{n^3} \right]$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

مثال: سری فوریه $f(x)=x^2$ با دوره تناوب 2π در بازه $[0, 2\pi]$ محاسبه کنید

$$\begin{cases} f(x) = x^2, & 0<x<2\pi \\ f(x+2\pi) = f(x) \end{cases}$$



$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx\,dx = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\,dx = -\frac{4\pi}{n}$$

$$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$$

جلسه هفدهم

انتگرال گیری از سری فوریه یک تابع

قضیه: هرگاه $f(x)$ با دوره تناوب 2π در فاصله $[-\pi,\pi]$ دارای بسط فوریه باشد، می‌توان از طرفین آن انتگرال گرفت

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$F(x) = \int_{\xi}^{x} f(t)\,dt = a_0(x-\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[a_n(\sin nx - \sin n\xi) + b_n(\cos nx - \cos n\xi)\right]$$

$x, \xi \in [-\pi,\pi]$ ، اگر $a_0 \neq 0$ باشد $F(x)$ یک سری فوریه نخواهد بود

به خاطر وجود ترم $a_0 x$ که لزوما متناوب نیست

مشتق گیری از سری فوریه یک تابع

قضیه: اگر تابع $f(x)$ در بازه $-\pi \leq x \leq \pi$ پیوسته و $f(\pi) = f(-\pi)$ باشد
و f' نیز به صورت تکه ای در بازه $[-\pi, \pi]$ پیوسته باشد، آنگاه سری فوریه

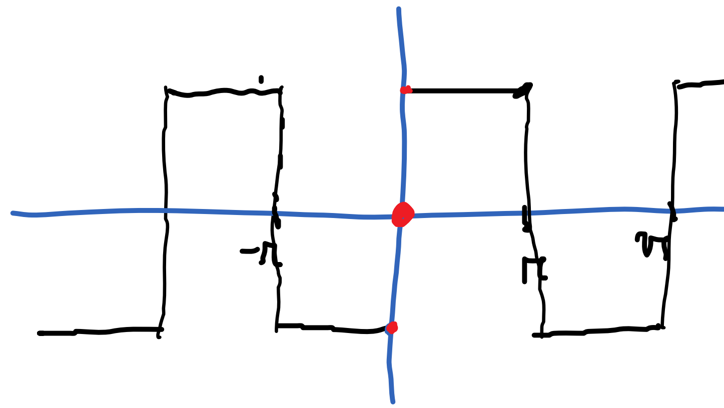
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

در هر نقطه x، $-\pi < x < \pi$ که $f'(x)$ موجود باشد، قابل مشتق گیری است

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

مثال

$$f(x) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0 \\ k, & 0 < x < \pi \end{cases}$$



$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

$$f'(x) = 0 = \frac{4k}{\pi}\left(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots\right)$$ ✗

این رابطه صحیح نیست.

تابع $f(x)$ در بازه $(-\pi, \pi)$ پیوسته نیست، $f(\pi) = f(-\pi)$

مثال: سری فوریه $f(x)=\sin \alpha x$ که $\alpha \in \mathbb{R}$ با دوره تناوب 2π در فاصله $[-\pi,\pi]$ را بدست آورید.

تابع $\sin \alpha x$ یک تابع فرد است

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad , \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin \alpha x \sin nx \, dx$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(\alpha-n)x-\cos(\alpha+n)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\cos(\alpha-n)x-\cos(\alpha+n)x\right]dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(\alpha-n)x - \cos(\alpha+n)x\right]dx$$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha-n)x}{\alpha-n} - \frac{\sin(\alpha+n)x}{\alpha+n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n} - \frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n}\right] - \frac{1}{\pi}\left[\cancel{\frac{\sin 0}{\alpha-n}} - \cancel{\frac{\sin 0}{\alpha+n}}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\alpha\pi\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} - \cos\alpha\pi\underbrace{\sin n\pi}_{0}}{\alpha-n} - \frac{\sin\alpha\pi\cos n\pi + \cos\alpha\pi\underbrace{\sin n\pi}_{0}}{\alpha+n}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n\sin\alpha\pi}{\alpha-n} - \frac{(-1)^n\sin\alpha\pi}{\alpha+n}\right] = \frac{(-1)^n\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{\alpha+n-(\alpha-n)}{\alpha^2-n^2}\right)$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$b_n = \frac{(-1)^n \sin \alpha \pi}{\pi}\left(\frac{\cancel{\alpha}+n-\cancel{\alpha}+n}{\alpha^2-n^2}\right) = \frac{2n(-1)^n \sin \alpha \pi}{\pi(\alpha^2-n^2)}$$

$$f(x) = \sin \alpha x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^n \sin \alpha \pi}{\pi(\alpha^2-n^2)} \sin nx$$

تمرین: سری فوریه $\cos\alpha x$ ، $\alpha \in \mathbb{R}$ را به دست آورید و از روی آن $\csc \alpha\pi$ را محاسبه کنید.

$$\cos\alpha x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_0 = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}$$

$$a_n = \frac{2(-1)^n \alpha \sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha x = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \alpha \sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos nx$$

$$\csc a = \frac{1}{\sin a}$$

$$\csc \alpha\pi = \frac{1}{\sin \alpha\pi} \quad \text{محاسبه}$$

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \alpha \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos nx$$

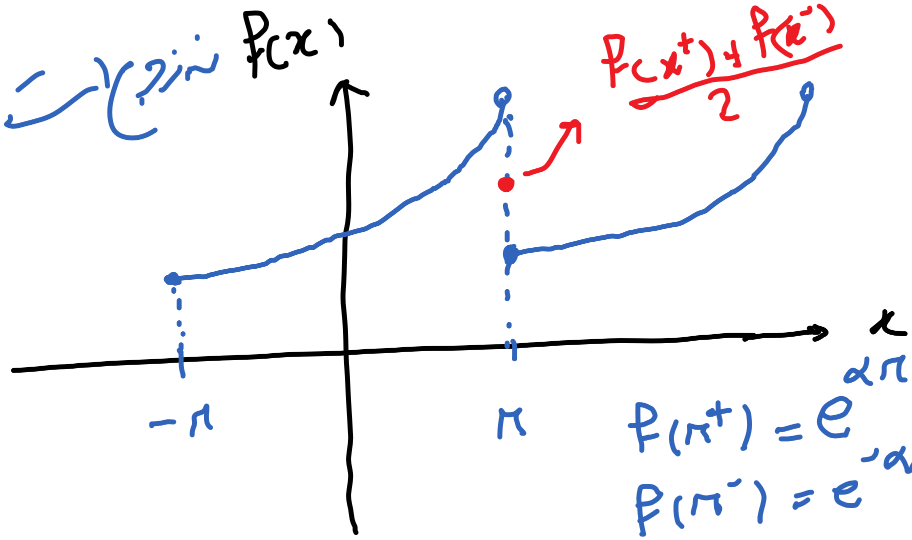
$$f(0) = 1 = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \alpha \sin \alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$$

$$\Rightarrow 1 = \sin \alpha\pi \left(\frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\alpha^2 - n^2)}$$

مثال: سری فوریه $e^{-\alpha x}$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ محاسبه کنید و از روی آن $\coth \alpha\pi$ را محاسبه کنید.

نه زوج است نه فرد.



