ریاضی مهندسی پیشرفته

مسائل مقدار ویژه اشتورم لیوویل

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

جلسه نوزدهم

تعریف مسائل مقدار ویژه اشتورم-لیوویل و انواع آن

sturm liovill

مسائل مقدار ویژه اشتورم لیوویل دسته مهمی از مسائل مقدار ویژه هستند که در خلال حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای پدید می‌آیند.

در اینجا با مسأله مقدار مرزی مواجه هستیم و پاسخ آن به نابتی موسوم به مقدار ویژه بستگی دارد.

حل یکتا نیست و بسته به شرایط مرزی حل تغییر خواهد کرد ← Boudary value problem

برای مسائل با مقدار اولیه (initial value problem) ← حل یکتایی

فرم کلی معادلات اشتورم لیوویل

بصورت زیر است

$$\mathcal{L}[u(x)] = -\lambda u(x)$$

که در آن عملگر $\mathcal{L}$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{L} = \frac{1}{w(x)}\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)\right]$$

$w(x)$، $p(x)$، $q(x)$ و $p'(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته است.

$p(x)$ و $w(x)$ در کل بازه $[a,b]$ مثبت هستند

$p(x) > 0$

$w(x) > 0$

$x \in [a,b]$

$$\frac{1}{w(x)}\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)+q(x)\right]u(x) = -\lambda u(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(p(x)u'\right) + q(x)u(x) = -\lambda w(x)u(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(p(x)u'\right)' + \left[q(x)+\lambda w(x)\right]u(x) = 0}$$

فرم کلی معادله SL

- هدف یافتن مقدار λ است به گونه‌ای که معادله بالا جواب غیر بدیهی داشته باشد $(u \neq 0)$

- با تغییر شرایط مرزی، λ مقادیر مختلفی اختیار می‌کند و به دنبال آن معادله دیفرانسیل اشتورم-لیوویل رفتار گوناگونی از خود نشان می‌دهد.

انواع شرایط مرزی

1- شرط مرزی دیریکله، $y(a)=0$ $(\alpha_2=0)$

2- شرط مرزی نیومن، $y'(a)=0$ $(\alpha_1=0)$

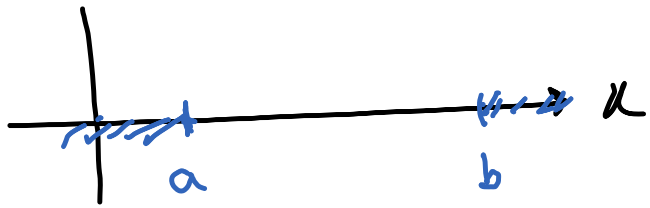
3- شرط مرزی کوشی، $\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0$ (ترکیب ۱ و ۲ است)

4- شرط مرزی تناوبی $y(a)=y(b)\ ,\ y'(a)=y'(b)$

5- شرط کرانداری در $x=L$ $|y(L)|<M$ (M یک عدد ثابت محدود)

6- شرط کرانداری در $x=\infty$ $|y(\infty)|<M$

انواع مسائل اشتورم - لیوویل



- مسأله اشتورم - لیوویل منتظم، هرگاه شرایط مرزی به صورت زیر باشد

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \quad \text{و} \quad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$$

α_1 و α_2 هر دو همزمان صفر نیستند، β_1 و β_2 هر دو همزمان صفر نیستند.

در ابتدا و انتهای بازه شرایط مرزی کوشی را داریم

- مسأله اشتورم لیوویل تناوبی

$$u(a)=u(b) \quad \text{و} \quad u'(a)=u'(b)$$

همچنین لازم است $p(a)=p(b)$

- مسأله اشتورم لیوویل تکین

نوع اول: $p(a)=0$ ، در این صورت شرط مرزی روی a وجود ندارد و روی b به صورت زیر است

$$\beta_1 u(b)+\beta_2 u'(b)=0$$

نوع دوم: $p(b)=0$. در این صورت شرط مرزی روی b نداریم و روی a به صورت $\alpha_1 u(a)+\alpha_2 u'(a)=0$

نوع سوم: $p(a)=p(b)=0$ شرط مرزی روی a و b وجود ندارد. با توجه به چنین یک مسأله پاسخ‌هایی که به طور کراندار در بازه $[a,b]$ می‌انجامد را بررسی می‌کنیم.

