کنترل مدرن

طراحی رویت گر حالت، State Observer

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

رویت گر حالت state observer

(state feedback)

در روش‌های طراحی کنترل کننده فیدبک حالت لازم است تمام متغیرهای حالت در دسترس باشند

همه حالت‌ها مورد نیاز است. $u = -Kx$ ⟵

پس برای هر حالت ⟵ نیاز به یک سنسور ⟵ هزینه را بالا

راه کار ⟵ با استفاده از رویت گرهای حالت می توان همه حالتها را از روی خروجی (y) تخمین بزنیم.

رویت‌گر مقدماتی

$\dot{x} = Ax + Bu \leftarrow$ سیستم اصلی

ساده‌ترین رویت‌گر را می‌توان به صورت زیر پیشنهاد داد

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$$

خطای تخمین

$$e = x - \hat{x} \xrightarrow{\text{دینامیک خطا}} \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

$$\Rightarrow \dot{e} = Ax + \cancel{Bu} - A\hat{x} - \cancel{Bu} = A(x - \hat{x}) = Ae$$

اگر A یک سیستم پایدار باشد،

اگر A پایدار باشد

$$\Rightarrow \dot{e} = Ae \Rightarrow \begin{matrix} e \to 0 \\ t \to \infty \end{matrix} \Rightarrow \hat{x} \to x$$

معایب این روش

- کنترلی روی دینامیک خطا نداریم ، $\hat{x}$ با چه سرعتی به x میل کند تحت کنترل نیست

- نیاز است مقادیر A و B را به طور دقیق داشته باشیم. که عملاً امکان پذیر نیست.

سیستم واقعی $\quad \dot{x} = Ax + Bu$

رویت گر $\quad \dot{\hat{x}} = A'\hat{x} + B'u$

$$\delta A = A - A' \quad , \quad \delta B = B - B'$$

رویت گر مرتبه کامل

برای سیستم زیر

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

معادله رویت گر به صورت زیر در نظر گرفته می شود

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x})$$

قضیه: اگر زوج A و C رویت پذیر باشند، می توان ماتریس بهره G را به نحوی تعیین کرد که

$$\hat{x} \to x, \quad t \to \infty$$

یعنی $\hat{x}$ به طور مجانبی به x میل کند.

$$G \in R^{n \times m}$$

$$e = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - G(y - C\hat{x})$$

$$\Rightarrow \dot{e} = A(x - \hat{x}) - GC(x - \hat{x}) = (A - GC)e$$

این معادله را $\dot{e} = (A - GC)\,e$

اگر با معادله فیدبک حالت مقایسه کنیم ← $\dot{x} = (A - BK)\,x$

قبلاً دانستیم که ماتریس بهره K را می‌توان به نحوی تعیین کرد که قطبهای حلقه بسته $\overset{A_{cl}}{\overline{A - BK}}$

در محل مورد نظر قرار بگیرند. ← روش جایابی قطب، LQR ← K را

$\dot{e} = (A - GC)\,e$ دوگان مسئله $\dot{x} = (A - BK)\,x$ محسوب شد.

$x \rightarrow e$

$A \rightarrow A^T$

$B \rightarrow C^T$

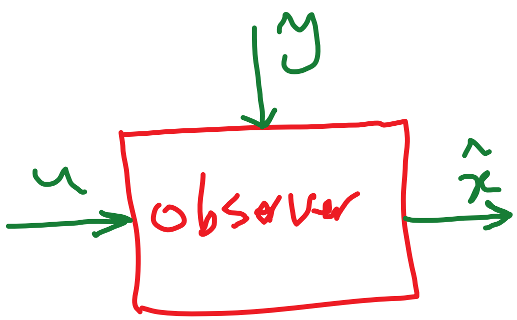
دوگان مسئله کنترل کننده

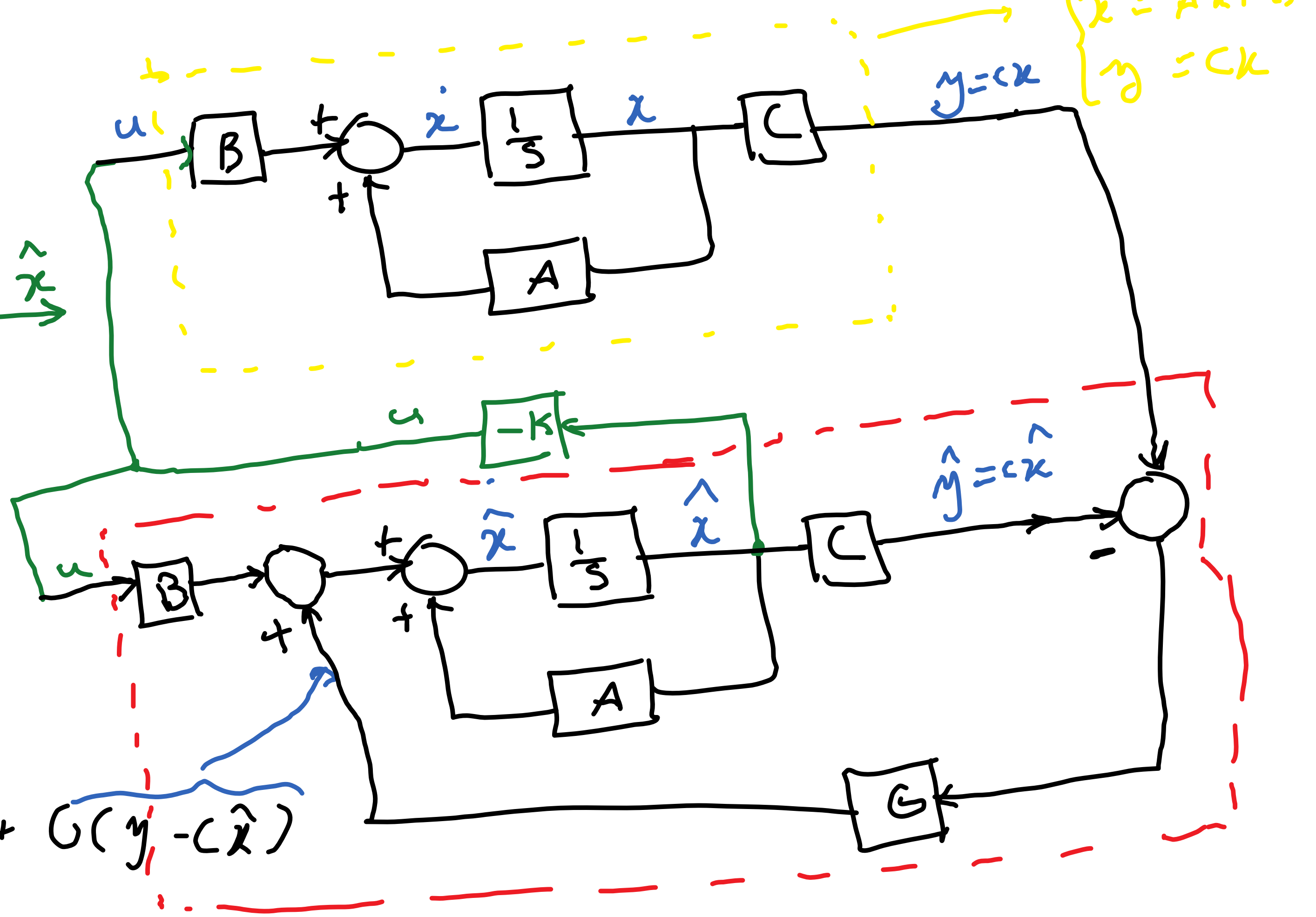
$$\begin{cases} \dot{x} = A^T x + C^T u \\ y = B^T x \end{cases} \xrightarrow[u=-Kx]{\text{طراحی کنترل کننده}} \begin{cases} \dot{x} = (A^T - C^T K)x \\ y = B^T x \end{cases}$$

$$\dot{e} = (A - GC)e$$

تعریف: شبیه سازی رویت گر، دیاگرام بلوکی

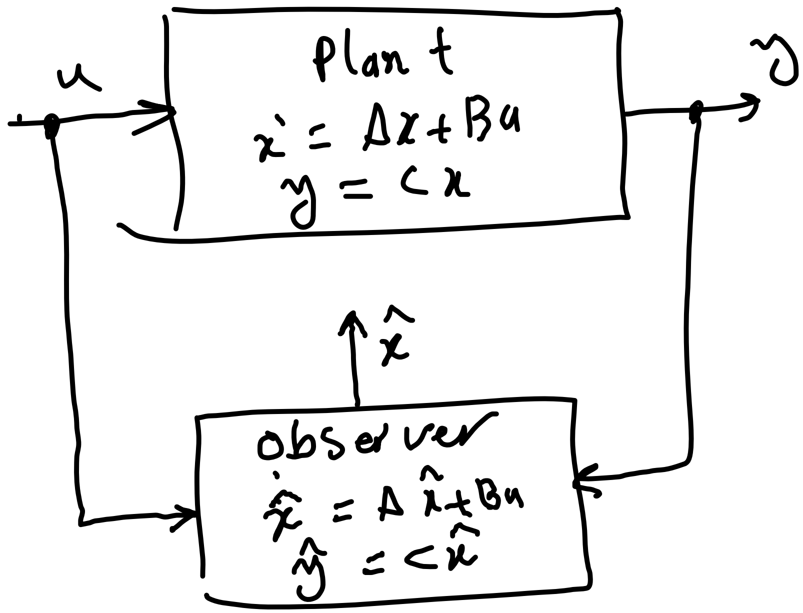
سیستم کنترل کننده + رویت گر برای ورودی مرجع صفر





$$u = -Kx \simeq -K\hat{x}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x})$$


u
plant
ẋ = Ax + Bu
y = Cx
y
x̂
observer
x̂̇ = Ax̂ + Bu
ŷ = Cx̂

مثال: برای سیستم موتور DC یک رویت گر حالت طراحی کنید که قطبهای رویت گر در -10 ، -15 ، -20 قرار گیرد.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.4 \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} v \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ i \end{bmatrix} \end{cases}$$

کافی است ماتریس بهره G را به گونه‌ای تعیین کنیم که مقادیر ویژه ماتریس $A - GC$ در $[-20, -15, -10]$ جایابی شوند. $\leftarrow$ Poleplacement