$f(\pi^+) = e^{\alpha\pi}$

$f(\pi^-) = e^{-\alpha\pi}$

$$e^{-\alpha x} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\alpha x} \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\alpha x} \sin nx \, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\alpha x} \, dx$$

$$\int e^{\alpha x}\cos nx\,dx = Ae^{\alpha x}\cos nx + Be^{\alpha x}\sin nx = g(x)$$

$$g'(x) = e^{\alpha x}\cos nx$$

$$\Rightarrow g'(x) = \alpha Ae^{\alpha x}\cos nx - nAe^{\alpha x}\sin nx + \alpha Be^{\alpha x}\sin nx + nBe^{\alpha x}\cos nx$$

$$\Rightarrow (\alpha A + nB)e^{\alpha x}\cos nx + (-nA+\alpha B)e^{\alpha x}\sin nx = e^{\alpha x}\cos nx$$

$$\alpha A + \frac{n^2 A}{\alpha} = 1 \Rightarrow A\left(\alpha + \frac{n^2}{\alpha}\right) = 1 \Rightarrow A = \frac{\alpha}{\alpha^2+n^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha A + nB = 1 \longrightarrow \\ -nA + \alpha B = 0 \Rightarrow B = \dfrac{nA}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow B = \frac{n}{\alpha^2+n^2}$$

$$\int e^{\alpha x}\cos nx\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{n^2+\alpha^2}\left(\alpha\cos nx + n\sin nx\right)$$

بطور مشابه می‌توان نشان داد که

$$\int e^{\alpha x}\sin nx\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{n^2+\alpha^2}\left(\alpha\sin nx - n\cos nx\right)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\alpha x}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-\alpha x}}{n^2+\alpha^2}\left(-\alpha\cos nx + n\sin nx\right)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi(n^2+\alpha^2)}\left\{\left[e^{-\alpha\pi}\left(-\alpha\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} + n\underbrace{\sin n\pi}_{0}\right)\right] - \left[e^{\alpha\pi}\left(-\alpha\underbrace{\cos(-n\pi)}_{(-1)^n} + n\underbrace{\sin(-n\pi)}_{0}\right)\right]\right\}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi(n^2+\alpha^2)}\left\{\left[e^{-\alpha\pi}\left(-\alpha\cos n\pi + n\cancelto{0}{\sin n\pi}\right)\right] - \left[e^{\alpha\pi}\left(-\alpha\cos(-n\pi) + n\cancelto{0}{\sin(-n\pi)}\right)\right]\right\}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi(n^2+\alpha^2)}\left[-\alpha e^{-\alpha\pi}(-1)^n + \alpha e^{\alpha\pi}(-1)^n\right]$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\alpha(-1)^n\left(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}\right)}{\pi(n^2+\alpha^2)}, \quad a_0 = \frac{1}{2\alpha\pi}\left(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}\right)$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\alpha x}\,dx=\frac{1}{2\alpha\pi}\left(e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}\right)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\alpha x}\sin nx\,dx=\frac{n(-1)^n}{\pi(\alpha^2+n^2)}\left(e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=e^{-\alpha x}=\left(e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}\right)\left\{\frac{1}{2\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi(\alpha^2+n^2)}\left(\alpha\cos nx+n\sin nx\right)\right\}$$

$$\cosh a=\frac{e^{a}+e^{-a}}{2},\quad \sinh a=\frac{e^{a}-e^{-a}}{2},\quad \coth\alpha\pi=\frac{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi}}$$

تابع $f(x)$ در $x=\pi$ ناپیوستگی دارد بنابراین مقدار سری فوریه در $x=\pi$ برابر است با $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

$$f(x)=e^{-\alpha x}=\left(e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}\right)\left\{\frac{1}{2\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi(\alpha^2+n^2)}\left(\alpha\underbrace{\cos n x}_{(-1)^n}+n\underbrace{\sin n x}_{0}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi}}{2}=\left(e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}\right)\left\{\frac{1}{2\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha(-1)^n}{\pi(\alpha^2+n^2)}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi}}{2}=\frac{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}{2}\left\{\frac{1}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+n^2)}\right\}$$

$$\frac{e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi}}{2}=\frac{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}{2}\left\{\frac{1}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+n^2)}\right\}$$

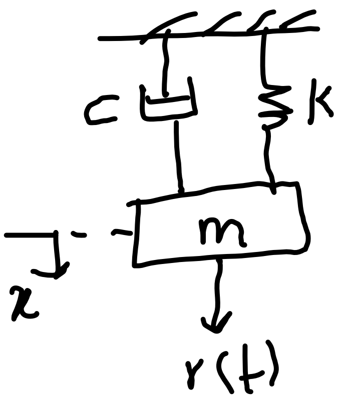
$$\Rightarrow \cosh\alpha\pi=\sinh\alpha\pi\left\{\frac{1}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+n^2)}\right\}$$

$$\Rightarrow \coth\alpha\pi=\left\{\frac{1}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+n^2)}\right\}$$

ارتعاشات اجباری

Forced oscillations

یکی از کاربردهای مهم سری های فوریه در حل معادلات دیفرانسیل می باشد.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = r(t)$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

شرایط اولیه $x(0)$, $\dot{x}(0)$

ورودی $r(t)$

پاسخ همگن معادله ($r(t)=0$)

$$M\ddot{x}+c\dot{x}+Kx=0$$

$$Ms^2+cs+K=0 \rightarrow s^2+\underbrace{\frac{c}{M}}_{2\xi\omega_n}s+\underbrace{\frac{K}{m}}_{\omega_n^2}=0$$

معادله مشخصه

$$s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=0 \rightarrow s_{1,2}=-\xi\omega_n \pm \underbrace{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}_{\omega_d}\, i$$

اگر $s_{1,2}$ موهومی باشد $\xi\omega_n>0$ پس $-\xi\omega_n$ بخش حقیقی آن منفی است ($0<\xi<1$)

اگر $\xi>1$ ، $s_{1,2}$ هر دو حقیقی اند و مقدار آن منفی است $s_1<s_2<0$

$$x_h(t)=Ae^{s_1t}+Be^{s_2t}$$

$$x_h(t) = A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t}$$

$$\Rightarrow x_h(t) = A e^{(-\xi\omega_n + \omega_d i)t} + B e^{(-\xi\omega_n - \omega_d i)t}$$

$$\Rightarrow x_h(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left[A e^{\omega_d t i} + B e^{-\omega_d t i}\right]$$

$$\Rightarrow x_h(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left[A' \cos\omega_d t + B' \sin\omega_d t\right]$$

با اعمال شرایط اولیه $x(0), \dot{x}(0)$ می‌توان A', B' را بدست آورد.

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} - - - - = x_0 \\ - - - = \dot{x}_0 \end{cases} \Rightarrow A', B' = \checkmark$$

$$x_n(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left[A'\cos\omega_d t + B'\sin\omega_d t\right]$$

با گذشت زمان ، $t \to \infty$ ، $e^{-\xi\omega t} \to 0$

$$\left.\begin{array}{l} e^{-\xi\omega_n t} \to 0 \\ t \to \end{array}\right\} \Rightarrow x_n(t) \to 0$$

پس x_n صفر خواهد شد و فقط x_p باقی می‌ماند.

$$x(t) = x_n(t) + x_p(t) = x_p(t)$$

$$t \to \infty$$

جواب کامل معادله برای $r(t)=\sin\omega t$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

$$= e^{-\xi\omega_n t}\left(A'\cos\omega_d t + B'\sin\omega_d t\right) + \underbrace{A\sin\omega t + B\cos\omega t}_{x_p}$$

$$\dot{x}(t) = \cdots$$

$$\ddot{x}(t) = \cdots$$

x ، $\dot{x}$ ، $\ddot{x}$ را در معادله ($m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \sin\omega t$)

ضرایب $\sin\omega t$ و $\cos\omega t$ را مساوی قرار داده، دو معادله به دست می‌آید.

دو معادله هم از $x(0)=x_0$ ، $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$ $\leftarrow$

نهایتاً چهار معادله چهار مجهول A, B ، A', B' محاسبه می‌شود.