قضیه: مقادیر ویژه مسأله SL منظم و نامتناهی با طیف گسسته‌ای به صورت
$\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_n<\dots$ با کوچکترین مقدار λ_1 و بزرگترین بینهایت $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$

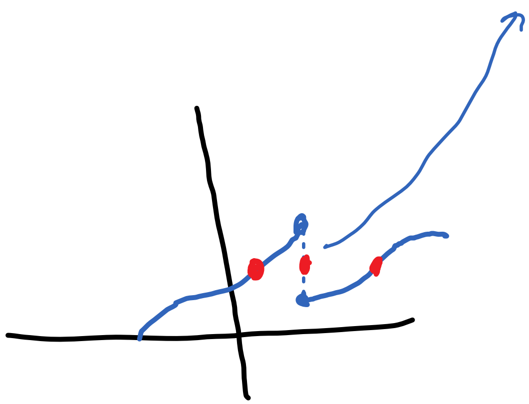
قضیه: به ازای هر مقدار ویژه λ_n یک تابع ویژه یکتا وجود دارد که با $\varphi_n(x)$ نمایش داده می‌شود.

قضیه: توابع ویژه متناظر با مقدار ویژه‌های مسأله SL مستقل خطی هستند و از این رو یک مجموعه کامل یا یک پایه تشکیل می‌دهند. یعنی می‌توان هر تابع پیوسته تکه‌ای مانند $f(x)$ را به صورت ترکیب خطی از توابع ویژه نوشت،

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

بصورت سری فوریه تعمیم یافته،

این سری نامتناهی به ازای هر $x\in[a\ b]$ که در آن $f(x)$ پیوسته باشد به $f(x)$ همگرا می‌شود و در نقاطی که پرش داریم به $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ همگرا می‌شود.



و ضرائب c_n به صورت زیر بدست می‌آید:

$$c_n = \frac{\int_a^b w(x)\, f(x)\, \varphi_n(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\, \varphi_n^2(x)\, dx} \quad , \quad n=1,2,3,\dots$$

قضیه: توابع ویژه متناظر مقادیر ویژه مسئله SL ، $\varphi_n(x)$ نسبت به تابع وزنی $w(x)$ همواره متعامد هستند. به عبارت دیگر

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)w(x)\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \|\varphi_n(x)\|^2 & n = m \end{cases}$$

مثال: مقادیر ویژه و توابع ویژه را برای مسئله اشتورم-لیوویل زیر محاسبه کنید

$u''(x)+\lambda u(x)=0 \quad , \quad 0<x<L$

شرایط مرزی دیریکله

$u(0)=u(L)=0$

$q(x)=0 \quad , \quad P(x)=W(x)=1$

یک مسئله SL منظم ، دنبال جواب غیرصفر برای u هستیم.

برای λ $\left\{ \begin{array}{l} \lambda=0 \\ \lambda>0 \rightarrow \lambda=k^2 \\ \lambda<0 \rightarrow \lambda=-k^2 \end{array} \right.$

حالت اول $\lambda = 0$

$$u''(x) = 0$$

$$u(0) = u(L) = 0$$

$$\longrightarrow u(x) = ax + b$$

$$u(0) = b = 0 \longrightarrow b = 0$$

$$u(L) = aL + 0 = 0 \longrightarrow a = 0$$

$$\longrightarrow u = 0$$

به ازای $\lambda = 0$ به جواب بدیهی $u = 0$ رسیدیم پس $\lambda = 0$ قابل قبول نیست.