$$P_d = \det(SI - A) + K\,\mathrm{Adj}(SI - A)\,B$$

در اینجا روابط بالا ،

$$A \to A^T$$

$$K \to G$$

$$B \to c^T$$

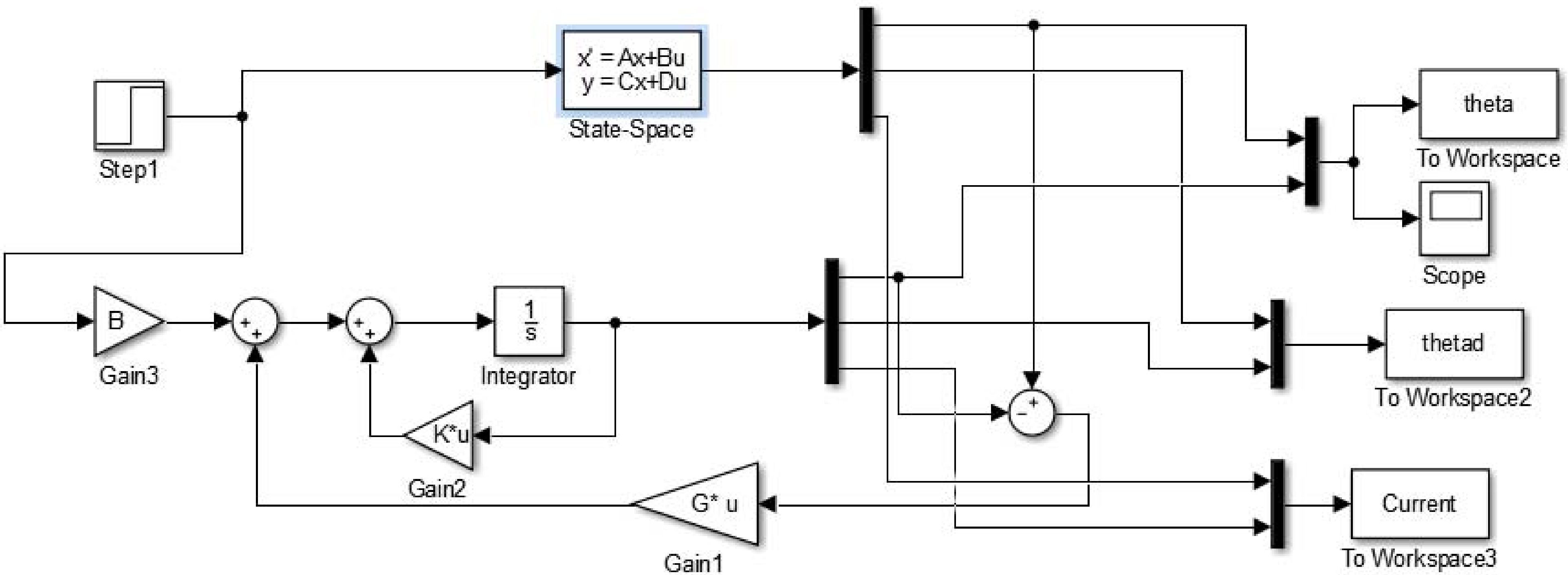
$$P_d = (S+10)(S+15)(S+20)$$

$$P_d = \det(SI - A^T) + G\,\mathrm{Adj}(SI - A)\,c^T$$

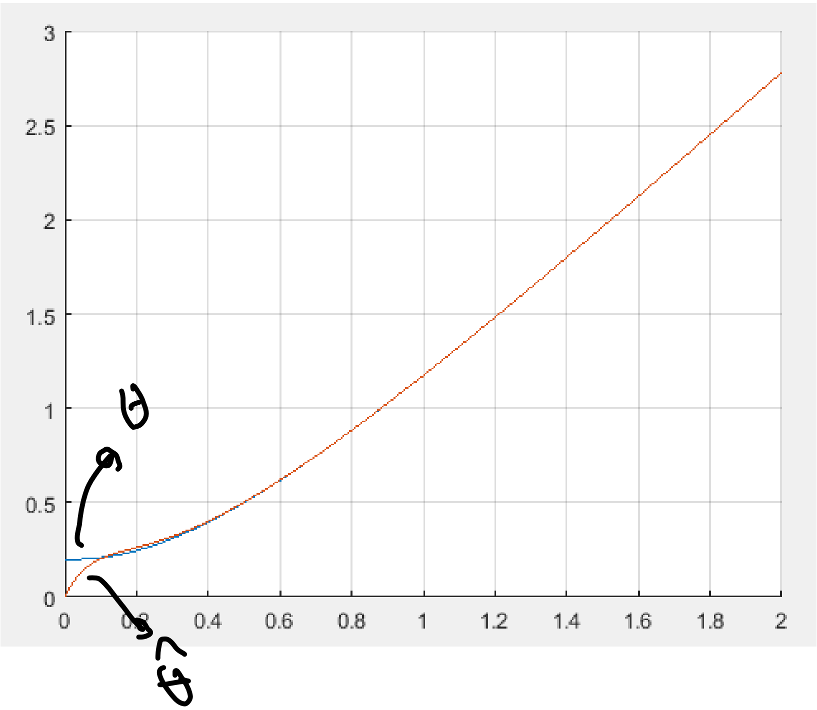
$$\Rightarrow G = \checkmark$$

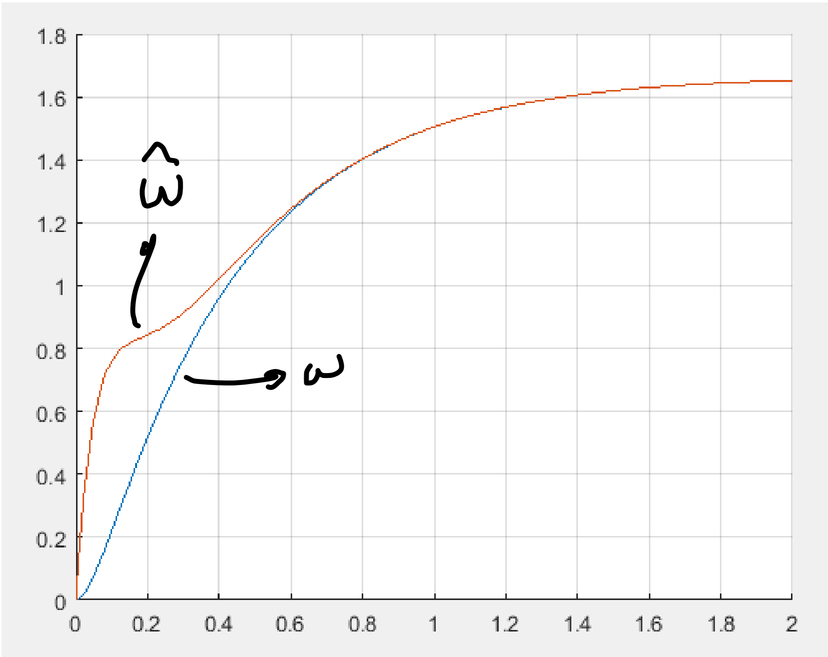
$$G \in R^{3\times 1}$$

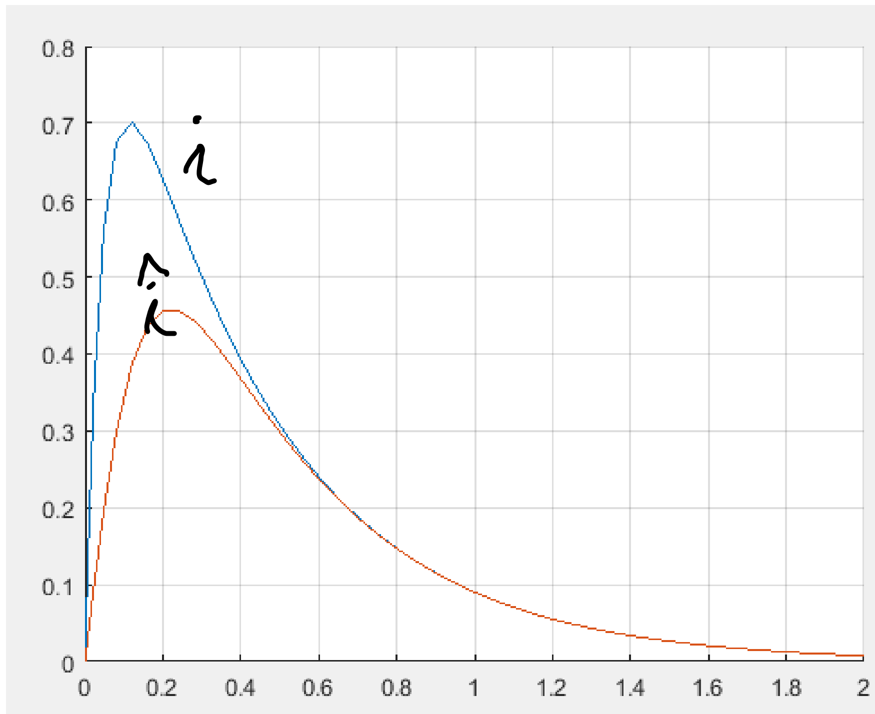
$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \to \quad c^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

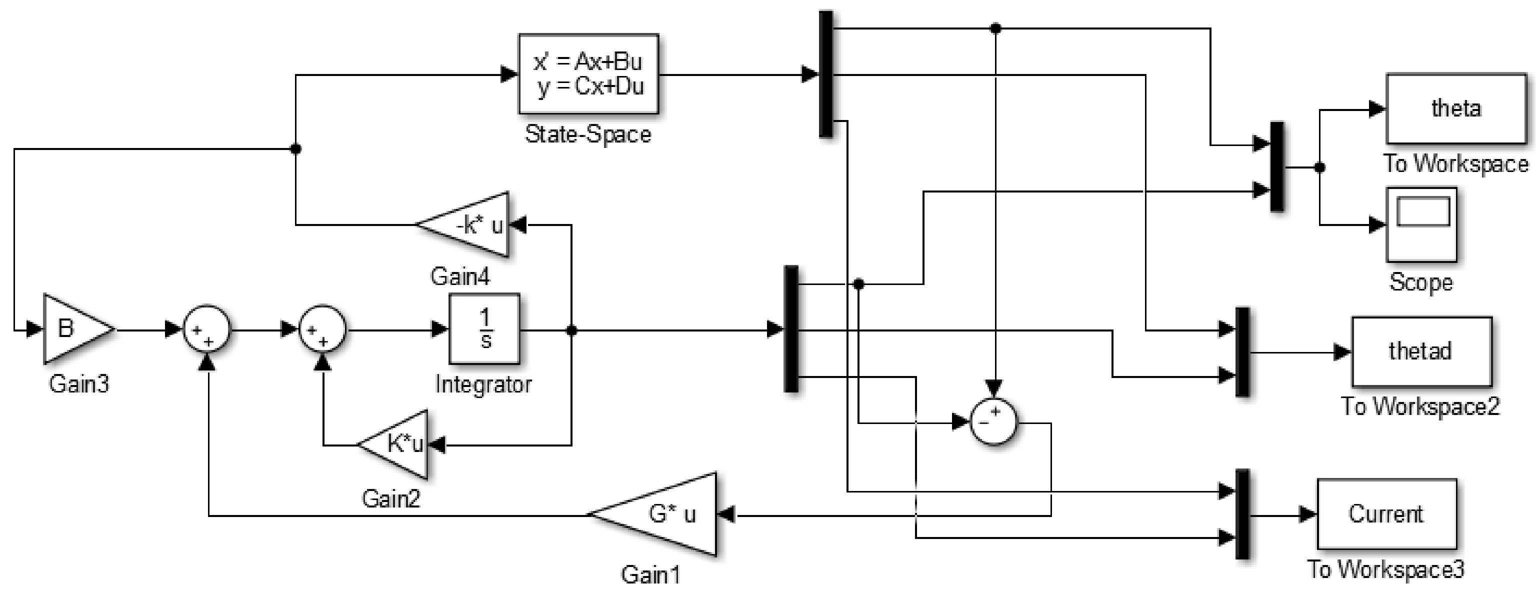

x' = Ax+Bu
y = Cx+Du
State-Space
Step1
theta
To Workspace
Scope
B
Gain3
1
s
Integrator
K*u
Gain2
G* u
Gain1
thetad
To Workspace2
Current
To Workspace3

$$G^T = [\,21 \quad 93 \quad -78\,]$$






0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2


x' = Ax+Bu
y = Cx+Du
State-Space
-k* u
Gain4
B
Gain3
1
s
Integrator
K*u
Gain2
G* u
Gain1
theta
To Workspace
Scope
thetad
To Workspace2
Current
To Workspace3

k =

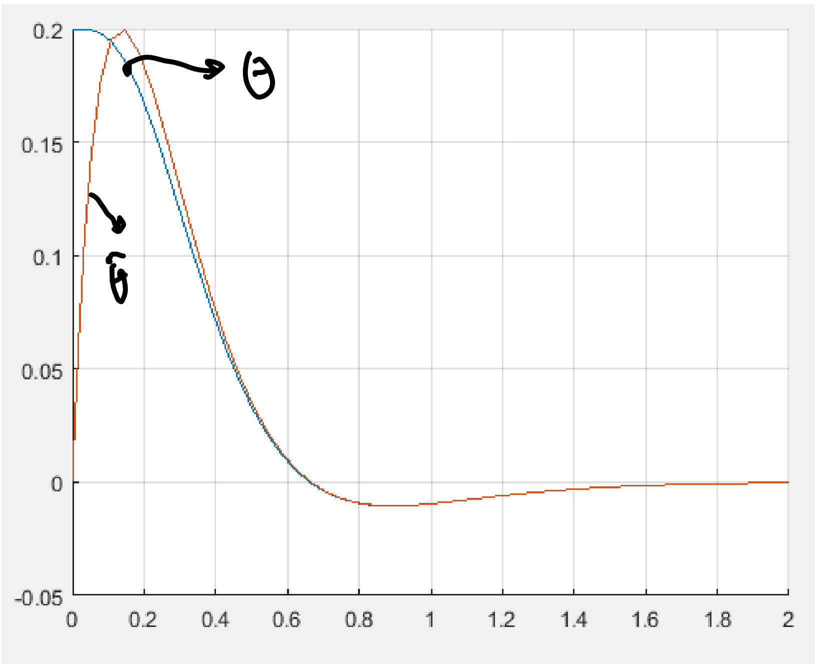
2.3864 0.6159 -0.3000

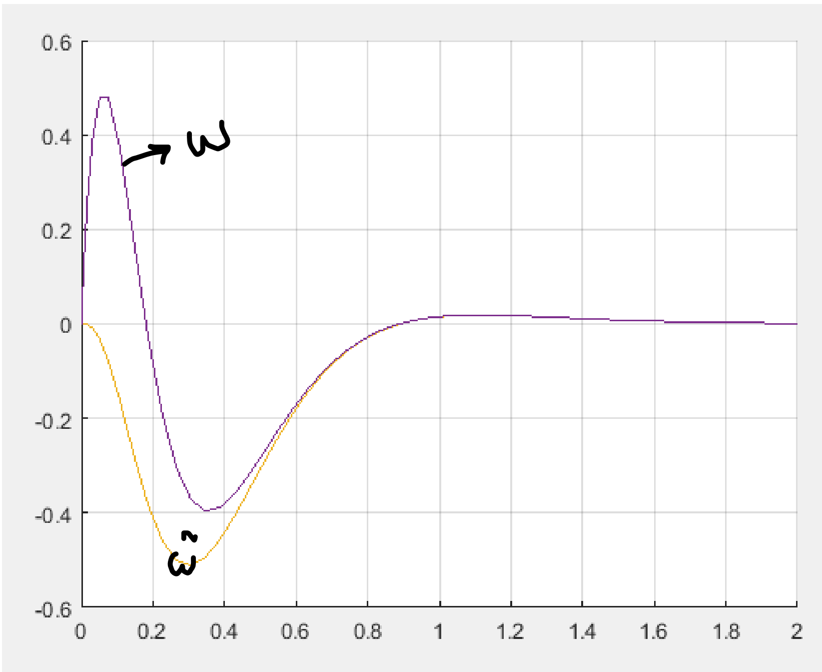
G =

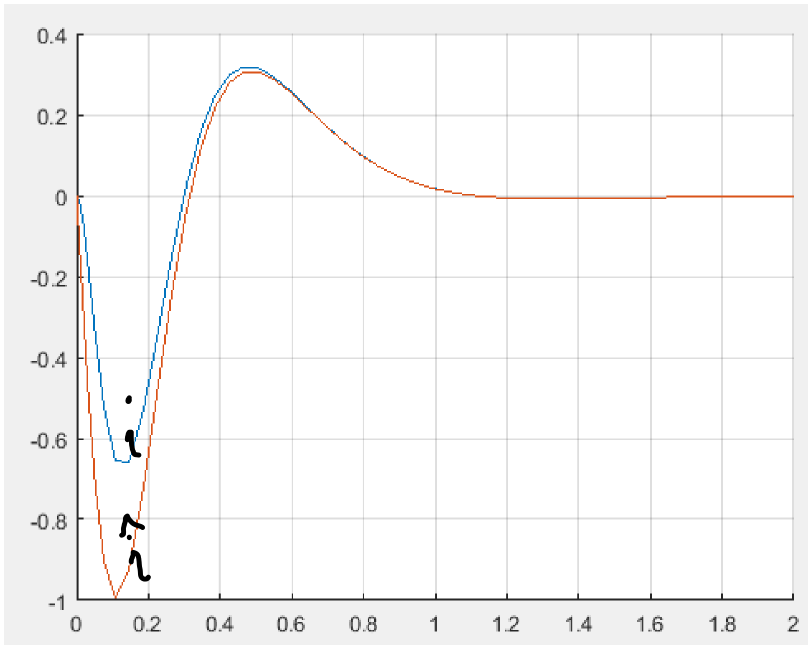
21.0000 93.2000 -78.5455

$P_d \rightarrow [-5 \quad -6 \quad -7]$

$P_{dob} \rightarrow [-10 \quad -15 \quad -20]$

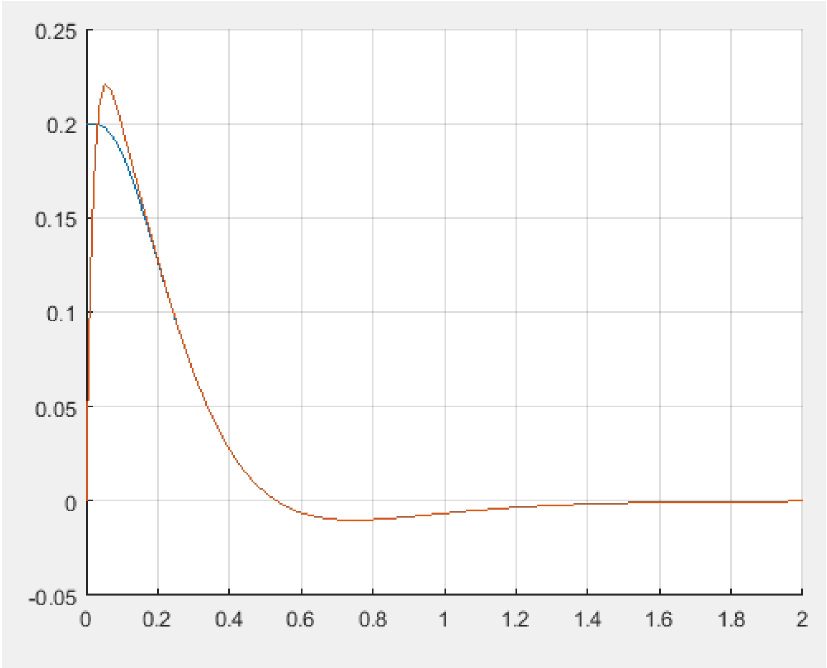


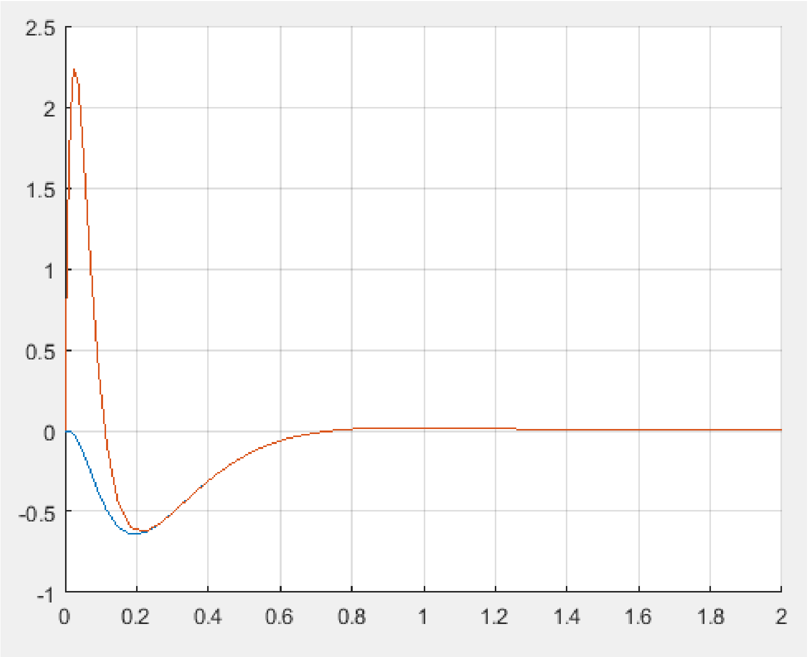



0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

$$P_{dob} = [-30 \quad -30 \quad -30]$$

$$G = [66 \quad 1063 \quad -454]$$





کنترل مدرن

رویت گر بهینه، فیلتر کالمن

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

طراحی رویت گر بهینه (فیلتر کالمن) Kalman Filter

درحالت تمیل خطایی در مدل و مقادیر اندازه گیری شده در نظر نگرفتیم. درصورتی که این خطاها همواره وجود دارند.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + w \\ y = Cx + v \end{cases}$$

w : خطای مدل سازی، نویز فرایند، اغتشاش وارد به فرایند

اغتشاش (w)