محاسبه جواب خصوصی بازای $r(t) = \sin \omega t$

با گذشت زمان $x_h \to 0$ پس جواب x_p برای ما مهم است.

$$y'' + 2\xi\omega_n y' + \omega_n^2 y = r(t)$$

$$y_p = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

$$y_p' = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t$$

$$y_p'' = -A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t$$

$$\Rightarrow -A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t + 2\xi\omega_n\overbrace{(A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t)}^{y'}$$

$$+\omega_n^2(A\sin\omega t + B\cos\omega t) = \sin\omega t$$

$$-A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t + 2\xi\omega_n(A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t)$$
$$+\omega_n^2(A\sin\omega t + B\cos\omega t) = \sin\omega t$$

$$\Rightarrow\left[-A\omega^2 - 2B\xi\omega_n\omega + A\omega_n^2\right]\sin\omega t +$$
$$\left[-B\omega^2 + 2A\xi\omega_n\omega + B\omega_n^2\right]\cos\omega t = \sin\omega t$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-A\omega^2 - 2B\xi\omega_n\omega + A\omega_n^2 = 1\\ -B\omega^2 + 2A\xi\omega_n\omega + B\omega_n^2 = 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(\omega_n^2-\omega^2) - B(2\xi\omega\omega_n) = 1\\ B(\omega_n^2-\omega^2) + A(2\xi\omega\omega_n) = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} A(\omega_n^2-\omega^2) - B(2\xi\omega\omega_n) = 1 \\ B(\omega_n^2-\omega^2) + A(2\xi\omega\omega_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{-B(\omega_n^2-\omega^2)}{2\xi\omega\omega_n}$$

$$\Rightarrow \frac{-B(\omega_n^2-\omega^2)^2}{2\xi\omega\omega_n} - B\,2\xi\omega\omega_n = 1$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{(\omega_n-\omega^2)^2+4\xi^2\omega^2\omega_n^2}{2\xi\omega\omega_n}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{B = \frac{-2\xi\omega\omega_n}{(\omega_n-\omega^2)^2+(2\xi\omega\omega_n)^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{+(\omega_n^2-\omega^2)}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\xi\omega\omega_n)^2}}$$

$$y_p = A\sin\omega t + B\cos\omega t = a\sin(\omega t+\beta)$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{+(\omega_n^2-\omega^2)}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\xi\omega\omega_n)^2}\sin\omega t - \frac{2\xi\omega\omega_n}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\xi\omega\omega_n)^2}\cos\omega t$$

$$y_p = a\sin(\omega t+\beta) = a\cos\beta\sin\omega t + a\sin\beta\cos\omega t$$

$$a^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta = a^2$$

$$\tan\beta = \frac{-2\xi\omega\omega_n}{\omega_n^2-\omega^2} \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\frac{-2\xi\omega\omega_n}{\omega_n^2-\omega^2}$$

$$\frac{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\xi\omega\omega_n)^2}{\left[(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\xi\omega\omega_n)^2\right]^2} = \frac{1}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\xi\omega\omega_n)^2} = a^2$$

ورودی

$$r(t) = \sin \omega t \longrightarrow y_p = a \sin(\omega t + \beta)$$

خروجی

$$a = \sqrt{\frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega\omega_n)^2}} \quad , \quad \beta = tg^{-1} \frac{-2\zeta\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = r(t) \xRightarrow{\text{ode45}}$$

متغیرهای حالت

$$\begin{cases} y = y_1 \rightarrow \text{state var} \\ \dot{y} = y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = r(t) - 2\zeta\omega_n y_2 - \omega_n y_1 \end{cases}$$

یک معادله دیفرانسیل مرتبه 2 تبدیل شد به دو معادله دیفرانسیل مرتبه 1

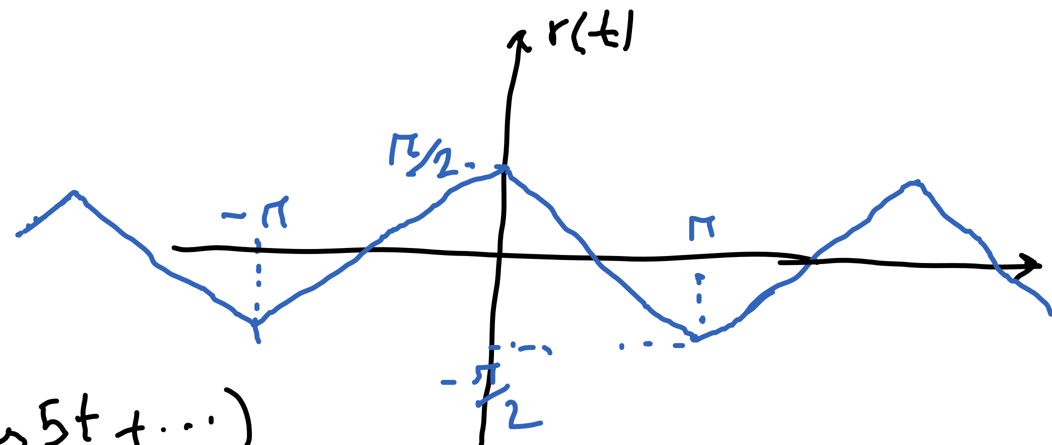
Ex, $m=1$, $c=0.05$, $k=25$

برای سیستم جرم و فنر با معادلات زیر و ورودی نوسانی $r(t)$ شکل زیر، پاسخ حالت ماندگار را بدست آورید.

$$\omega_n^2 \to \omega_n = 5$$

$$y'' + 0.05y' + 25y = r(t),$$

$$r(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} & -\pi < t < 0 \\ -t + \frac{\pi}{2} & 0 < t < \pi \end{cases}$$



$$r(t) = \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow r(t) = \frac{4}{n^2\pi}\cos nt$$

$$y'' + 0.05y' + 25y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi} \cos nt \quad , \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

$$y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt$$

$$y_n' = \ldots$$

$$y_n'' = \ldots$$

$$\Rightarrow \quad A_n = \frac{4(25-n^2)}{n^2\pi D}$$

$$B_n = \frac{0.08}{n\pi D}$$

$$r_n = \frac{4\cos nt}{n^2\pi}$$

$$r_1 \quad r_3 \quad r_5$$

$$y = y_1 + y_3 + y_5 + \ldots$$

$$D = (25-n^2)^2 + (0.02n)^2$$

که

چون معادله از نوع خطی است

$$y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt = C_n \sin(nt + \beta_n)$$

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \frac{4}{n^2 \pi \sqrt{D}}$$

حساب C_n به ازای مقادیر مختلف n

$C_1 = 0.053$

$C_3 = 0.0088$

$\boxed{C_5 = 0.51}$

$C_7 = 0.001$

$C_9 = 0.0003$

$$y = C_1 \sin(t + \beta_1) + C_3 \sin(3t + \beta_3) + \cdots + C_n \sin(nt + \beta_n)$$