حالت دوم $\lambda = -k^2$

$$u'' - k^2 u = 0$$

$$u = e^{sx} \longrightarrow u' = s e^{sx} \longrightarrow u'' = s^2 e^{sx}$$

$$s^2 e^{sx} - k^2 e^{sx} = 0 \Rightarrow (s^2 - k^2) e^{sx} = 0$$

$$\Rightarrow s^2 - k^2 = 0 \longrightarrow s = \pm k$$

$$\Rightarrow u = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

$$u(0) = 0 \longrightarrow c_1 + c_2 = 0 \longrightarrow c_1 = -c_2$$

$$u(l) = 0 \longrightarrow c_1 e^{kl} + c_2 e^{-kl} = 0$$

$$\Rightarrow c_1 e^{kL} - c_1 e^{-kL} = 0$$

$$\Rightarrow c_1 (e^{kl} - e^{-kl}) = 0$$

$e^{kL} - e^{-kL} = 2\sinh kL \neq 0$ ادامه

$$\Rightarrow c_1 = 0 \longrightarrow c_2 = 0$$

پس $u = 0$

پس $\lambda < 0$ هم قابل قبول نیست

حالت سوم $\lambda > 0 \,,\ \lambda = k^2$

$u'' + Ku = 0 \,,\quad s = \pm Ki$

$$\Rightarrow u(x) = c_1' e^{Kxi} + c_2' e^{-Kxi} = c_1 \cos(Kx) + c_2 \sin(Kx)$$

$$u(0) = 0 \longrightarrow c_1 \overset{1}{\cos 0} + c_2 \overset{0}{\sin 0} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$u(L) = 0 \longrightarrow c_2 \sin KL = 0 \xrightarrow{c_2 \neq 0} \sin KL = 0$$

$$\Rightarrow KL = n\pi \Rightarrow K_n = \frac{n\pi}{L} \,,\quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Rightarrow \lambda_n = K_n^2 \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \,,\quad n = 1, 2, 3, \dots$$

پس پاسخ به صورت زیر خواهد شد

$$u_n = C_2 \sin kx = C_2 \sin \frac{n\pi x}{L} = C_2 \sin \sqrt{\lambda_n}\, x$$

پس تابع ویژه متناظر λ_n به صورت زیر خواهد:

$$\varphi_n = \sin\sqrt{\lambda_n}\, x = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

می توان هر تابع $f(x)$ را به صورت زیر نوشت

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad c_n = \frac{\int_0^L \varphi_n(x) f(x)\, dx}{\int_0^L \varphi_n^2(x)\, dx}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad , \quad c_n = \frac{\int_0^L f(x)\varphi_n(x)\,dx}{\int_0^L \varphi_n^2(x)\,dx}$$

$$\int_0^L \left(\sin\frac{n\pi x}{L}\right)^2 dx = \frac{l}{2}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L} \quad , \quad c_n = \frac{2}{l}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$\int_0^L w(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = \int_0^L \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{l}{2} & n = m \end{cases}$$

تعامد توابع ویژه.

مثال: مقادیر ویژه و توابع ویژه را برای مسئله SL زیر محاسبه کنید

$u'' + \lambda u = 0 \quad , \quad 0 < x < L$

$u'(0) = u'(L) = 0$

مسئله SL منظم با شرایط مرزی کوشی (نیومن)