خارجی ← نیروهای اصطکاک ... نیروی خارجی

داخلی ← عدم قطعیت پارامتری، خطا در مدل سازی و ...

v : خطای اندازه گیری، نویز اندازه گیری

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu + w \\ y = Cx + v\end{cases}$$

معادله رویت گر مانند حالت قبل

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x})$$

$$e = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \Rightarrow \dot{e} = (A - GC)e + w - Gv$$

طراحی رویت گر بهینه

دیدگاه ۱. تصادفی (دیدگاه کالمن) v و w به صورت فرآیندهای تصادفی در نظر گرفته

دیدگاه ۲. روش / تعیینی قطعی

$$v = v_0\,\delta(t), \quad w = w_0\,\delta(t)$$

v و w فرآیندهای تصادفی گوسی به صورت نویز سفید با تابع چگالی طیف در نظر گرفته می‌شود

$$V = \mathrm{Cov}(v(t)), \quad W = \mathrm{Cov}(w(t))$$

رویت گر بهینه در این ایده‌ها، واریانس خطا را کمینه می کند

$$J = E\left\{\int_0^\infty e^T(t)\cdot e(t)\,dt\right\}$$

تحلیل و بررسی این دیدگاه، نیاز به مقدماتی از فرایندهای تصادفی دارد

در روش تعیین شکل دقیق، $v = v_0\,\delta(t)$ و $w = w_0\,\delta(t)$ که $\delta(t)$ تابع ضربه واحد است.

در حوزه فرکانس، نویز سفید و $\delta(t)$ دارای محتوای فرکانسی یکسانی هستند.

$$\dot{e} = (A - GC)e + w - Gv$$

می‌توان نشان داد که

$$e = e_w + e_v$$

می‌توان نشان داد که اثر w روی پاسخ ZS است

$$e_w = e_{ZS}$$

اثر v روی پاسخ Zi است

$$e_v = e_{Zi}$$

نویز فرآیند (w) به صورت ورودی در معادله ظاهر می‌شود.

نویز اندازه‌گیری (v) به صورت مقدار اولیه حتما $e(0)$ ظاهر می‌شود.

تابع هدفی که می‌خواهیم کمینه شود

$$J=\int_0^\infty \left(e_w^T e_w + e_v^T e_v\right)dt = \int_0^\infty e^T e \, dt$$

$$\dot e = (A-GC)e + w - Gv$$

می‌خواهیم ماتریس بهینه G را به نحوی به دست آوریم که $A-GC$ پایدار شود و تابع هزینه J کمینه شود.

می‌توان نشان داد که این مسئله دوگان مسئله LQR است.

LQE (linear quadratic Estimator
یا
LQG (linear quadratic Gaussian)
معروف است

قضیه: رویتگر بهینه یا فیلتر کالمن

فرض کنید زوج (A, C) آشکارپذیر باشد و $(A, W^{\frac{1}{2}})$ پایدارپذیر باشد. در این صورت برای $V>0$ ماتریس بهره رویتگر بهینه که شاخص عملکرد واریانس خطا را کمینه کند از معادله زیر به دست می آید

$$G = PC^T V^{-1}$$

که در آن P از حل مثبت معین معادله ریکاتی زیر به دست می آید:

$$AP + PA^T - PC^T V^{-1} C P + W = 0$$

که در آن

$$V = Cov(v(t)) \quad \text{یا} \quad V = v_0^2$$

$$W = Cov(w(t)) \quad \text{یا} \quad W = \omega_0^2$$

مقایسه با LQR،

LQR	LQG
A	A^T
B	C^T
Q	W
R	V
K	G^T ?

$V \in R^{m \times m}$ m تعداد خروجی های اندازه گیری شده

$W \in R^{n \times n}$

$$\begin{cases} G = lqr(A^T, C^T, W, V) \\ G = G^T \end{cases}$$

- فیلتر کالمن توسط کالمن در سال 1960 ارائه شد
- توسط انجمن IEEE به عنوان یکی از کارآمدترین نظریه کنترل در کاربرد برگزیده شد، 1994
- در کاربردهای مختلف، تئوری تخمین، ناوبری و هدایت، پردازش سیگنال و تصویر، پیش بینی و رفع خطا و...

فیلتر کالمن نظریه‌ای موفق در کاربردهای مختلف

→ قوام آن و بی نیازی به مدل دقیق

→ محدودیت کم در اجرا

نحوه انتخاب ماتریسهای V و W

فرض کنید $m=2$ و $n=4$ ،

اغتشاش در معادله 3 اعمال می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = \sim \quad + T_{L1} \\ \dot{x}_4 = \;'' \quad + T_{L2} \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

فرض کنیم دقت اندازه‌گیری $x_1 \leftarrow \pm v_{01}$

$\sim \quad \sim \quad x_2 \leftarrow \pm v_{02}$

ماکزیمم اغتشاش اعمالی $\max(T_{L1}) = w_{01}$

$\max(T_{L2}) = w_{02}$

$$V = \begin{bmatrix} v_{01}^2 & 0 \\ 0 & v_{02}^2 \end{bmatrix} ,$$

انتخاب اولیه برای ماتریس های V, W

هرچه سنسور اندازه گیری بهتری داشته باشد $\leftarrow v_{02} \uparrow$

هرچه نویز های فرایند بیشتر باشد $\leftarrow w_{02} \uparrow$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_{01}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{02}^2 \end{bmatrix}$$

مثال: برای سیستم موتور DC یک رویت گر حالت بهینه طراحی کنید. در صورتی که دقت اندازه گیری خروجی $\pm 0.1\,Rad$ و حداکثر اغتشاش وارد بر سیستم $0.2\,Nm$ باشد.

w اغتشاش

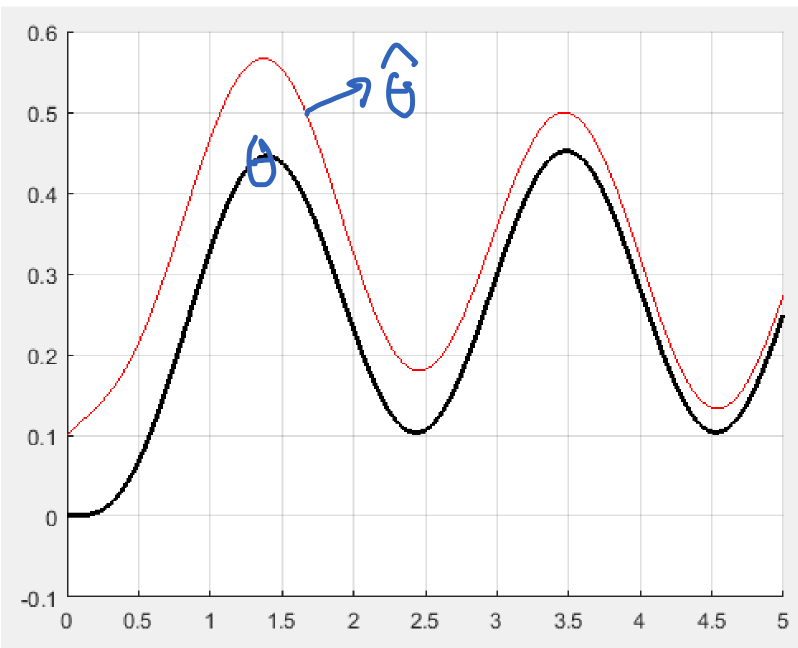
$$\begin{cases} \begin{bmatrix}\dot\theta\\ \dot\omega\\ \dot i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&4.4\\0&-12&-24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\20\end{bmatrix}v+\begin{bmatrix}0\\-7.4\\0\end{bmatrix}T_L \\ y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ i\end{bmatrix}+v\end{cases}$$

$$V=(0.1)^2$$

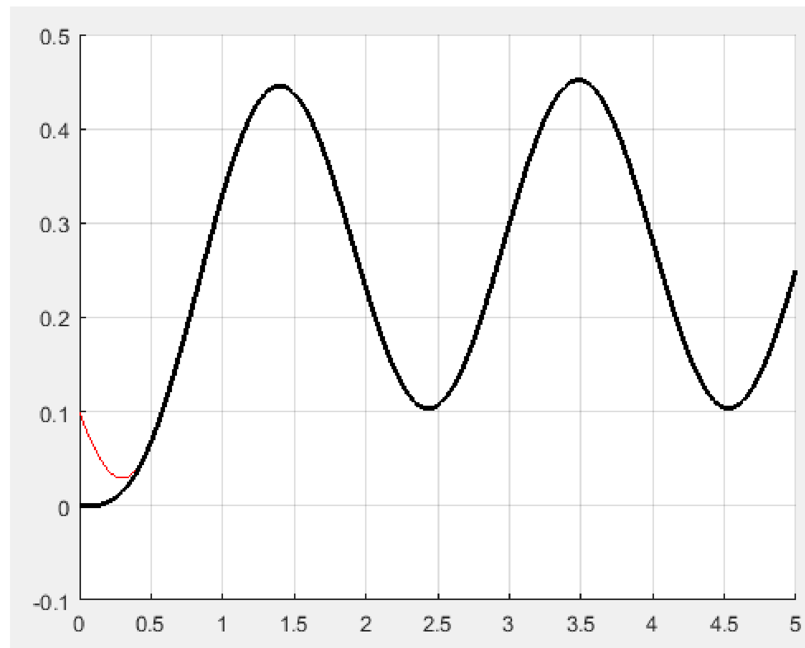
$$W=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&(0.2)^2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

بدون اعمال اغتشاش و نویز

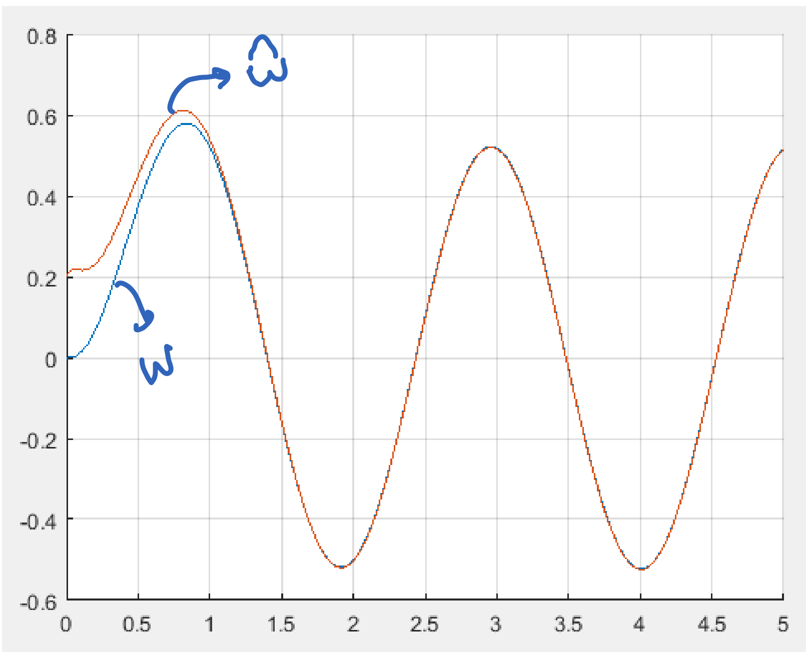
V=1;
W=[0 0 0;0 1 0 ; 0 0 0];



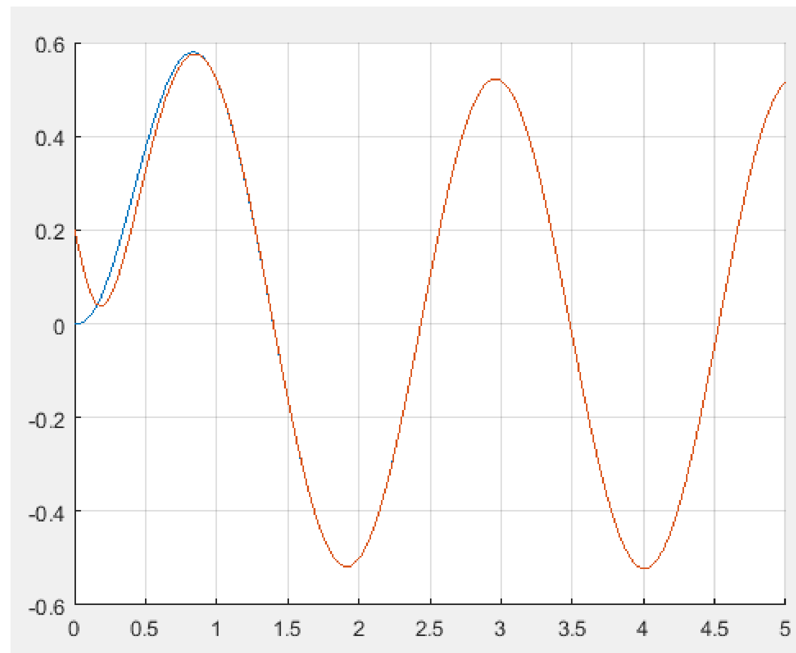
V=.001;
W=[0 0 0;0 1 0 ; 0 0 0];