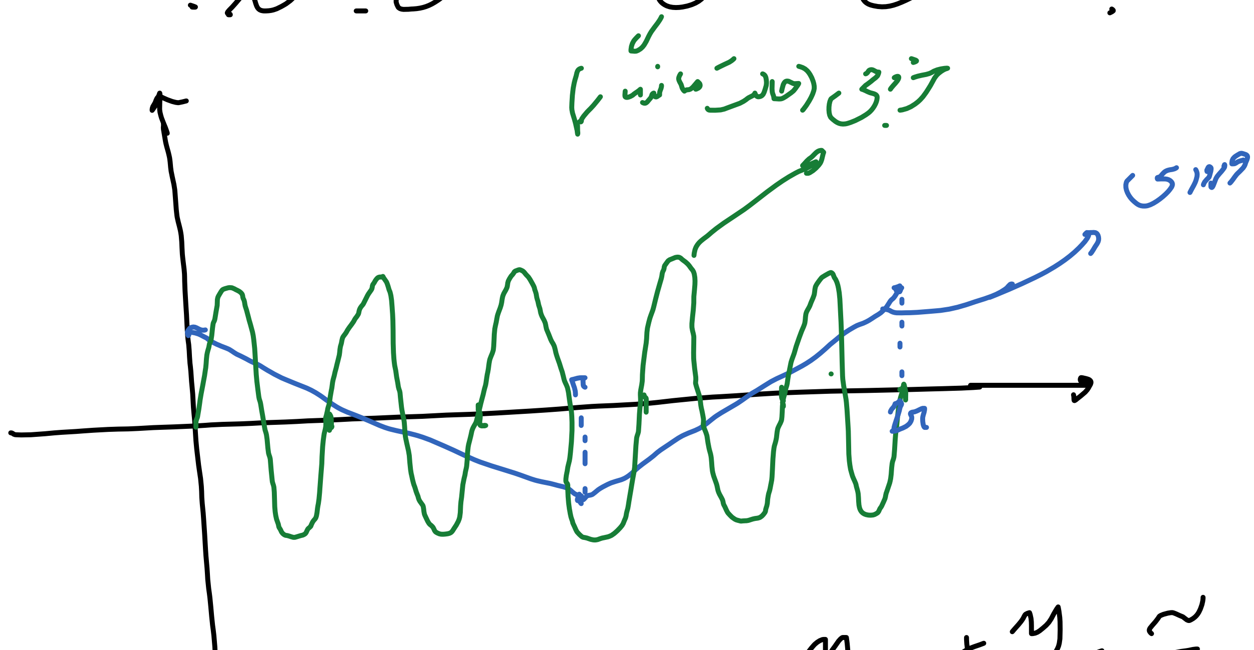
$$D = (25 - n^2)^2 + (0.02n)^2 \qquad 25 - n^2 \to 0$$

$n = 5 = \omega_n$

$$\Rightarrow y \simeq y_5$$

$$y \simeq C_5 \sin(5t + \beta_5)$$

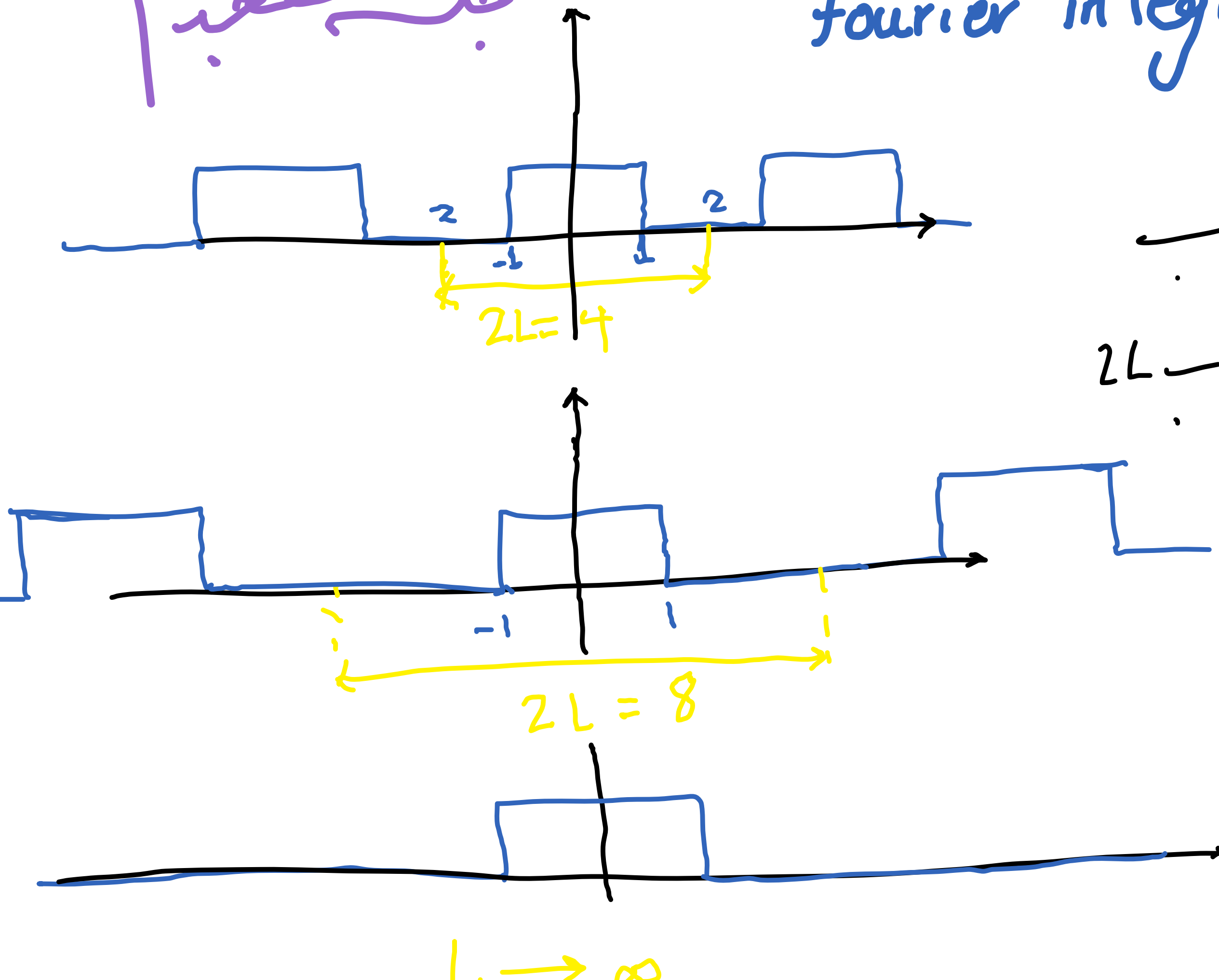
فرکانس خروجی 5 برابر فرکانس ورودی $r(t)$ می باشد.



$$y = y_1 + y_3 + y_5 + y_7 \simeq y_5$$

جلسه هجدهم

انتگرال فوریه Fourier integral



سری فوریه ← برای توابع متناوب

تابع مربعی زیر را در نظر بگیرید با دوره تناوب 2L

$$f_L(x)=\begin{cases}0, & -L<x<-1\\ 1, & -1<x<1\\ 0, & 1<x<L\end{cases}$$

$$f(x)=\lim_{L\to\infty} f_L(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

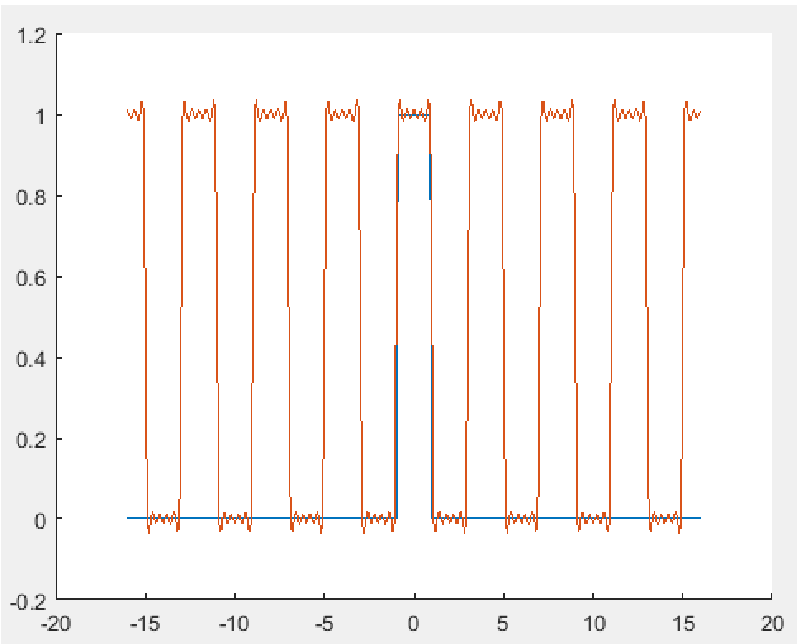
ضرائب فوریه را برای $f_L(x)$ محاسبه می کنیم ، $f_L(x)$ یک تابع زوج است ، $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(x)\,dx = \frac{1}{2L}\int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{L}$$