1- $\lambda = 0 \longrightarrow u = 0$

2- $\lambda = -k^2 \longrightarrow u = 0$

3- $\lambda = k^2$

$u'' + k^2 u = 0$

$u = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$

حالت سوم : $\lambda = k^2$

$$u'' + k^2 u = 0$$

$$u = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

$$u'(x) = -c_1 k \sin kx + c_2 k \cos kx$$

$$u'(0) = 0 \longrightarrow c_2 = 0$$

$$u'(L) = 0 \longrightarrow -c_1 k \sin kL = 0 \longrightarrow \sin kL = 0 \longrightarrow kL = n\pi$$

$$\longrightarrow k = \frac{n\pi}{L} \longrightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$u = c_1 \cos \frac{n\pi x}{L} \longrightarrow \varphi_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$\lambda = 0 \longrightarrow \varphi_0 = C_1$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \longrightarrow \varphi_n = \cos\frac{n\pi x}{L} = \cos\sqrt{\lambda_n}\, x$$

در مسئله قبل n نمی‌توانست صفر باشد ← $u = C_1 \sin kx = 0$

اما در این مسئله می‌تواند $n=0$ باشد و مقدار ویژه $\lambda=0$ داریم.

مثال :

$$y'' + \lambda y = 0 \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(1) + y(1) = 0$$

$\lambda = k^2$ حالت سوم جواب دارد

$$y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

$$y'(x) = -c_1 k \sin kx + c_2 k \cos kx$$

$$y(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

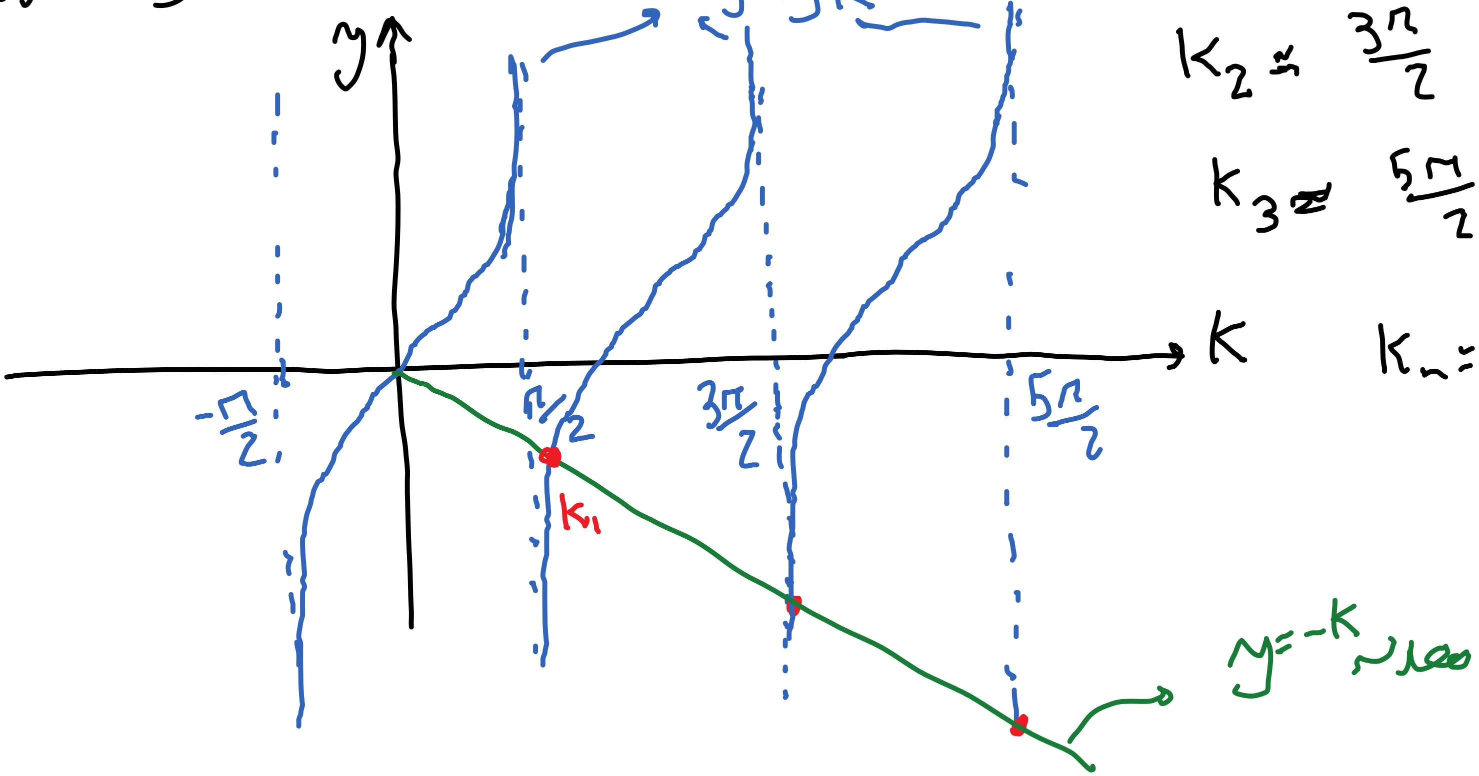
$$y'(1) + y(1) = 0 \Rightarrow c_2 k \cos k + c_2 \sin k = 0 \rightarrow c_2 (k \cos k + \sin k) = 0$$