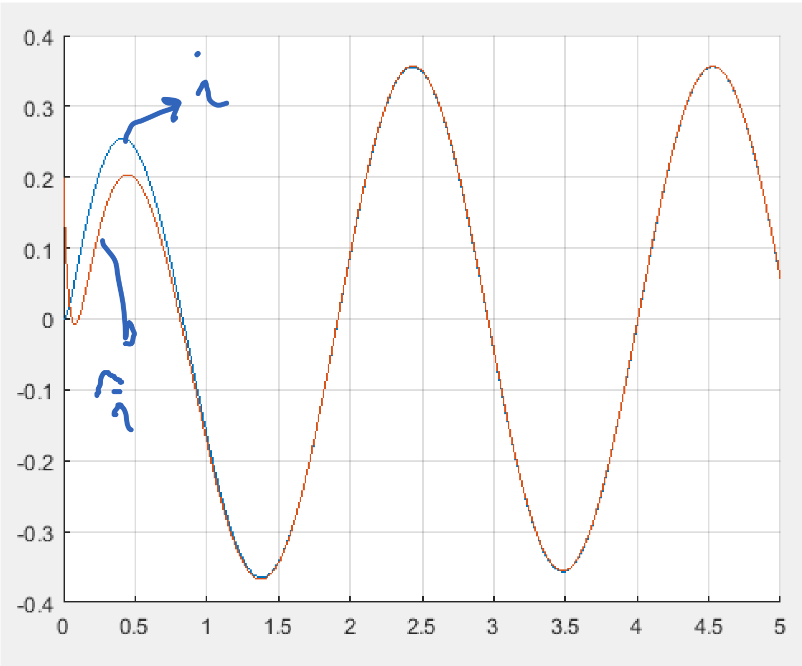
V=1;
W=[0 0 0;0 1 0 ; 0 0 0];



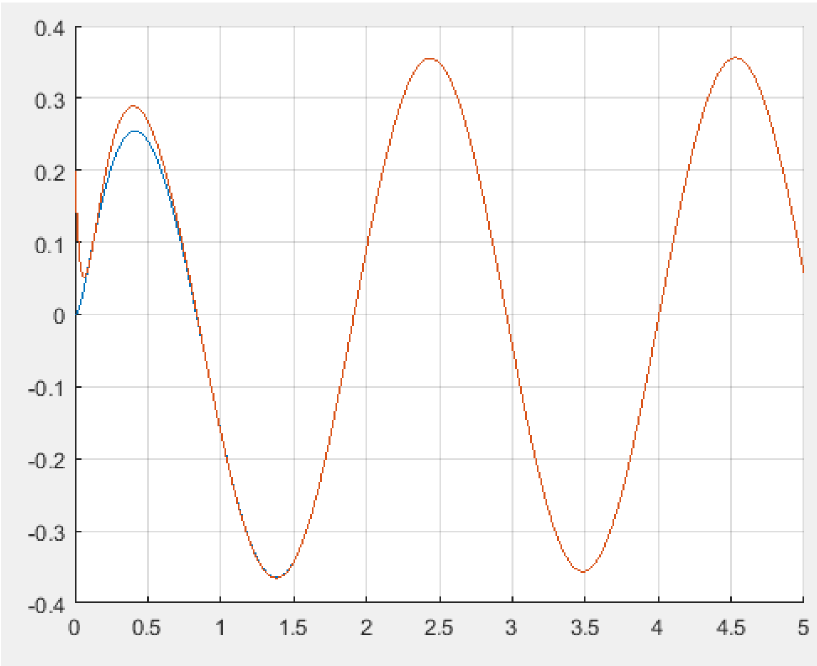
V=.001;
W=[0 0 0;0 1 0 ; 0 0 0];



V=1;
W=[0 0 0;0 1 0 ; 0 0 0];



V=.001;
W=[0 0 0;0 1 0 ; 0 0 0];



با کاهش v سرعت تخمین رویت گر افزایش می یابد.

به معنای این است که قطب‌های حلقه بسته رویت گر $(A-GC)$ از محور ها

دورتر شده اند.

$v=1 \longrightarrow eig(A-GC) \longrightarrow$

-0.4629
-2.4059
-21.5499

$v=0.01 \longrightarrow eig(A-GC) \longrightarrow$

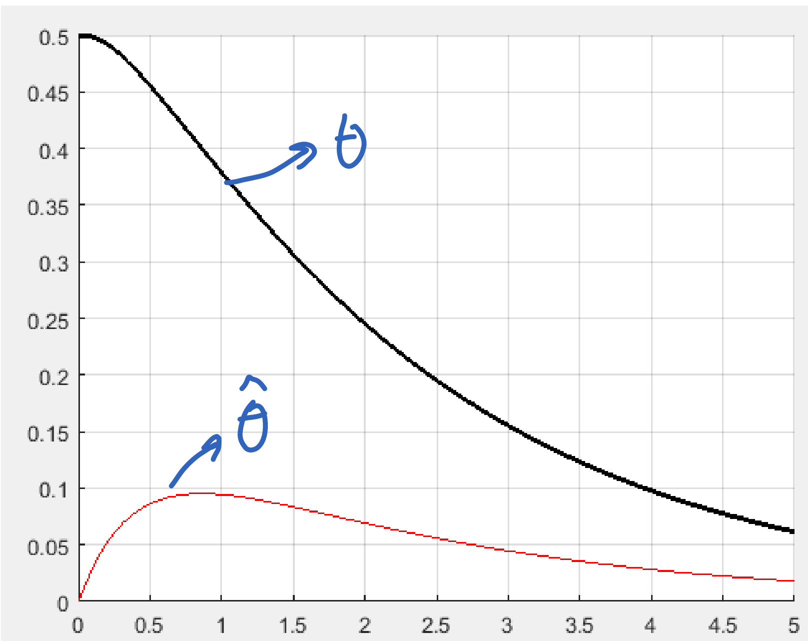
-4.3554 + 4.0285i
-4.3554 - 4.0285i
-21.5619 + 0.0000i

$v=0.001 \xrightarrow{eig(A-GC)}$

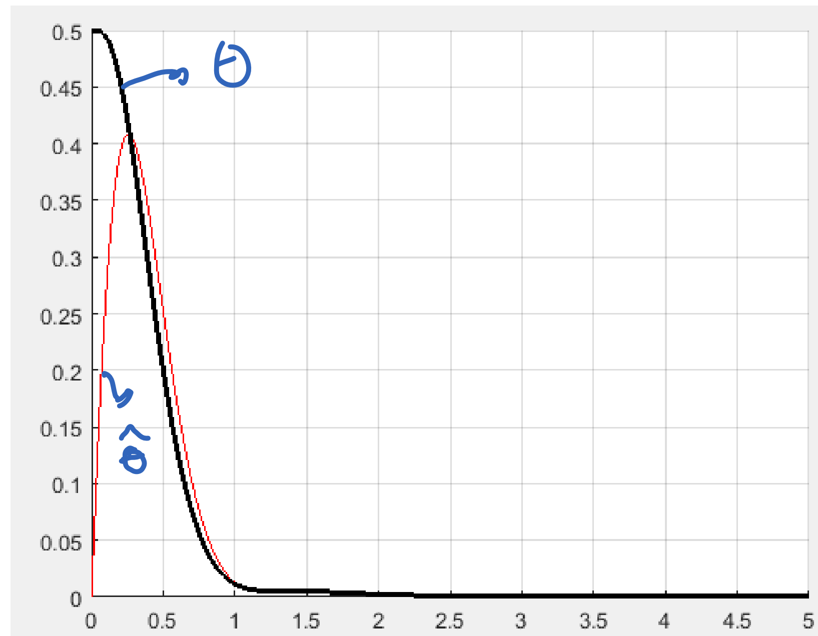
-7.4610 + 7.4242i
-7.4610 - 7.4242i
-21.6634 + 0.0000i

میزان اعمال اغتشاش و نویز

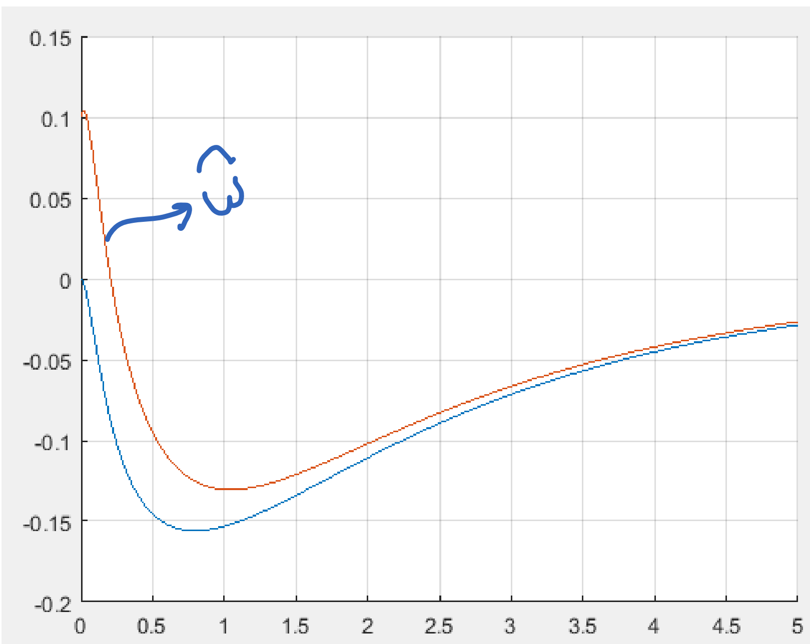
V=1;
W=[0 0 0;0 1 0 ; 0 0 0];



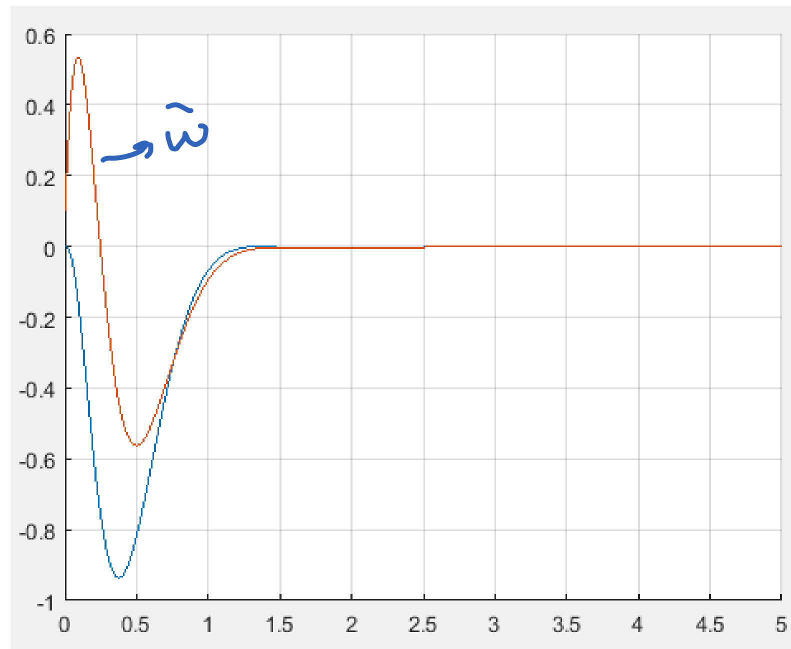
V=.001;
W=[0 0 0;0 1 0 ; 0 0 0];



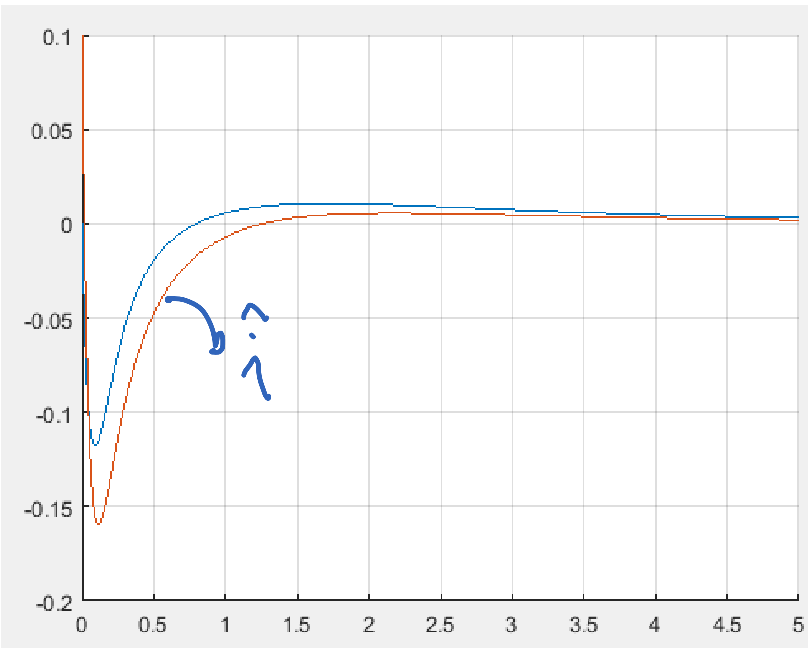
V=1;
W=[0 0 0;0 1 0 ; 0 0 0];



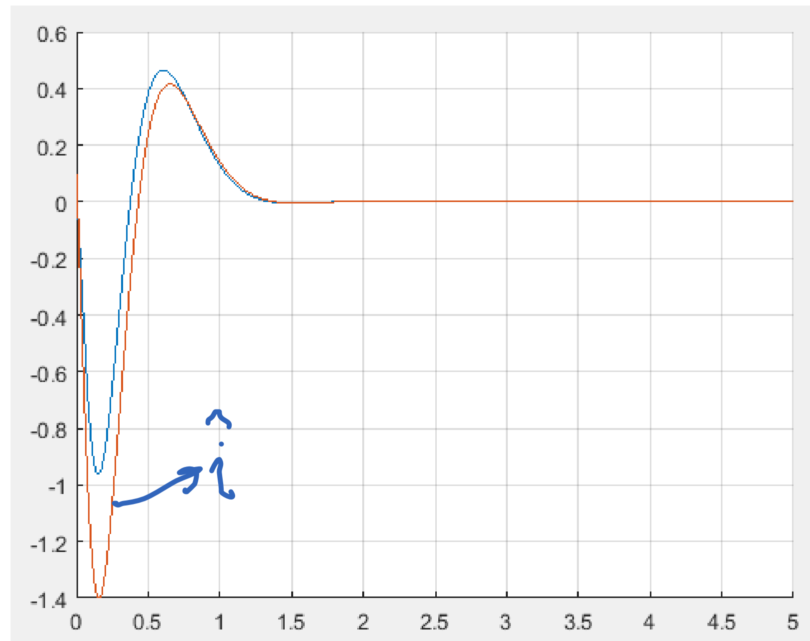
V=.001;
W=[0 0 0;0 1 0 ; 0 0 0];