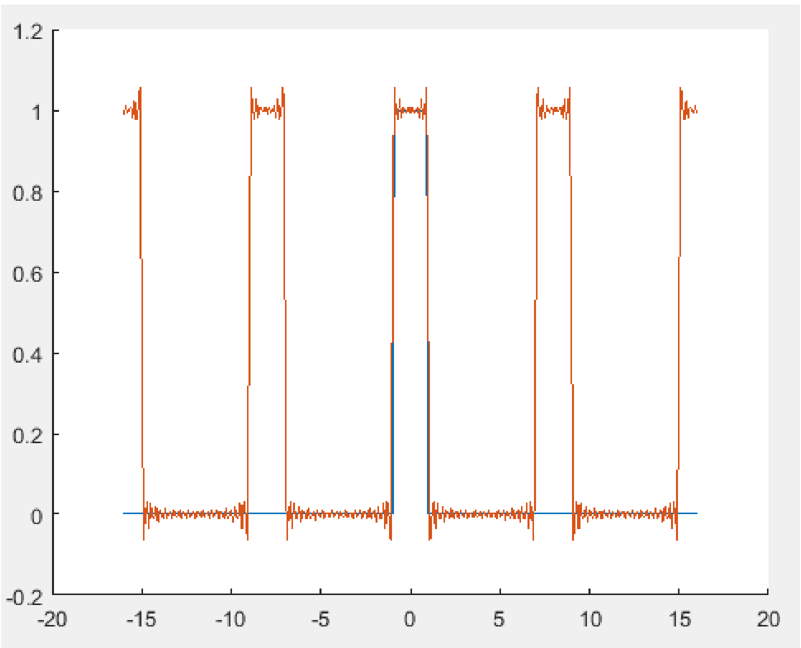
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_L(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{1}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\,\frac{\sin\frac{n\pi x}{L}}{\frac{n\pi}{L}}$$

ببینیم اگر $L \to \infty$ میل کند چه اتفاقی می افتد.

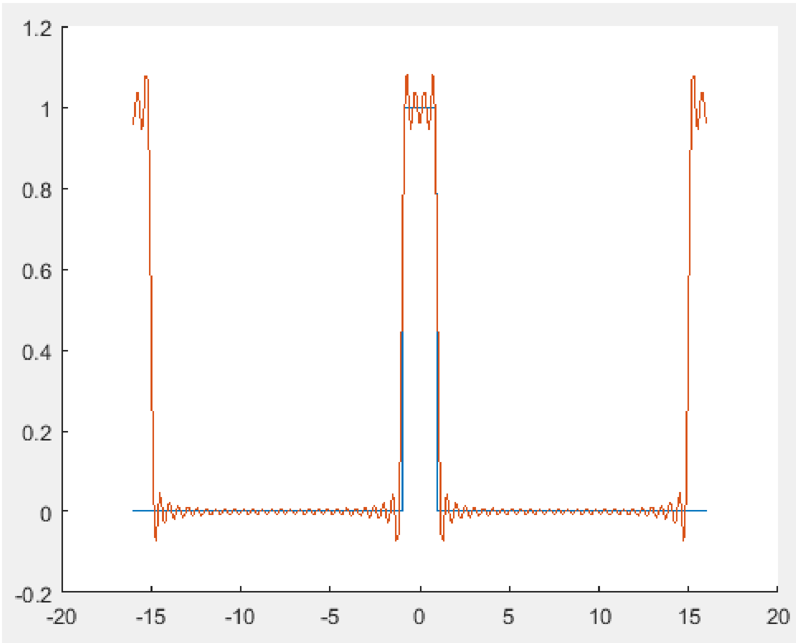
$$f_L(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20

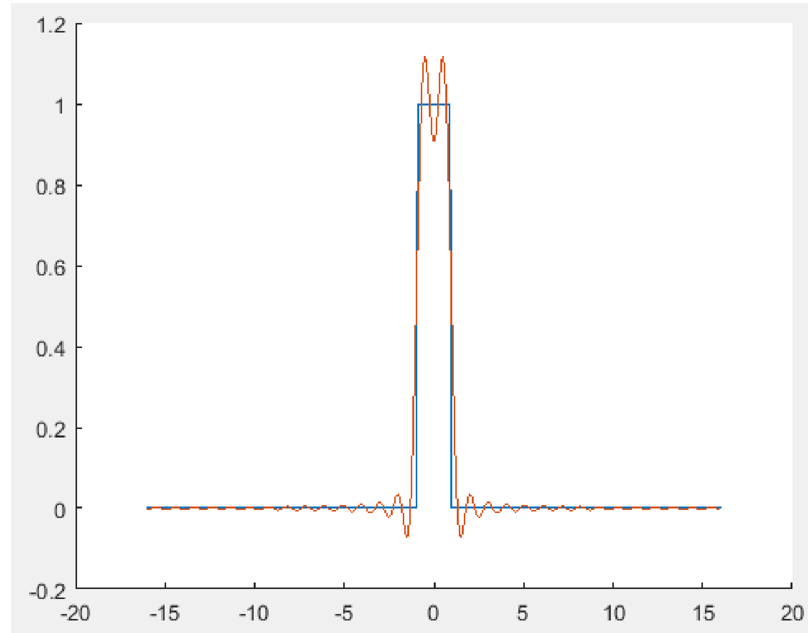
L=2


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20

L=4


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20

$L=8$


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20

$L=16$

حال یک تابع متناوب $f_L(x)$ با دوره تناوب $2L$ در نظر بگیرید. سری فوریه آن به صورت زیر خواهد شد:

$$f_L = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x \right) \quad , \quad w_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(v)\, dv \quad , \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_L(v) \cos w_n v \, dv$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_L(v) \sin w_n v \, dv$$

$$f_L(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(v)\,dv + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\underbrace{\frac{1}{L}}\int_{-L}^{L} f(v)\cos\omega_n v\,dv\right)\cos\omega_n x\right.$$

$$\left. + \left(\underbrace{\frac{1}{L}}\int_{-L}^{L} f(v)\sin\omega_n v\,dv\right)\sin\omega_n x\right]$$

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}$$ داریم

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \frac{\pi}{L} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{L}} = \frac{\Delta\omega}{\pi}$$

$$f_L(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(v)\,dv + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(v)\cos w_n v\,dv\right)\cos(w_n x)\,\Delta w\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(v)\sin w_n v\,dv\right)\sin(w_n x)\,\Delta w\right]$$

فرض کردیم که

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} f_L(x)$$

با فرض اینکه $f(x)$ مطلقاً انتگرال پذیر باشد یعنی مقدار زیر

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 |f(x)|\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b |f(x)|\,dx$$

موجود و متناهی باشد.

پس وقتی $L \to \infty$ عبارت

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(v)\,dv \to 0$$

از طرف دیگر $\frac{1}{L} = \frac{\Delta\omega}{\pi}$ پس وقتی $L \to \infty$ ، $\Delta\omega \to 0$

$$\omega_n \to \omega \quad \text{و} \quad \lim_{\to\infty} \Delta\omega \to d\omega \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \to \int_0^{\infty}$$

$L \to \infty$

$$f_L(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(v)\,dv + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(v)\cos w_n v\,dv\right)\cos(w_n x)\,\Delta w + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(v)\sin w_n v\,dv\right)\sin(w_n x)\,\Delta w\right]$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\cos wx \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\,dv}^{A(w)} + \sin wx \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv\,dv}^{B(w)}\right]dw$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(A(w)\cos wx + B(w)\sin wx\right)dw$$

که به آن نمایش انتگرال فوریه تابع $f(x)$ گفته می‌شود.