$$\Rightarrow k \cos k + \sin k = 0$$

مقادیر ویژه باید در این معادله صدق کنند

$$K\cos K + \sin K = 0 \xrightarrow{\frac{1}{\cos K}} K + \operatorname{tg} K = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} K = -K = y$$



$K_1 = 2.03$

$K_2 \simeq \frac{3\pi}{2}$

$K_3 \simeq \frac{5\pi}{2}$

$K_n \simeq (2n-1)\frac{\pi}{2}$

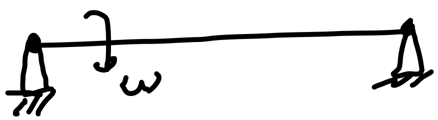
$n = 2, 3, \ldots$

$$\lambda_1 = (2.03)^2$$

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 \quad , \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

$$\varphi_n = \sin\sqrt{\lambda_n}\, x$$

مثال: خیز یک محور دوار روی دو تکیه گاه، ساده:



$$(EI\, y_{xx})_{xx} - \rho\omega^2 y = 0 \Rightarrow y_{xxxx} - \frac{\rho\omega^2}{EI} y = 0$$

$$y(0) = y(L) = y''(0) = y''(L) = 0$$

$$\Rightarrow y_{xxxx} - \lambda y = 0 \quad \text{و} \quad \lambda = \beta^4 \, , \quad y = e^{sx}$$

$$\Rightarrow (s^4 - \lambda) e^{sx} = 0 \Rightarrow \lambda = s^4 = \beta^4 \Rightarrow s^2 = \pm \beta^2$$

$$\Rightarrow s = \begin{cases} +\beta \\ -\beta \\ +\beta i \\ -\beta i \end{cases} \Rightarrow y = c_1' e^{\beta x} + c_2' e^{-\beta x} + c_3' e^{\beta x i} + c_4' e^{-\beta x i}$$

یا $y = c_1 \sinh\beta x + c_2 \cosh\beta x + c_3 \sin\beta x + c_4 \cos\beta x$

$$y = C_1 \sinh\beta x + C_2 \underbrace{\cosh\beta x}_{0} + C_3 \sin\beta x + C_4 \underbrace{\cos\beta x}_{0}$$

$$\sinh 0 = 0$$

$$\cosh 0 = 1$$

$$y' = C_1\beta\cosh\beta x + C_2\beta\sinh\beta x + C_3\beta\cos\beta x - C_4\beta\sin\beta x$$

$$y'' = C_1\beta^2\sinh\beta x + C_2\beta^2\cosh\beta x - C_3\beta^2\sin\beta x - C_4\beta^2\cos\beta x$$

$$y(0) = C_1\times 0 + C_2 + C_3\times 0 + C_4 = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \Rightarrow C_2 = C_4 = 0$$

$$y''(0) = C_1\times 0 + C_2\beta^2 - 0 - C_4\beta^2 = 0 \Rightarrow C_2 - C_4 = 0 \Rightarrow C_2 = C_4$$