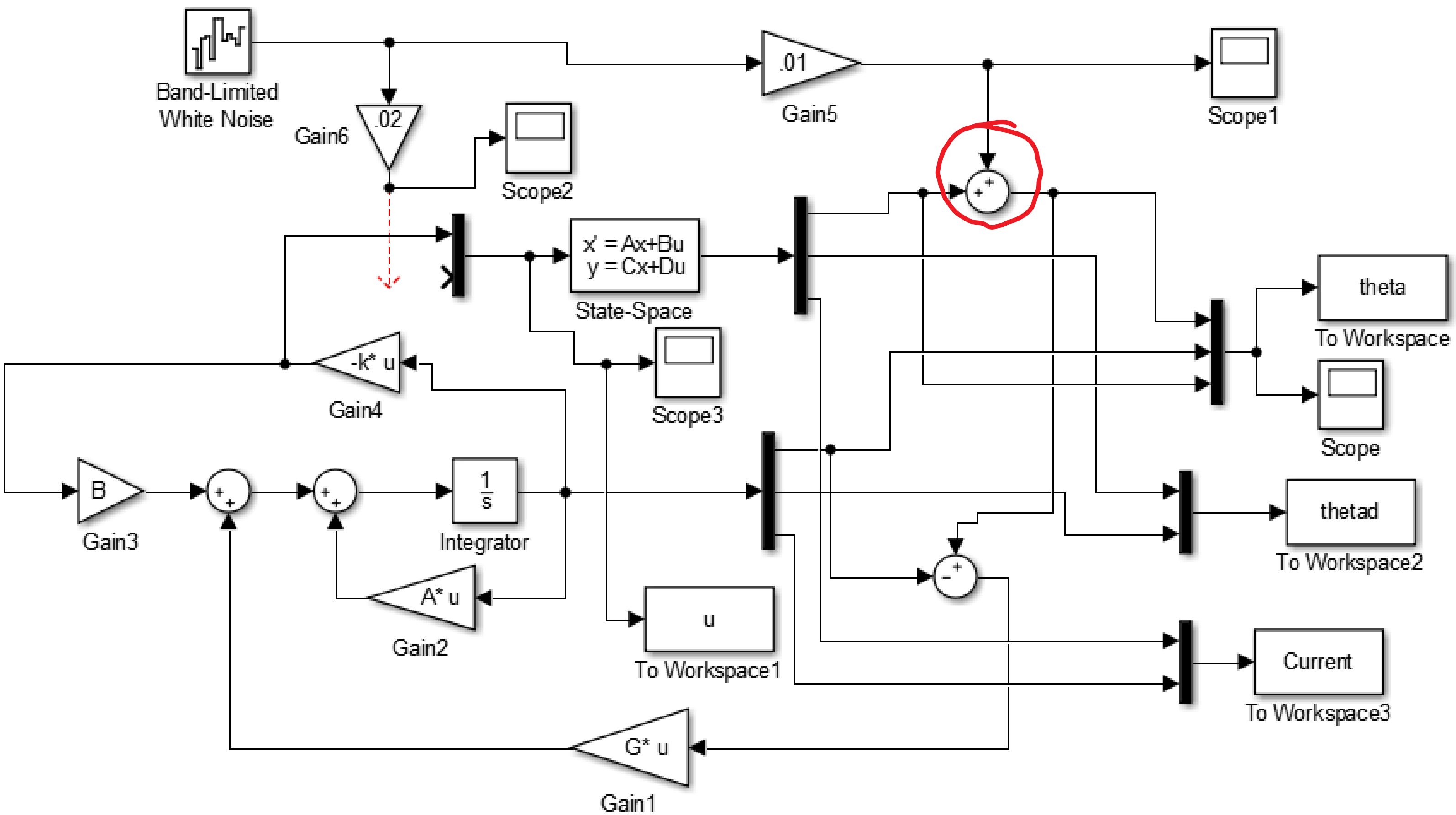
V=1;
W=[0 0 0;0 1 0 ; 0 0 0];



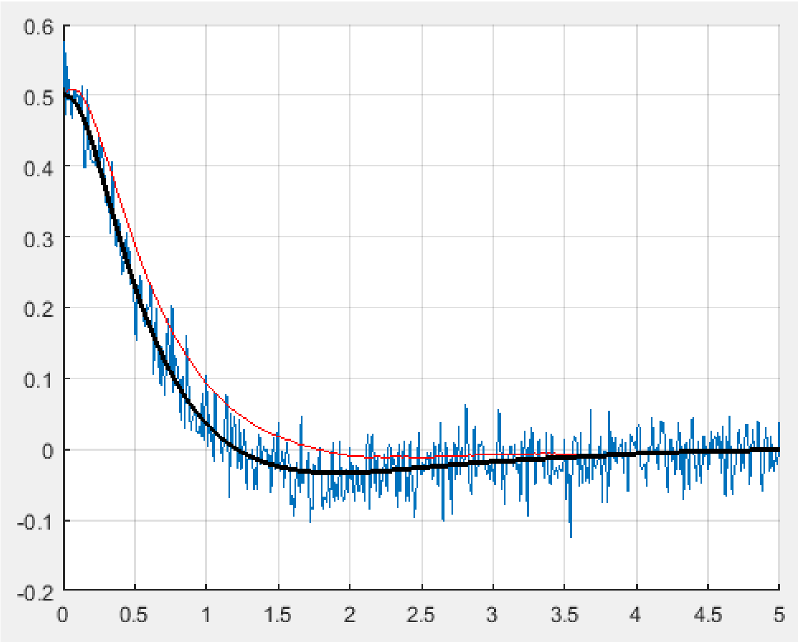
V=.001;
W=[0 0 0;0 1 0 ; 0 0 0];



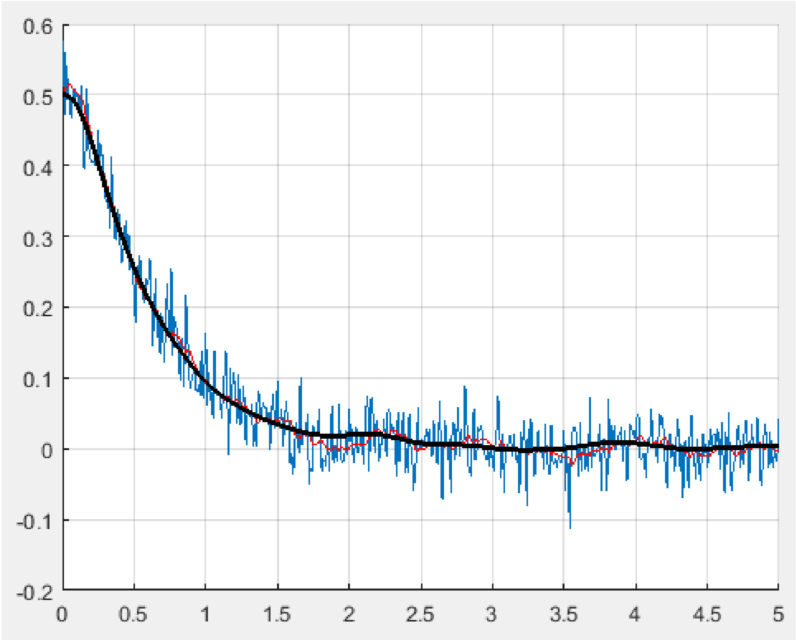
فقط ما متغیر اندازه گیری داریم



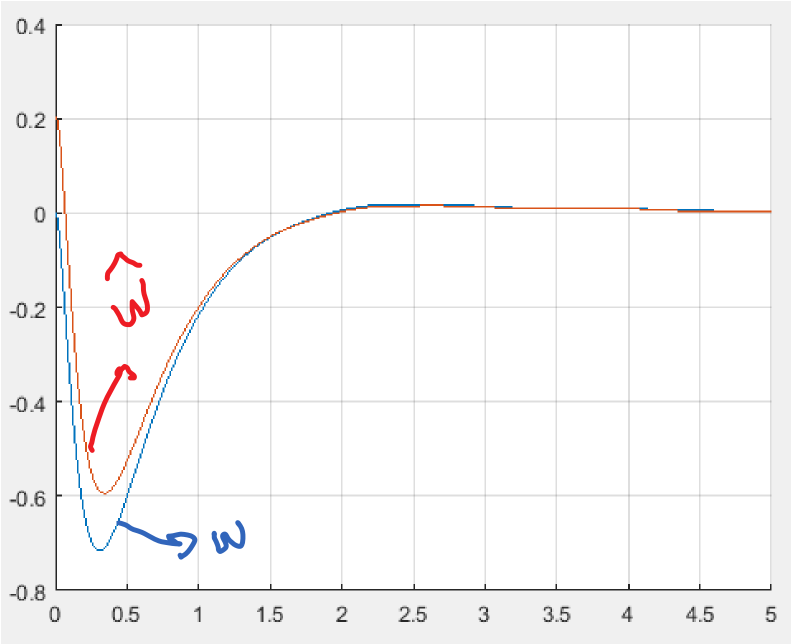
V=1*0.1^2;
W=[0 0 0;0 0.2^2 0 ; 0 0 0];



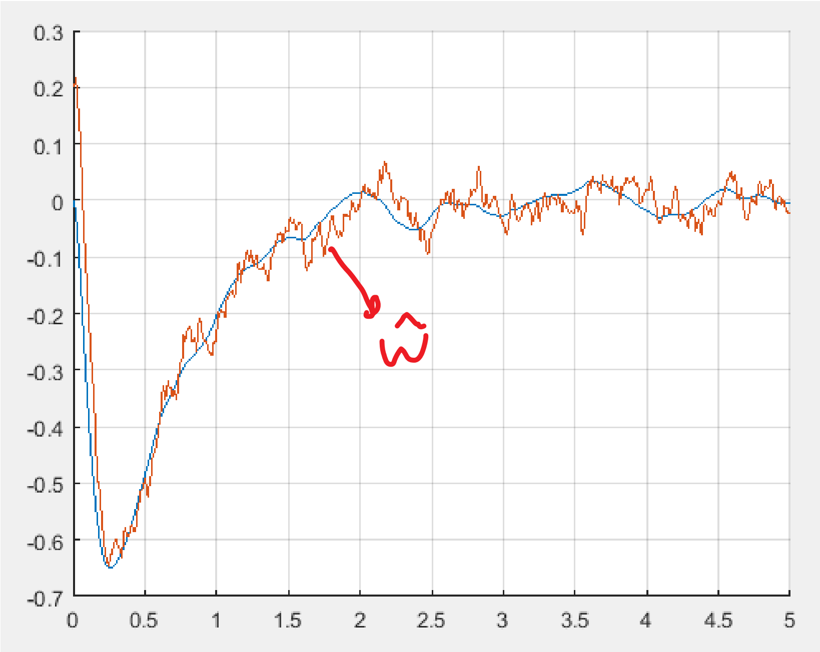
V=0.001*0.1^2;
W=[0 0 0;0 0.2^2 0 ; 0 0 0];



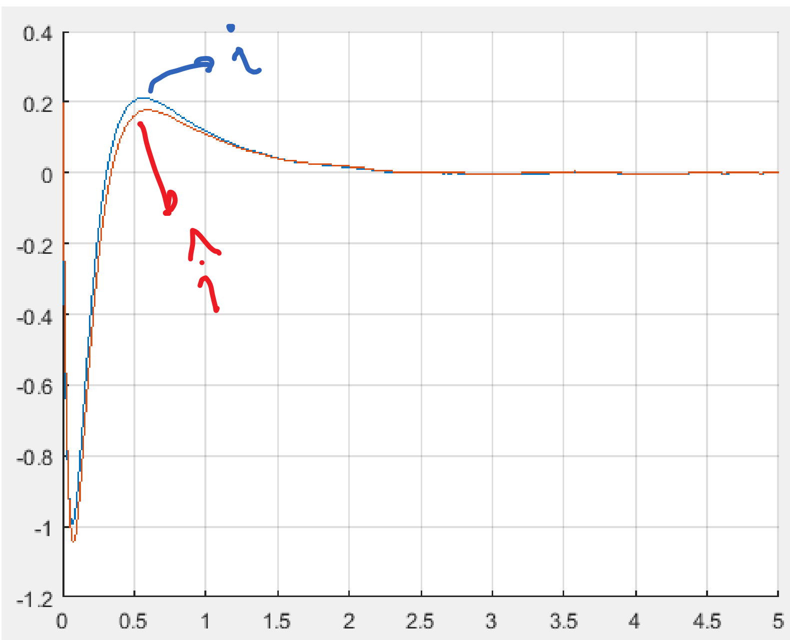
V=1*0.1^2;
W=[0 0 0;0 0.2^2 0 ; 0 0 0];



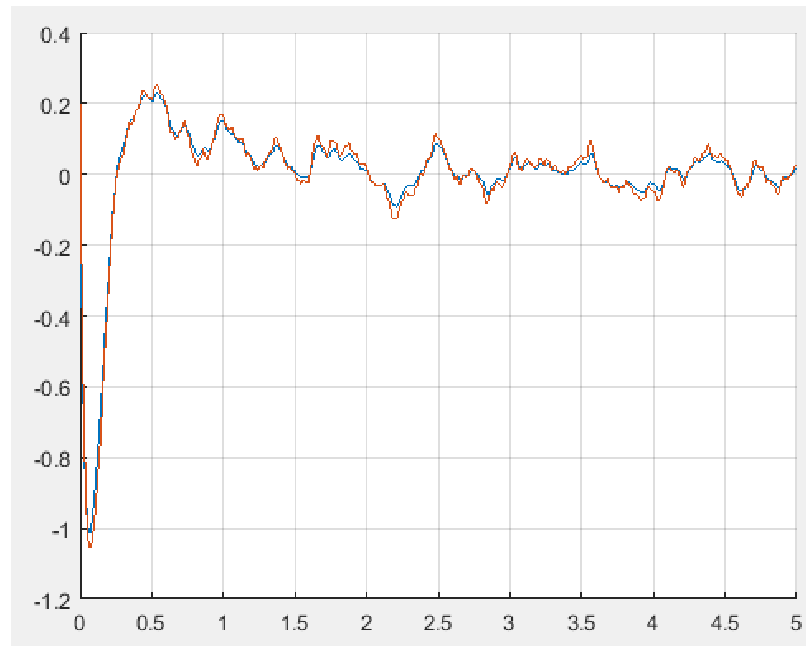
V=0.001*0.1^2;
W=[0 0 0;0 0.2^2 0 ; 0 0 0];



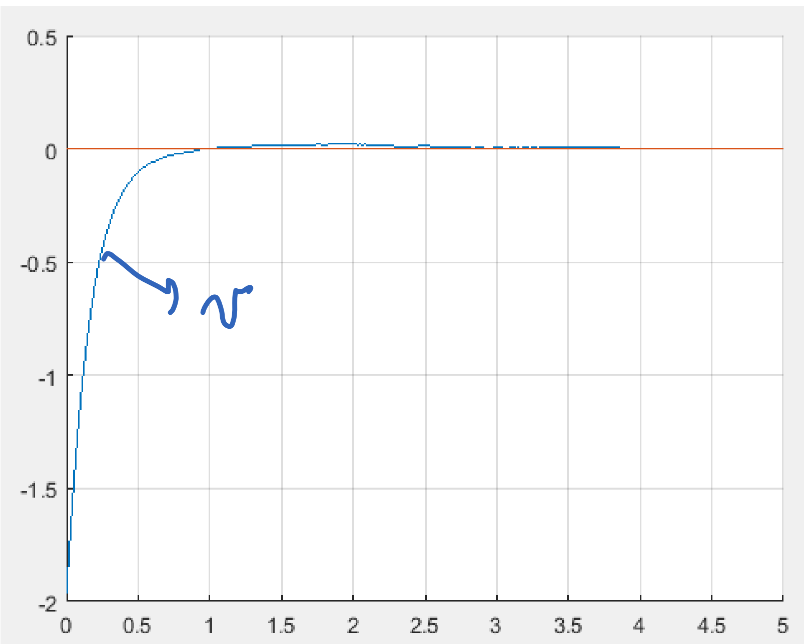
V=1*0.1^2;
W=[0 0 0;0 0.2^2 0 ; 0 0 0];