قضیه: هرگاه $f(x)$ در هر فاصله متناهی به طور تکه‌ای پیوسته باشد و در هر نقطه دارای مشتق چپ و راست باشد و انتگرال زیر

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^0 |f(x)|\,dx + \lim_{b \to \infty} \int_0^b |f(x)|\,dx$$

محدود باشد، آنگاه $f(x)$ را می‌توان به صورت یک انتگرال فوریه نشان داد.

در نقطه‌ای که $f(x)$ ناپیوسته باشد مقدار انتگرال فوریه برابر است با میانگین حدود چپ و راست $f(x)$ در آن نقطه است.

انتگرال فوریه برای تابع $f(x)$

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left(A(w) \cos wx + B(w) \sin wx \right) dw$$

که در آن

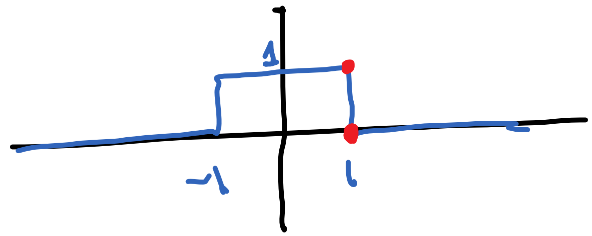
$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wv)\, dv$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin(wv)\, dv$$

Sine integral   تپه منفرد، انتگرال سینوسی

مثال: نمایش انتگرال فوریه را برای تابع زیر بیابید

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ ; & |x| < 1 \\ 0 \ ; & |x| > 1 \end{cases}$$



$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\,dv = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos wv\,dv = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin wv}{w}\right]_{-1}^{1}$$

$$\Rightarrow A(w) = \frac{2\sin w}{\pi w}$$

و

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(v)}_{\text{زوج}}\ \underbrace{\sin wv}_{\text{فرد}}\,dv = 0$$

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x \, d\omega = \int_0^\infty \frac{2\sin\omega}{\pi\omega}\cos\omega x \, d\omega$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}\, d\omega = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \text{ ناپیوستگی} \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega = 1 \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{2}$$

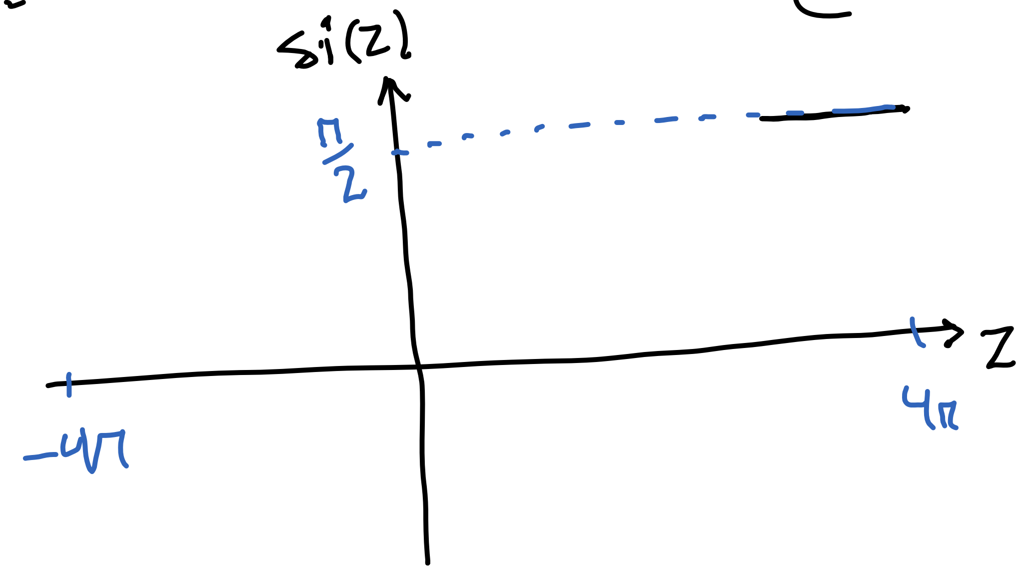
تابع $Si(z)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

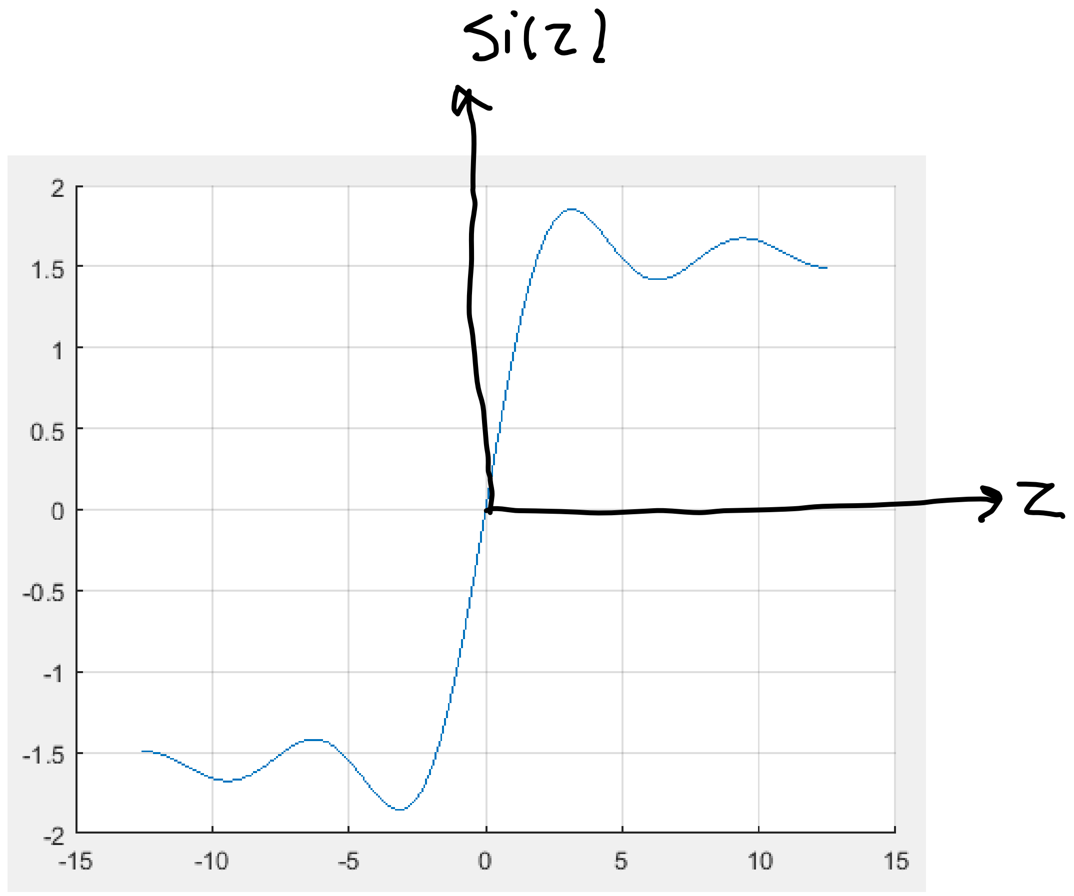
$$Si(z) = \int_0^z \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega$$