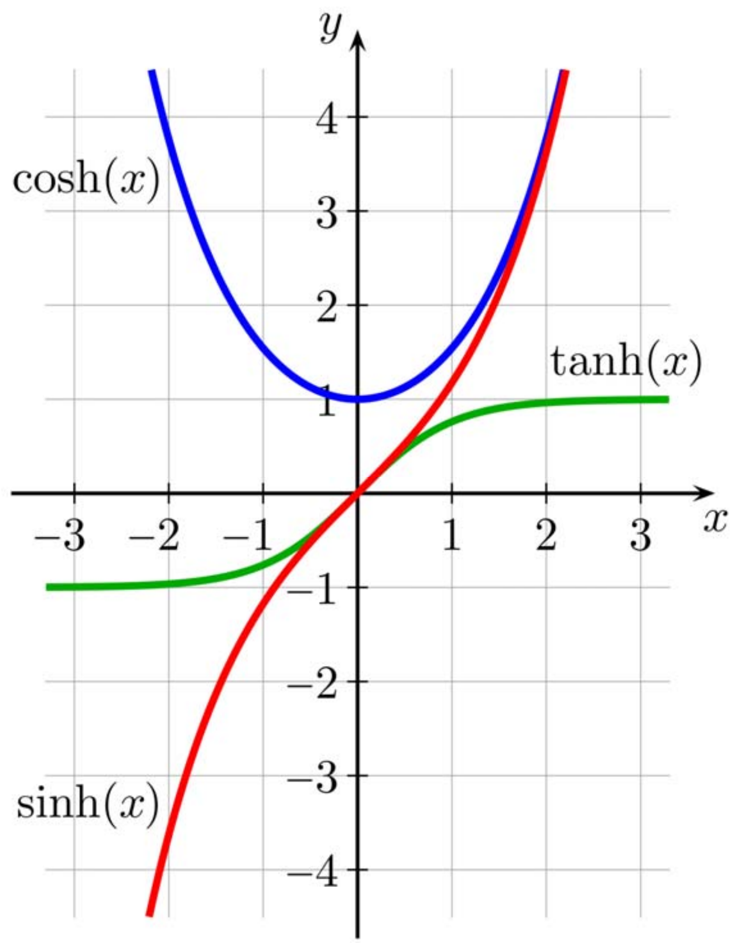
$$y(L) = C_1\sinh\beta l + C_3\sin\beta l = 0 \quad (1)$$

$$,\ (1)\beta^2 + (2) \Rightarrow 2C_1\beta^2\sinh\beta l = 0$$

$$\sinh\beta l \neq 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$y''(L) = C_1\beta^2\sinh\beta l - C_3\beta^2\sin\beta l = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \sin\beta l = 0$$


y
x
cosh(x)
tanh(x)
sinh(x)
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−3
−2
−1
1
2
3

$$\sin \beta l = 0 \longrightarrow \beta l = n\pi \longrightarrow \beta = \frac{n\pi}{l}$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \beta^4 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4, \quad y_n = \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{\rho \omega^2}{EI} = \lambda \Rightarrow \omega^2 = \frac{EI\lambda}{\rho} = \frac{EI}{\rho}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4$$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho}}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

$n=1$ اولین بسامد طبیعی

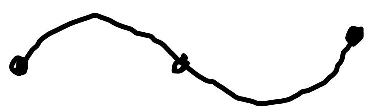
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{EI}{\rho}}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$$

اگر تیر با سرعت زاویه‌ای $\omega_1 = \sqrt{\frac{EI}{\rho}}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$ دوران کند تیر به صورت زیر خیز برمی‌دارد