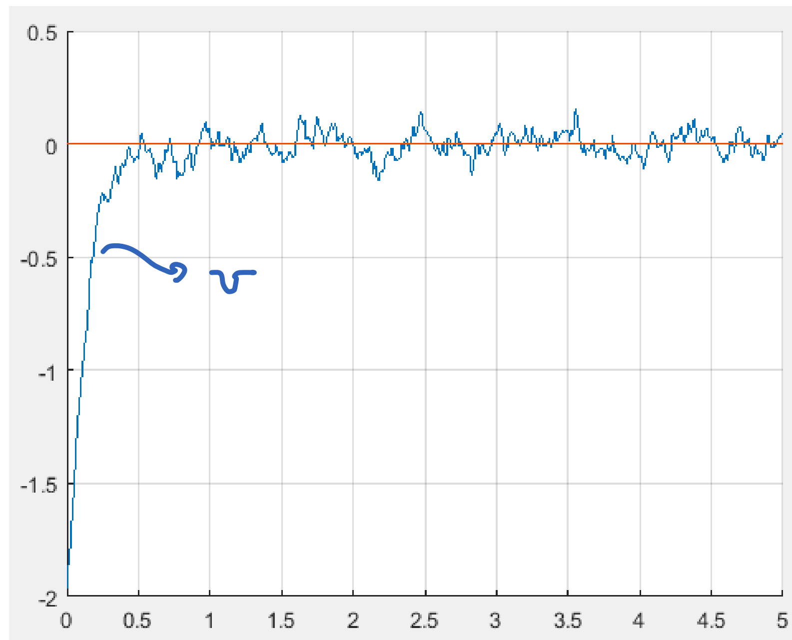
V=0.001*0.1^2;
W=[0 0 0;0 0.2^2 0 ; 0 0 0];



V=1*0.1^2;
W=[0 0 0;0 0.2^2 0 ; 0 0 0];



V=0.001*0.1^2;
W=[0 0 0;0 0.2^2 0 ; 0 0 0];



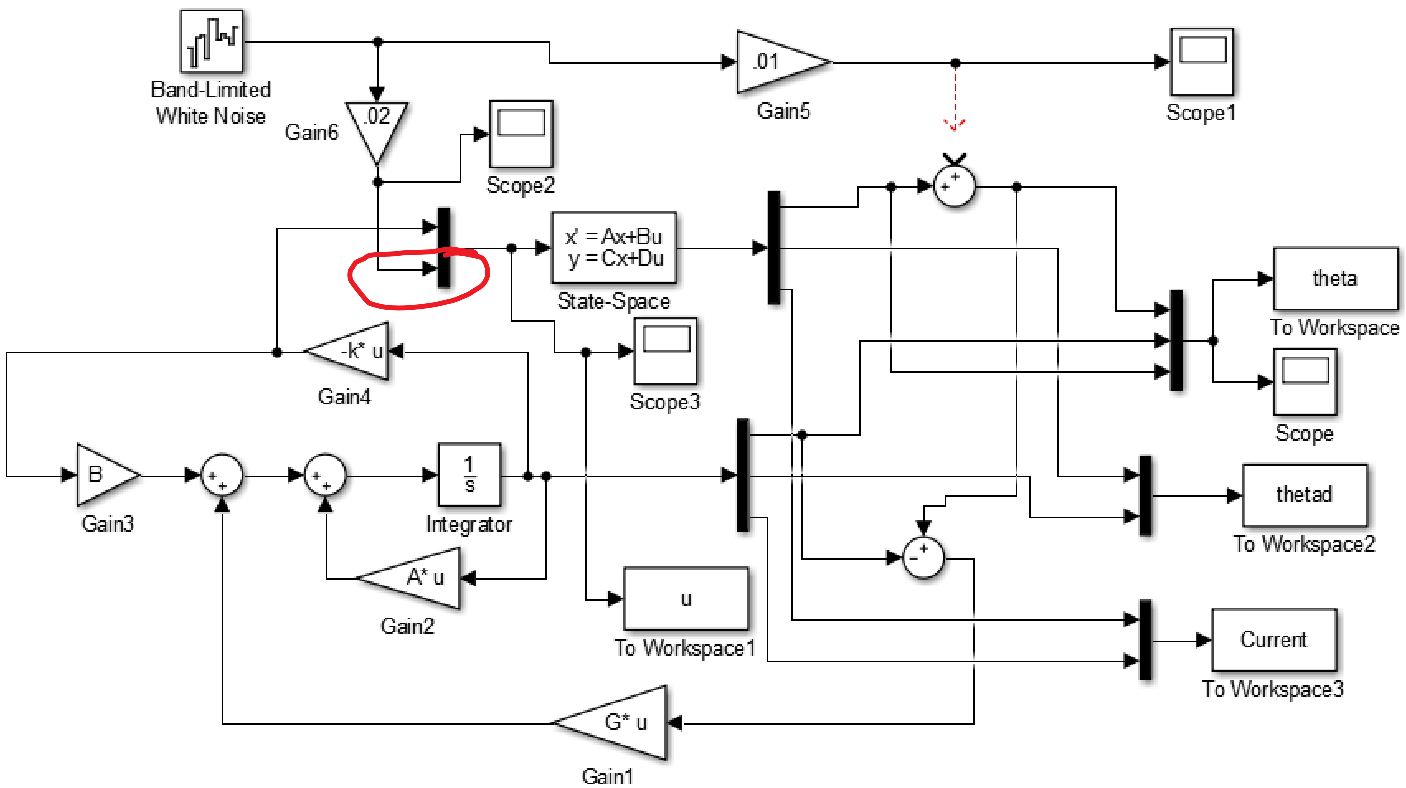
کوچک کردن بیش از حد V باعث می شود که اثرات نویز اندازه گیری در پاسخ افزایش یابد.

رویت گر در اینجا دو کار را انجام می دهد

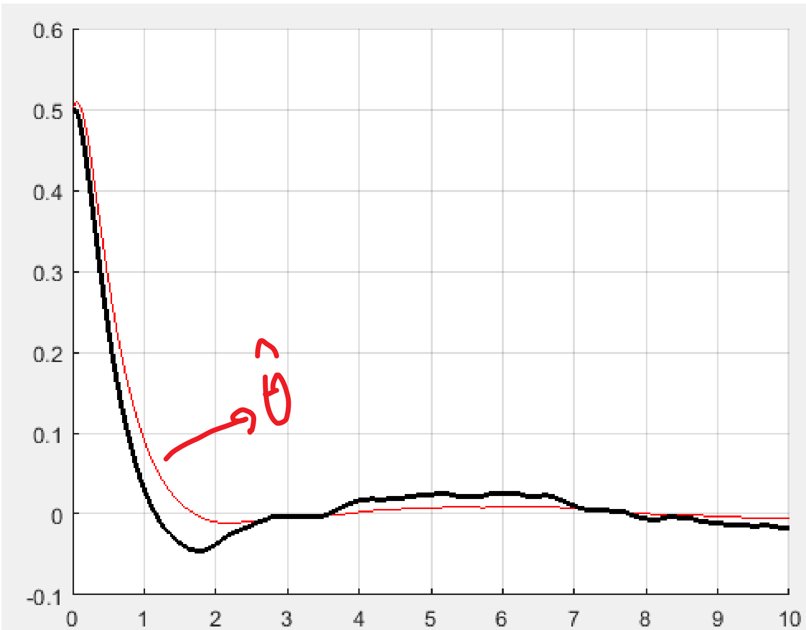
تخمین حالتهایی که اندازه نمی گیریم $\hat{\omega}$

کاهش اثر نویز اندازه گیری $\hat{?}$

اعمال نویز فرآیند.

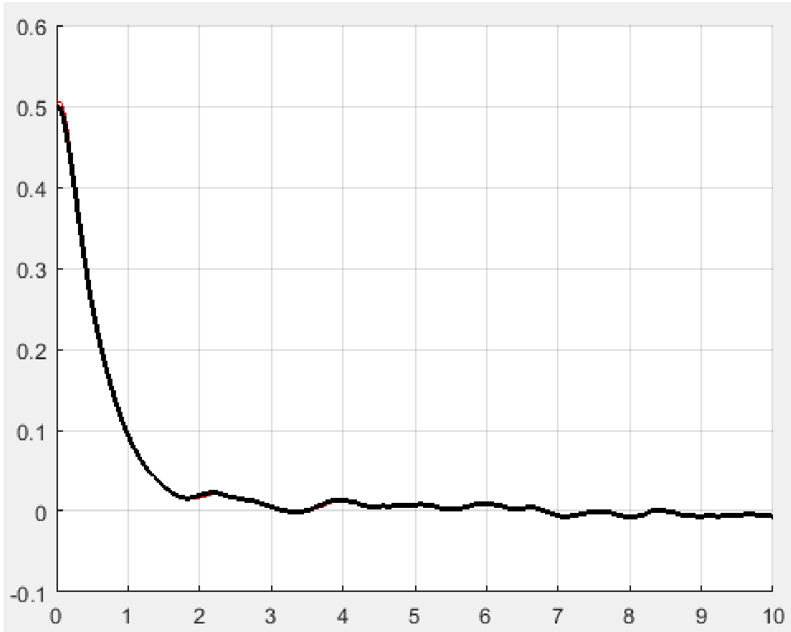


V=1*0.1^2;
W=[0 0 0;0 0.2^2 0 ; 0 0 0];



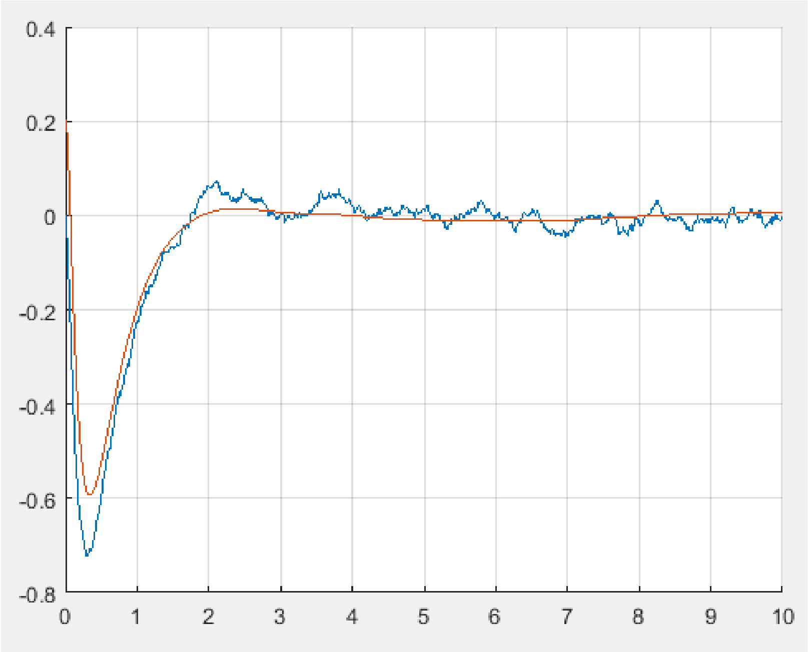
در این حالت اثر اغتشاش اولیه (w) روی پاسخ
بیشتر است

V=.001*0.1^2;
W=[0 0 0;0 0.2^2 0 ; 0 0 0];



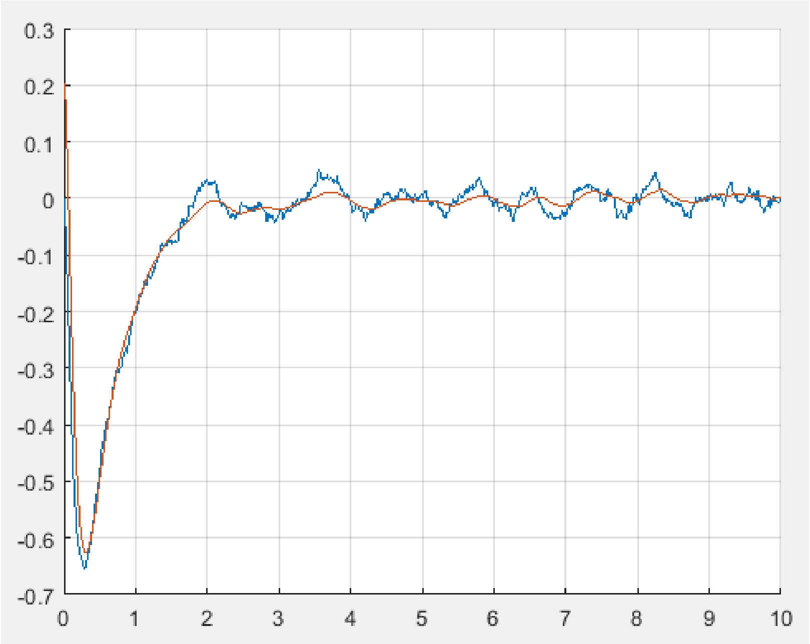
better Dis. rejection

V=1*0.1^2;
W=[0 0 0;0 0.2^2 0 ; 0 0 0];

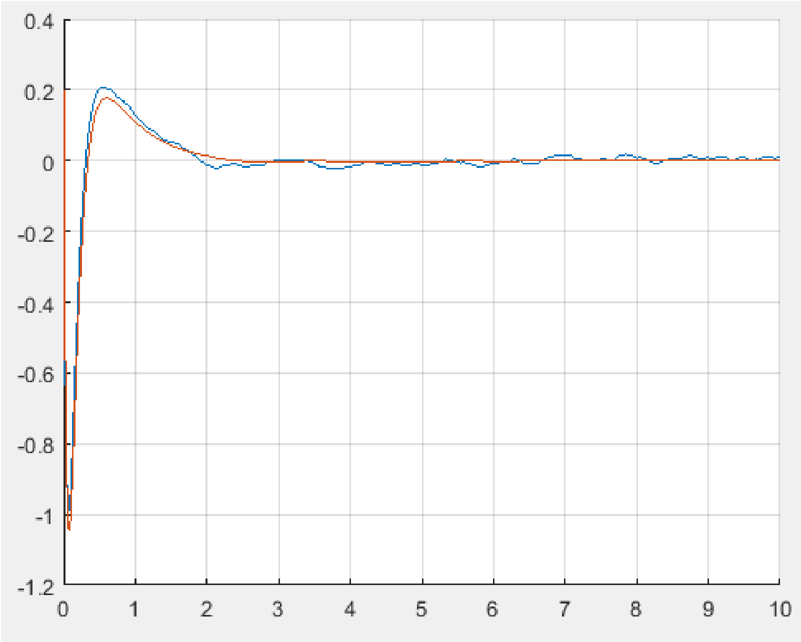


ω

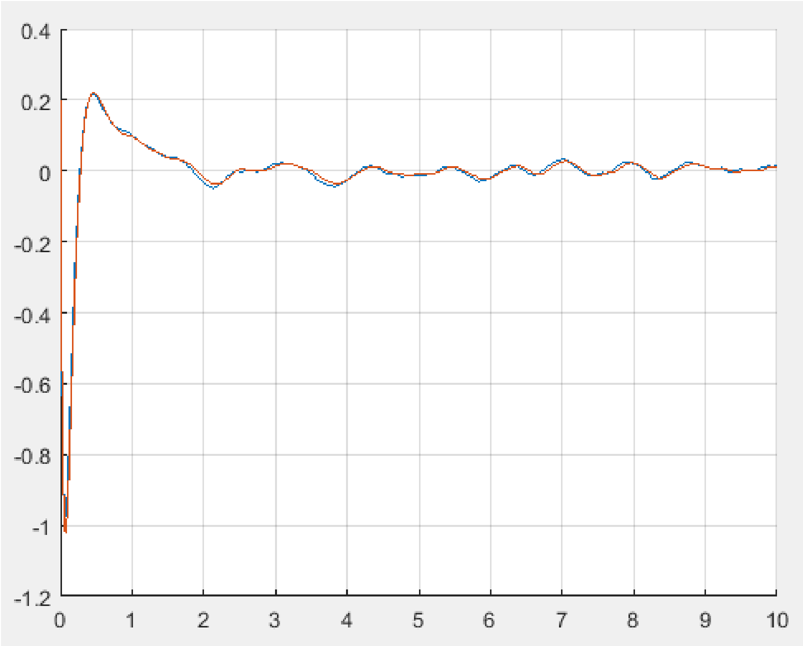
V=.001*0.1^2;
W=[0 0 0;0 0.2^2 0 ; 0 0 0];