به تابع $si(z)$ انتگرال سینوسی گفته می‌شود (sine integral

$$si(z) = \int_0^z \frac{\sin w}{w}\, dw$$

$$\lim_{z \to \infty} si(z) = \frac{\pi}{2}$$

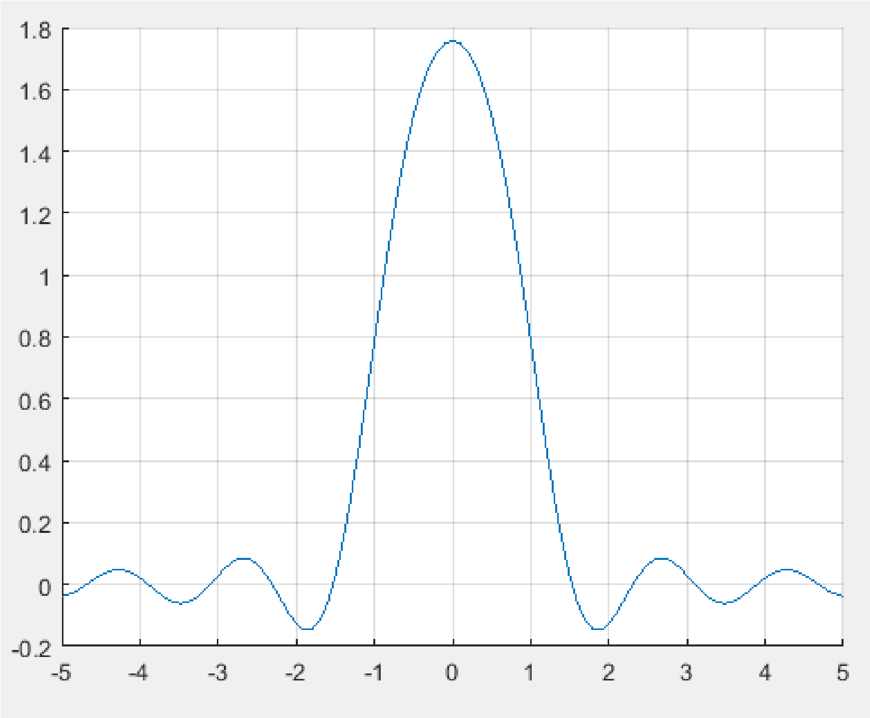



Si(z)
z
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-15
-10
-5
0
5
10
15

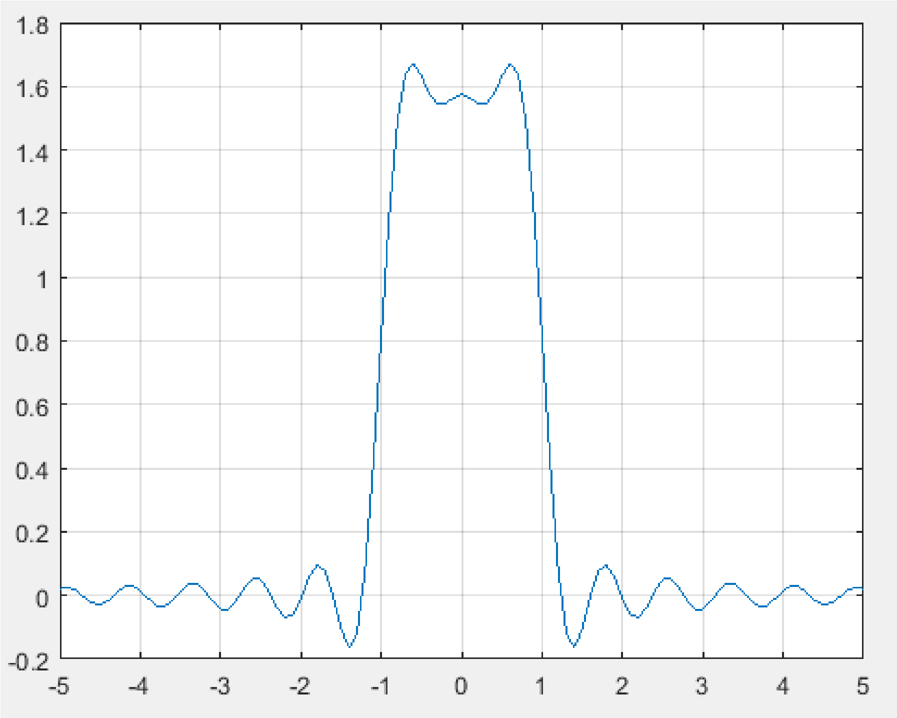
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\omega \cos\omega x}{\omega}\, d\omega$$