$\sin \frac{\pi x}{l}$

با $\omega_2 = \sqrt{\frac{EI}{\rho}}\left(\frac{2\pi}{l}\right)$ مود دوم تیر ظاهر خواهد شد

$\sin \frac{2\pi x}{l}$



مثال: مسئله SL تناوبی

$$u'' + \lambda u = 0 \qquad -l < x < l$$

$$u(-l) = u(l), \quad u'(-l) = u'(l)$$

$$\lambda = k^2$$

$$u = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

$$u(-l) = u(l) \Rightarrow \cancel{c_1 \cos kl} + c_2 \sin kl = \cancel{c_1 \cos kl} - c_2 \sin kl$$

$$\Rightarrow 2c_2 \sin kl = 0 \Rightarrow c_2 \neq 0$$

$$u'(x) = -c_1 k \sin kx + c_2 k \cos kx$$

$$u'(-l) = u(l) \Rightarrow \cdots \Rightarrow 2c_1 k \sin kl = 0 \Rightarrow c_1 \neq 0$$

$$\sin kl = 0 \longrightarrow kl = n\pi \longrightarrow k = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} u_n(x) = C_1 \cos \frac{n\pi x}{l} + C_2 \sin \frac{n\pi x}{l}, & \lambda_n = \sqrt{\frac{n\pi}{l}} \\ u_0 = cte, & \lambda = 0 \end{cases}$$

مثال کتاب مثل ۷-۷

مقادیر و توابع ویژه برای شرایط مختلف مرزی دیریکله و نیومن - بازه متناهی

7

معادله $X'' + \lambda X = 0$ در بازه متناهی

حالت	شرایط مرزی	مقدار ویژه $(\lambda_n = \alpha_n{}^2)$	تابع ویژه	دوره تناوب تابع ویژه
۱	$X(0) = 0; X(l) = 0$ $0 \le x \le l$	$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}\ ; n = 1,2, \dots$	$\phi_n = \sin(\alpha_n x)$	$2l$
۲	$X'(0) = 0; X'(l) = 0$ $0 \le x \le l$	$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}\ ; n = 0,1, \dots$	$\phi_n = \cos(\alpha_n x)$	$2l$
۳	$X(0) = 0; X'(l) = 0$ $0 \le x \le l$	$\alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}\ ; n = 1,2, \dots$	$\phi_n = \sin(\alpha_n x)$	$4l$
۴	$X'(0) = 0; X(l) = 0$ $0 \le x \le l$	$\alpha_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}\ ; n = 1,2, \dots$	$\phi_n = \cos(\alpha_n x)$	$4l$
۶	$X(-l) = X(l); X'(-l) = X'(l)$ $-l \le x \le l$	$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}\ ; n = 0,1, \dots$	$\begin{cases} \phi_n = \sin(\alpha_n x)\ ; n \neq 0 \\ \phi_n = \cos(\alpha_n x) \end{cases}$	$2l$

مقادیر و توابع ویژه برای شرایط مختلف مرزی دیریکله و نیومن - بازه نامتناهی

8

معادله $X'' + \lambda X = 0$ در بازه نامتناهی

حالت	شرایط مرزی	مقدار ویژه ($\lambda = a^2$)	تابع ویژه
۱	$X(0) = 0; \lvert X(\infty)\rvert < M$ $0 \le x < \infty$	$\forall\, \alpha > 0$	$\phi = \sin(\alpha x)$
۲	$X'(0) = 0; \lvert X(\infty)\rvert < M$ $0 \le x < \infty$	$\forall\, \alpha \ge 0$	$\phi = \cos(\alpha x)$
۳	$\lvert X(\pm\infty)\rvert < M$ $-\infty < x < \infty$	$\forall\, \alpha \ge 0$	$\begin{cases} \phi = \sin(\alpha x)\,;\, \alpha \neq 0 \\ \phi = \cos(\alpha x) \end{cases}$