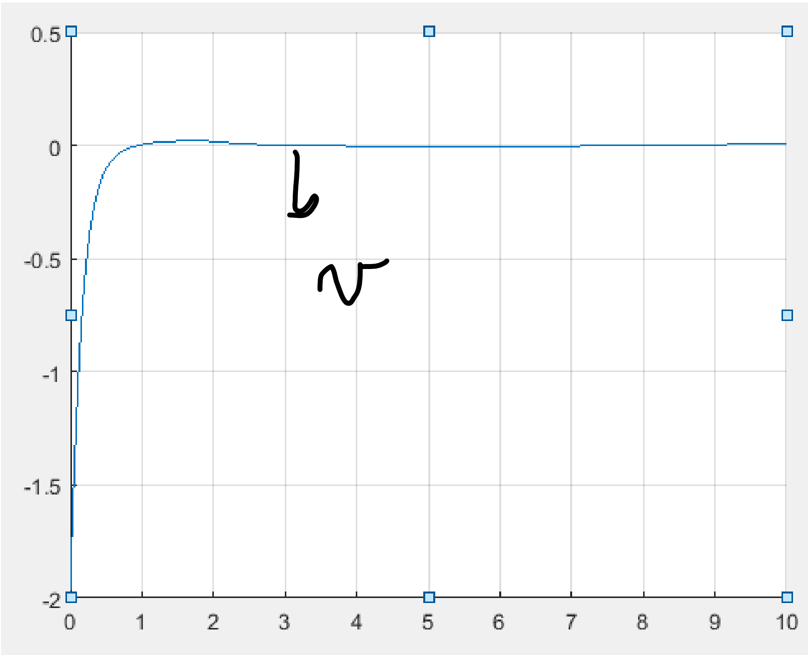
V=1*0.1^2;
W=[0 0 0;0 0.2^2 0 ; 0 0 0];



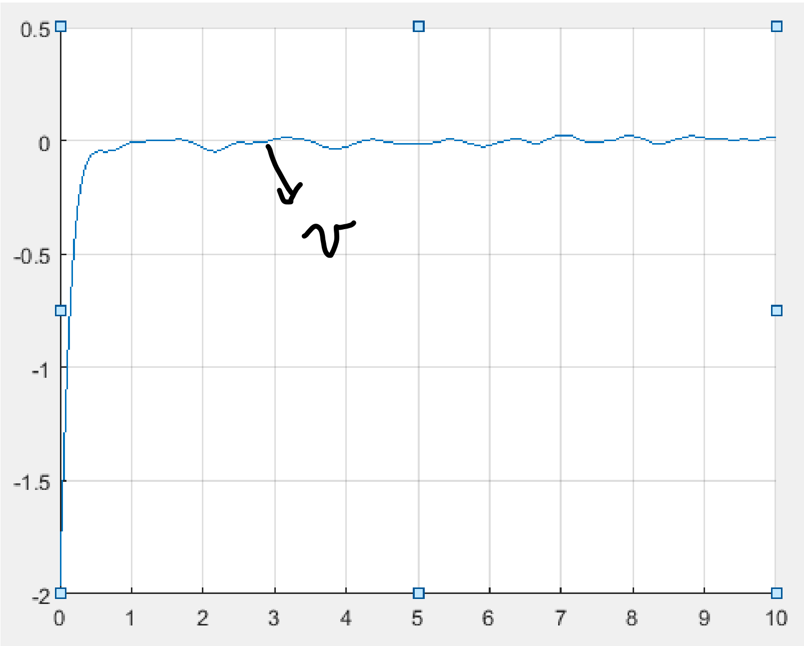
V=.001*0.1^2;
W=[0 0 0;0 0.2^2 0 ; 0 0 0];



```
V=1*0.1^2;
W=[0 0 0;0 0.2^2 0 ; 0 0 0];
```



```
V=.001*0.1^2;
W=[0 0 0;0 0.2^2 0 ; 0 0 0];
```

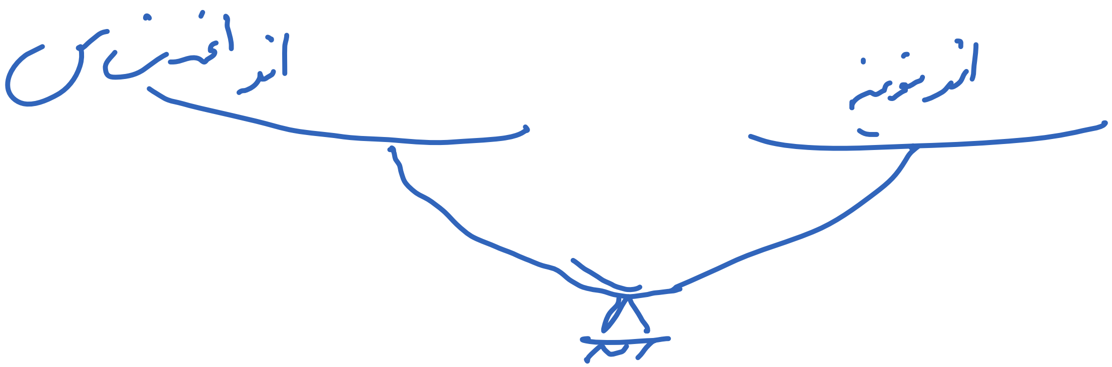


کاهش T ← کاهش اثر اغتشاش در پاسخ
← افزایش اثر نویز در پاسخ

معادل افزایش W

افزایش T ← افزایش اثر اغتشاش در پاسخ
← کاهش اثر نویز در پاسخ

معادل کاهش W



اگر اندازه گیری خیلی دقیق باشد و خطای اندازه گیری کم باشد

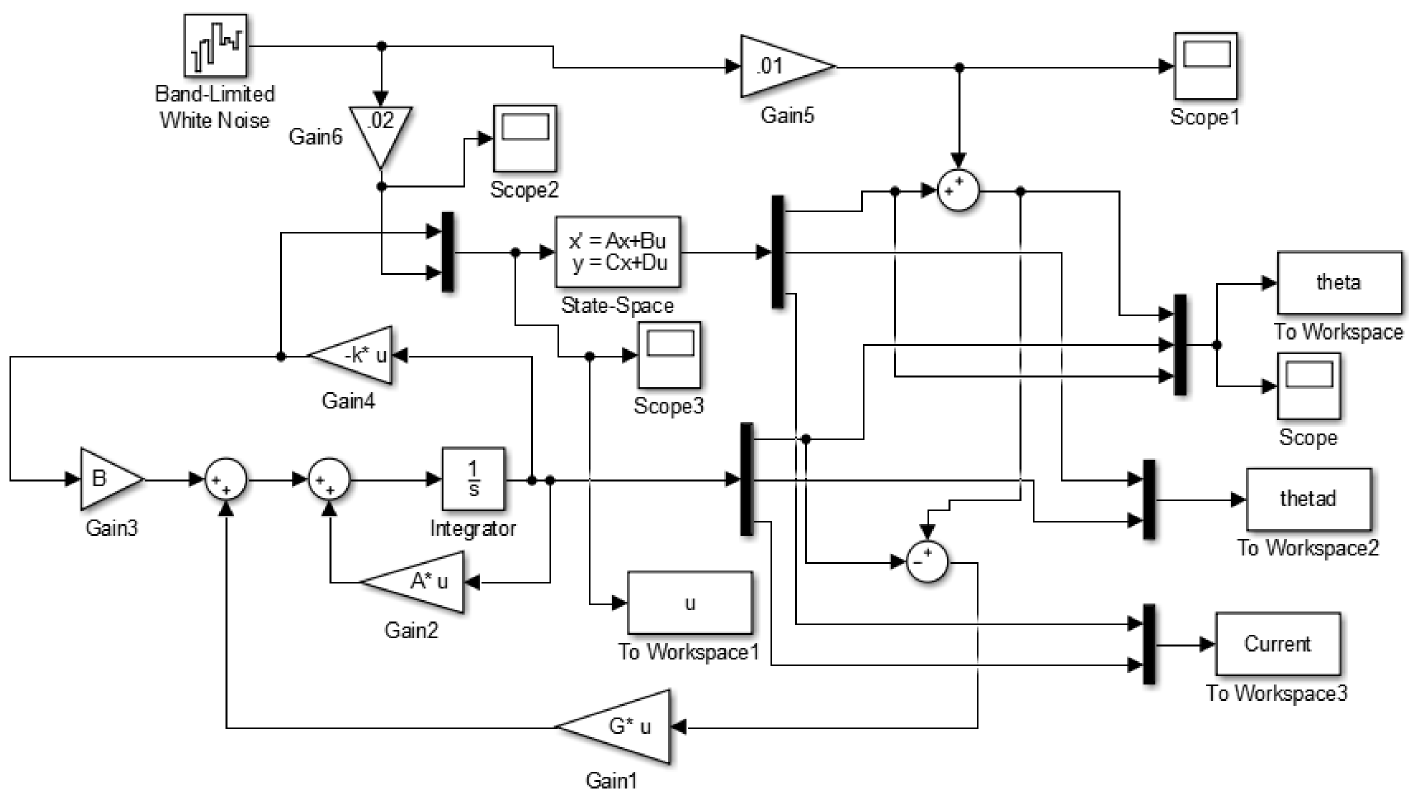
$W \uparrow$ یا $V \downarrow$

اگر مدل دقیق داشته باشیم، خطای مدل نیز خیلی کم باشد

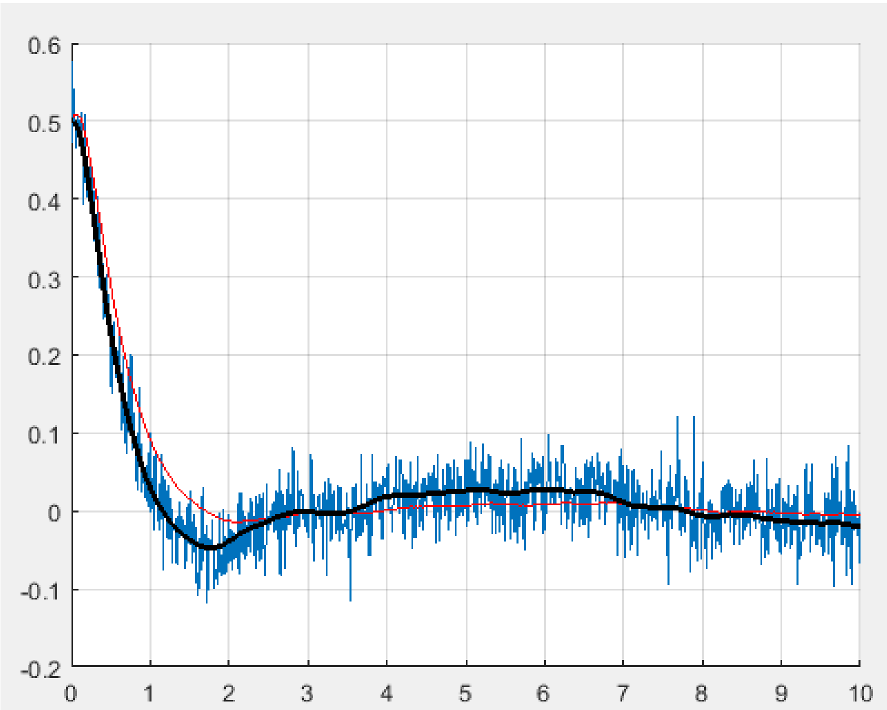
$V \uparrow$ یا $W \downarrow$

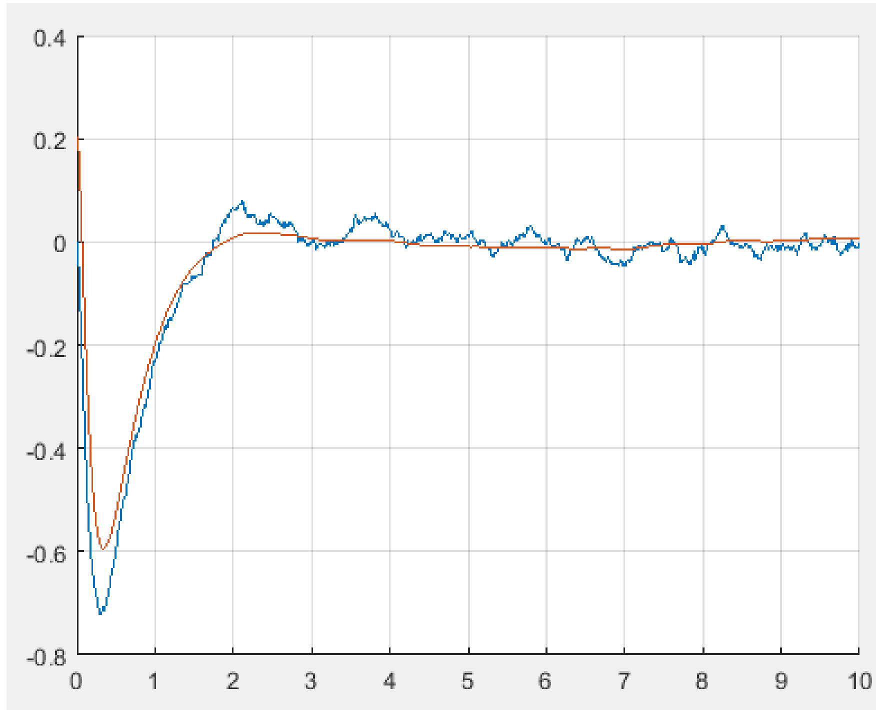
اگر هم خطای اندازه گیری و هم خطای فرآیند داشته باشیم باید یک مصالحه بین V و W داشته باشیم.

اعمال نویز اندازه گیری و نویز فرآیند.