a

پس با جایگذاری ∞ با یک مقدار محدود a می‌توان مقدار تقریبی تابع $f(x)$ را محاسبه

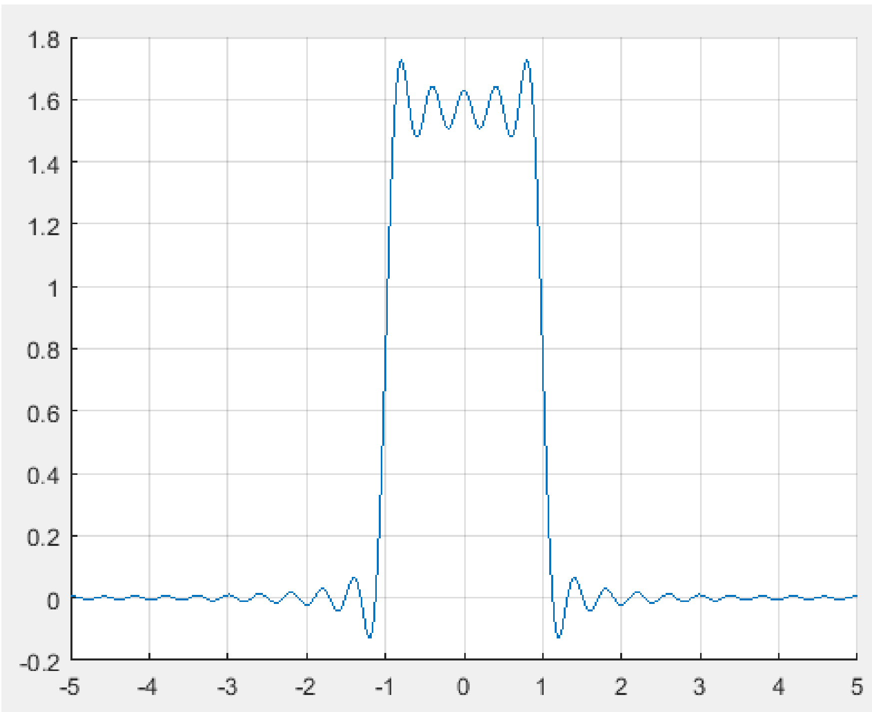

1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

$a=4$


1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

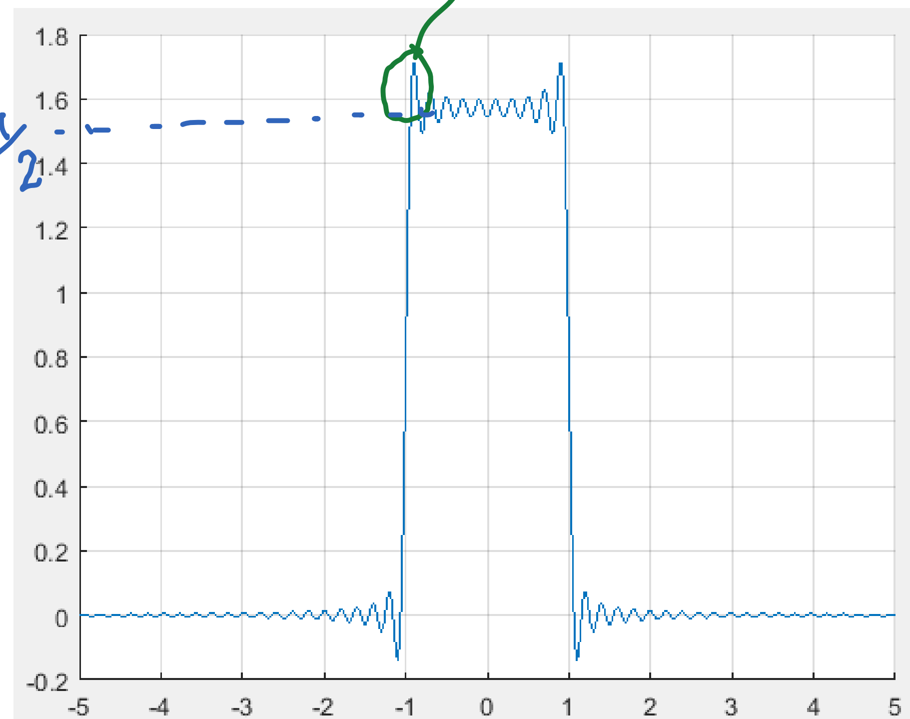
$a=8$

پدیده: گیبس



a = 16

$\pi/2$



a = 32

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\cos wx \, \sin w}{w}\, dw = \frac{1}{\pi}\int_0^a \left[\frac{\sin(w+wx)}{w} + \frac{\sin(w-wx)}{w}\right] dw$$

بعد از انجام یک سری عملیات جبری داریم

$$\ldots f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{(x+1)a} \frac{\sin t}{t}\, dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{(x-1)a} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\mathrm{Si}\big(a(x+1)\big) - \mathrm{Si}\big(a(x-1)\big)\right]$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega \cos\omega x}{\omega}\, d\omega \quad , \quad f(1) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega \cos\omega}{\omega}\, d\omega = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin\omega \cos\omega}{\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2\omega}{\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin 2\omega}{\omega} = \frac{\pi}{2}$$

انتگرالهای سینوسی و کسینوسی فوریه

برای هر تابع زوج ایجاد انتگرال فوریه ساده‌تر می‌شود. اگر $f(x)$ یک تابع زوج باشد

$$f(x)=\int_0^{\infty} A(w)\cos wx\,dw\,,$$

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\,dv=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(v)\cos wv\,dv$$

انتگرال کسینوسی فوریه

برای یک تابع فرد

$$f(x) = \int_0^\infty B(\omega) \sin \omega x \, d\omega$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin \omega v \, dv = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(v) \sin \omega v \, dv$$

انتگرال سینوسی فوریه

محاسبه انتگرالها

انتگرالهای لاپلاس

مثال : انتگرالهای سینوسی و کسینوسی فوریه تابع f با ضابطه زیر را بدست آورید

$$f(x) = e^{-kx} \qquad (x>0 , \; k>0)$$

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-kv}\cos wv \, dv$$

$$\int e^{-kv}\cos wv\,dv = \frac{-k}{k^2+w^2}e^{-kv}\left(\frac{-w}{k}\sin wv+\cos wv\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-kv}\cos wv\,dv = \left[\frac{-k}{k^2+w^2}e^{-kv}\left(\frac{-w}{k}\sin wv+\cos wv\right)\right]_0^\infty$$

$$= 0-\left(\frac{-k}{w^2+k^2}\right) = \frac{k}{k^2+w^2}$$

$$\Rightarrow A(w) = \frac{2k}{\pi(k^2+w^2)}$$

$$f(x) = e^{-kx} = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x \, d\omega = \frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{k^2+\omega^2} d\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{k^2+\omega^2} = \frac{\pi e^{-kx}}{2k}} \quad (x>0,\ k>0)$$

به طور مشابه برای انتگرال سینوسی فوریه تابع $f(x)$ داریم

$$B(\omega) = \frac{2\omega}{\pi(k^2+\omega^2)}$$

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega \sin \omega x}{k^2+\omega^2}\, d\omega$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\omega \sin \omega x}{k^2+\omega^2}\, d\omega = \frac{\pi e^{-kx}}{2}$$

این انتگرال‌ها به انتگرال‌های لاپلاس موسوم اند.

تبدیلات سینوسی و کسینوسی فوریه

این تبدیلات ابزاری برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات با مشتقات جزئی و معادلات انتگرالی می‌باشند.

تبدیلات فوریه مانند تبدیلات لاپلاس از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

تبدیلات فوریه را می‌توان از روی نمایش انتگرالهای فوریه در بخش قبل بدست آورد

- تبدیل فوریه کسینوسی ؛ با مقادیر حقیقی
- " " سینوسی ؛ " "
- " فوریه ؛ " " موهومی

تبدیل کسینوسی فوریه

اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد، انتگرال فوریه آن به صورت زیر است

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\, d\omega \quad , \quad A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos\omega v\, dv$$

با فرض $A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\hat{f}_c(\omega)$ ، اندیس c به معنی کسینوس است پس داریم

$$\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(v)\cos\omega v\, dv$$

v را با x جایگزین می‌کنیم

$$\Rightarrow \quad \hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\, dx$$

$$\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\cos\omega x \, dx$$

تبدیل کسینوسی فوریه

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(\omega)\cos\omega x \, d\omega$$

عکس تبدیل کسینوسی فوریه

$$F_c\left(f(x)\right) = \hat{f}_c(\omega)$$

$$F_c^{-1}\left(\hat{f}_c(\omega)\right) = f(x)$$

تبدیل سینوسی فوریه

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin wx \, dx$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_s(w) \sin wx \, dw$$

$$\begin{cases} F_s\left(f(x)\right) = \hat{f}_s(w) \\ F_s^{-1}\left(\hat{f}_s(w)\right) = f(x) \end{cases}$$

مثال: تبدیل کسینوسی و سینوسی فوریه تابع زیر را بدست آورید:

$$f(x) = \begin{cases} k , & 0 < x < a \\ 0 , & x > a \end{cases}$$

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty k \cos wx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \int_0^a \cos wx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \frac{\sin aw}{w}$$

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \left[\frac{1 - \cos aw}{w} \right]$$

مثال: تبدیل کسینوسی فوریه تابع نمایی را بدست آورید:

$$f(x) = e^{-x}$$

$$F_c\left(e^{-x}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x} \cos \omega x \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{e^{-x}}{1+\omega^2} \left(-\cos \omega x + \omega \sin \omega x\right) \right]_0^\infty = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{1+\omega^2}$$

خواص تبدیلات فوریه

a و b اعداد ثابت

1- $F_{c,s}(af+bg) = a\,F_{c,s}(f) + b\,F_{c,s}(g)$

2- $F_c\{f'(x)\} = \omega\,F_s\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,f(0)$

$F_s\{f'(x)\} = -\omega\,F_c\{f(x)\}$

اثبات از روش انتگرال جزء به جزء ...

$$F_s\{f''(x)\} = -\omega^2 F_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega f(0)$$

$$F_c\{f''(x)\} = -\omega^2 F_s\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f'(0)$$

فرم مختلط انتگرال فوریه، تبدیل فوریه مختلط

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

$$\begin{cases} F\{f(x)\} = \hat{f}(\omega) \\ F^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} = f(x) \end{cases}$$

مثال: تبدیل فوریه تابع زیر را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} K & , \quad 0<x<a \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a K e^{-i\omega x}\,dx=\frac{K(1-e^{-i\omega a})}{i\omega\sqrt{2\pi}}$$

خواص تبدیل فوریه

1- $F\{af+bg\} = aF\{f\} + bF\{g\}$

2- $F\{f'(x)\} = i\omega F\{f(x)\}$

$F\{f''(x)\} = -\omega^2 F\{f(x)\}$

3- $F\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\,g(x-p)\,dp\right\} = F\left\{\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)\,g(p)\,dp}_{f*g(x)}\right\} = \sqrt{2\pi}\,F\{f\}\,F\{g\}$

پیچش یا انتگرال کانولوشن)