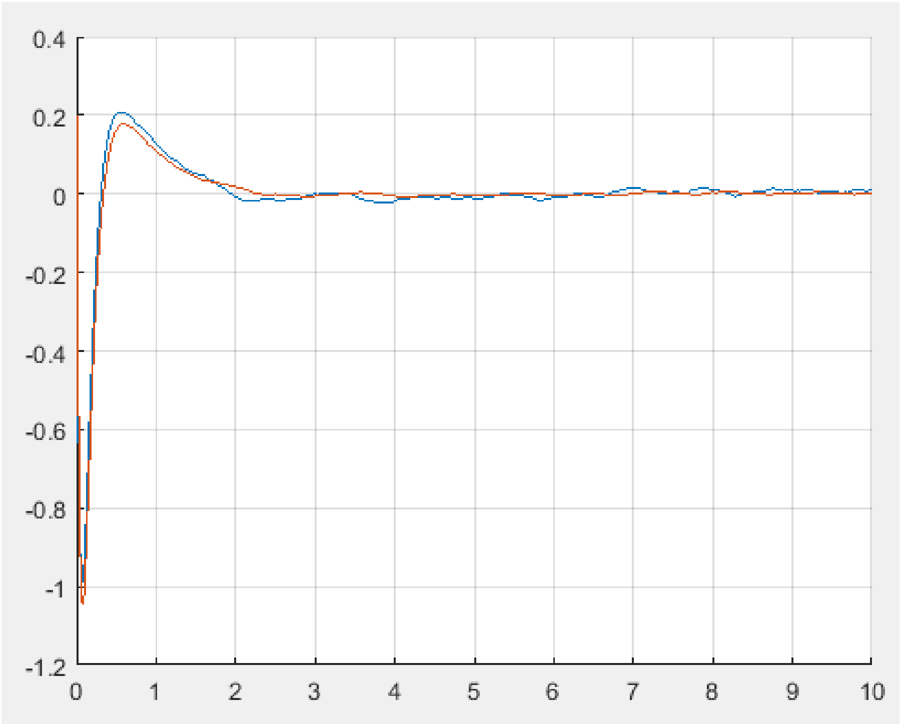
V=1*0.1^2;
W=[0 0 0;0 0.2^2 0 ; 0 0 0];

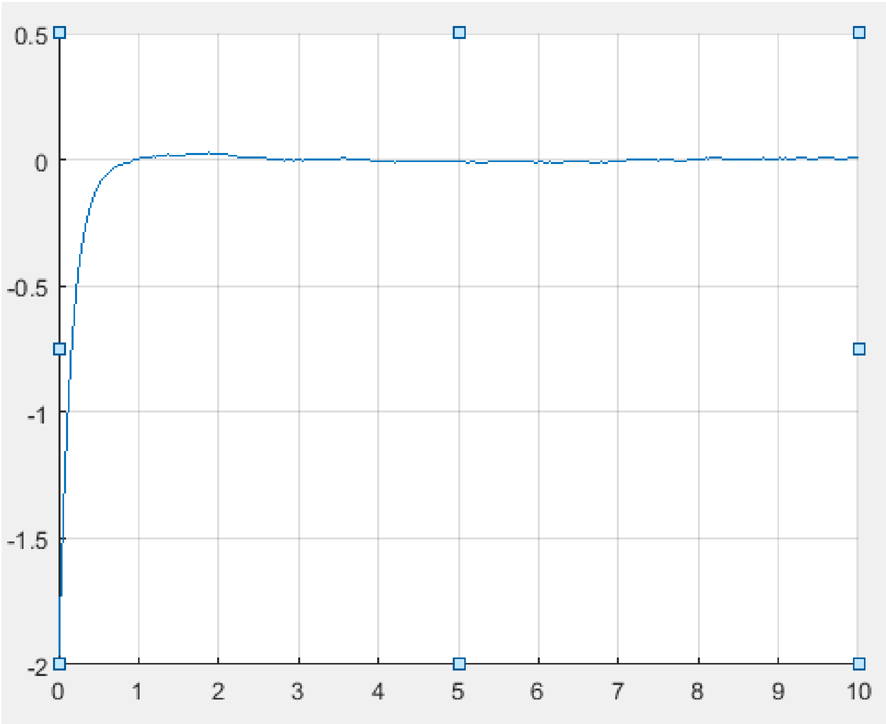




θ

w





i

v

کنترل مدرن

رویت گر کاهش مرتبه،
سیستم حلقه بسته فیدبک حالت-رویت گر حالت

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

رویت گر کاهش مرتبه یافته، (رویت گر لوئنبرگر) Luenberger obs.

به دلیل عملکرد بالای فیلتر کالمن درصورتی که پروسسورهایی با قدرت و سرعت لازم را داشته باشیم، مجددا متغیرهای اندازه گیری شده نیز مجددا تخمین زده می شوند تا نویز اندازه گیری در آنها حذف شود.

درصورت کوچک بودن نویز اندازه گیری می توان از اطلاعات خروجی مستقیما استفاده کرد و دیگر نیازی به تخمین مجدد آنها نیست. در این حالت از رویت گر کاهش مرتبه استفاده می شود.

$$x = \begin{bmatrix} x_m \\ x_u \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{اندازه‌گیری می‌شوند} \longrightarrow m \;,\; y \in R^{m\times 1} \\ \longrightarrow \text{نمی‌شوند} \sim \longrightarrow n-m \end{array}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{x}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{mm} & A_{mu} \\ A_{um} & A_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ x_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m \\ B_u \end{bmatrix} u \\ Y = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ x_u \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\dot{x}_u = A_{um} x_m + A_{uu} x_u + B_u u$$

$$\dot{x}_m = A_{mm} x_m + A_{mu} x_u + B_m u$$

$$\dot{x}_u = A_{um} x_m + A_{uu} x_u + B_u u$$

$$\dot{x}_m = A_{mm} x_m + A_{mu} x_u + B_m u \longrightarrow A_{mu} x_u = \underbrace{\dot{x}_m - A_{mm} x_m - B_m u} = z$$

معادله رویت گر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\dot{\hat{x}}_u = A_{uu}\hat{x}_u + A_{um} x_m + B_u u + G(\underbrace{A_{mu} x_u} - A_{mu}\hat{x}_u)$$

$$\dot{\hat{x}}_u = A_{uu}\hat{x}_u + A_{um} x_m + B_u u + G(\dot{x}_m - A_{mm} x_m - B_m u - A_{mu}\hat{x}_u)$$

باید به نحوی $\dot{x}_m$ را حذف کنیم با تعریف متغیر جدید z به صورت زیر

$$z = \hat{x}_u - G x_m$$

$$\hat{x}_u = z + G x_m \Rightarrow \dot{\hat{x}}_u = \dot{z} + G \dot{x}_m$$

$$A_{uu}\hat{x}_u + A_{um} x_m + B_u u + \cancel{G(\dot{x}_m} - A_{mm} x_m - B_m u - A_{mu}\hat{x}_u)$$

$$= \dot{z} + \cancel{G \dot{x}_m}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = \overbrace{(A_{uu} - G A_{mu})}^{\hat{A}} z + \overbrace{(A_{uu} G + A_{um} - G A_{mm} - G A_{mu} G)}^{\hat{B}} x_m \\ \qquad + \underbrace{(B_u - G B_m)}_{\hat{F}} u \\ \hat{x}_u = z + G x_m \end{cases}$$

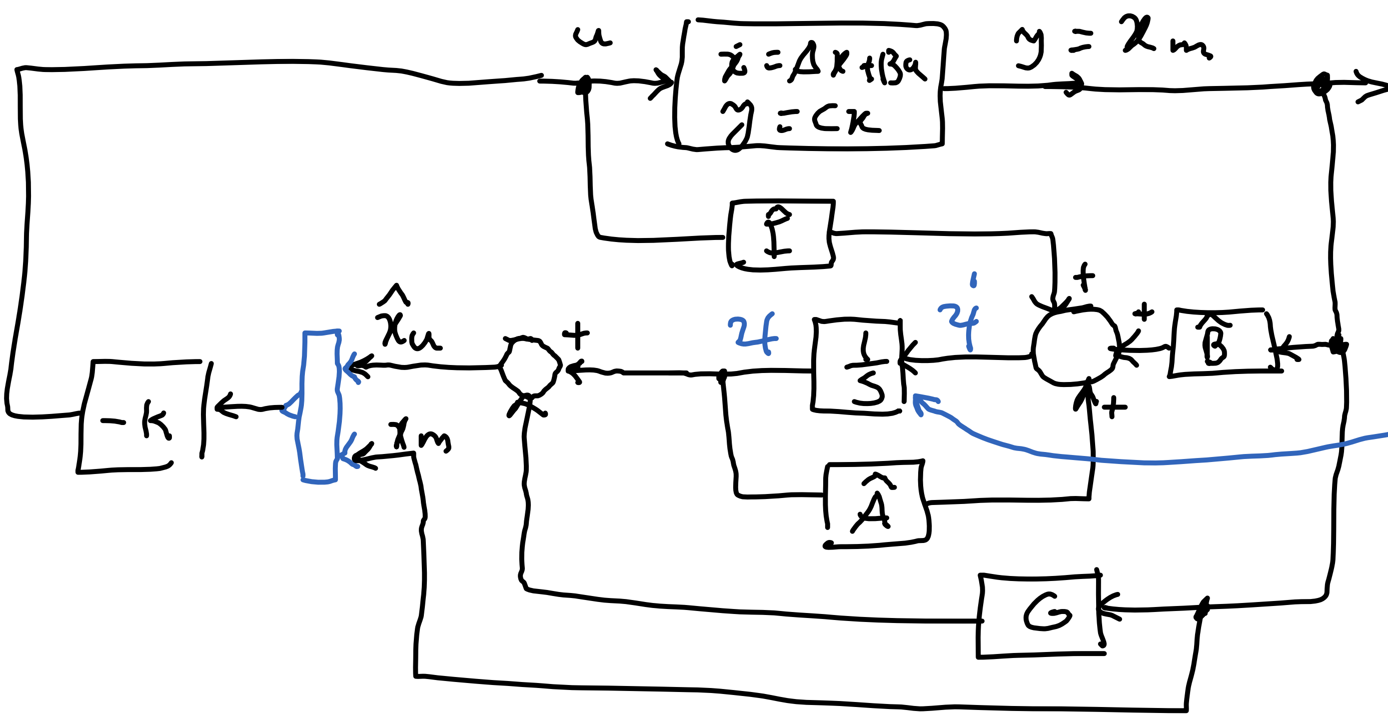
$$\begin{cases} \dot{z} = \hat{A} z + \hat{B} x_m + \hat{F} u \\ \hat{x}_u = z + G x_m \end{cases}$$

معادله رویتگر کاهش مرتبه یافته

$z \in R^{m}$ ← m تا معادله

اما در رویتگر مرتبه کامل ← n معادله

$G \in R^{(n-m)\times m}$



$$\hat{x}_u(0) = z(0) + G x_m(0)$$

$$z(0) = \hat{x}_u(0) - G x_m(0)$$

مثال: برای سیستم موتور DC یک رویت گر حالت کاهش مرتبه یافته را طراحی کنید.
به نحوی که قطبهای حلقه بسته رویتگر در 5- و 6- قرار بگیرند.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\omega}\\ \dot{i}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc}0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 4.4\\ 0 & -12 & -24\end{array}\right]\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ i\end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c}0\\ \hline 0\\ 20\end{array}\right]v \\ y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ i\end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_m = \theta \\ x_u = \begin{bmatrix}\omega\\ i\end{bmatrix} \end{cases}$$

$$G \in R^{(n-m)\times m} \to G \in R^{2\times 1}$$

$$m = 1$$
$$n = 3$$

$$A_{mm} = \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}, \quad A_{mu} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

$$A_{um} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}, \quad A_{uu} = \begin{bmatrix}0 & 4.4\\ -12 & -24\end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix}0\\ 20\end{bmatrix}$$

A C

$$\dot{z} = (\overbrace{A_{uu} - G A_{mu}}^{\hat{A}}) z + (\overbrace{A_{uu}G + A_{um} - G A_{mm} - G A_{mu} G}^{\hat{B}}) x_m$$

$$+ (\underbrace{B_u - G B_m}_{\hat{F}}) u$$

$$\hat{A} = A_{uu} - G A_{mu} = \begin{bmatrix} 0 & 4.4 \\ -12 & -24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4.4 \\ -12 & -24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -g_1 & 0 \\ -g_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \hat{A} = \begin{bmatrix} -g_1 & 4.4 \\ -g_2 - 12 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} - g1^2 + (22*g2)/5 \\ - 12*g1 - 24*g2 - g1*g2 \end{bmatrix} , \qquad \hat{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$G = \mathrm{acker}(A_{uu}^T, A_{mu}^T)$$

$$\dot{z} = \hat{A} z + \hat{B} x_m + \hat{F} u$$

مقادیر ویژه‌ی این ماتریس -5 و -6

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_1 & 4.4 \\ -g_2-12 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\ \text{g1^2 + (22*g2)/5} \\ \text{- 12*g1 - 24*g2 - g1*g2} \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix} u$$

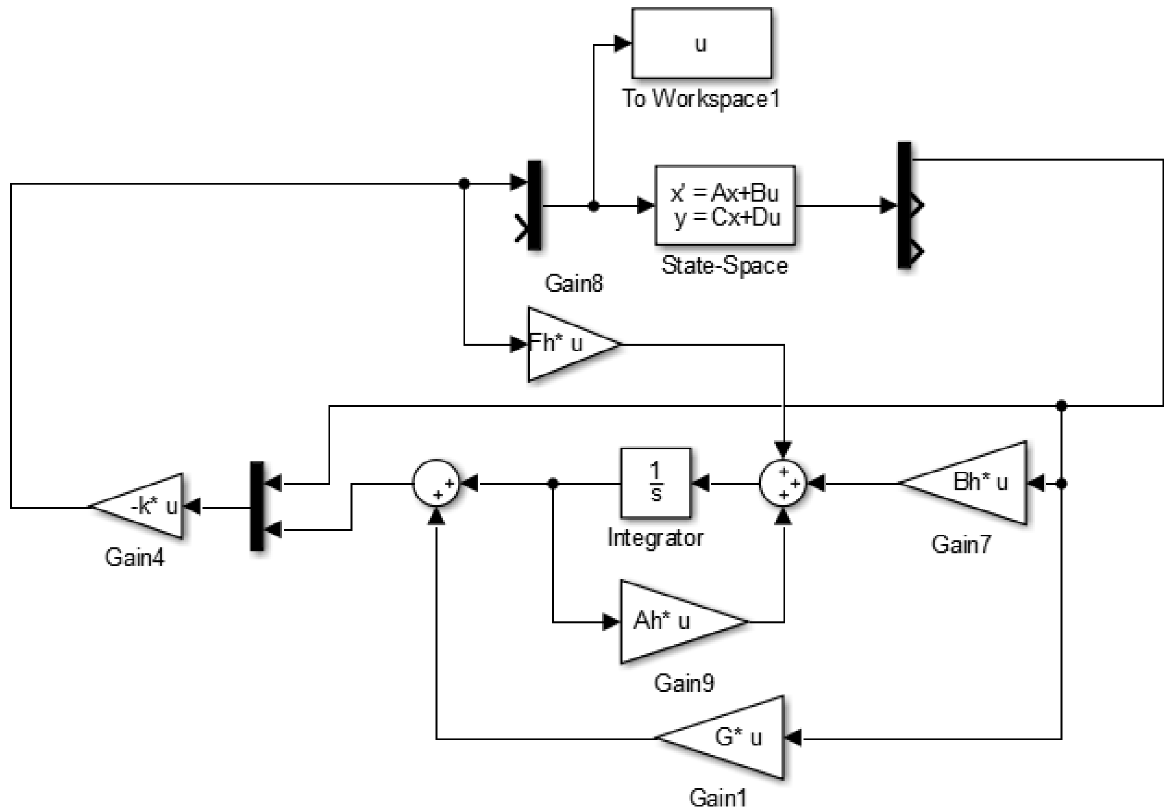
$$\det(\hat{A} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -g_1-\lambda & 4.4 \\ -g_2-12 & -24-\lambda \end{vmatrix} = (g_1-\lambda)(-24-\lambda) - 4.4(-g_2-12)$$

$$= \lambda^2 + (24+g_1)\lambda + (+24 g_1 + 4.4 g_2 + 4.4 \times 12) = 0$$

$$= (\lambda+5)(\lambda+6) = \lambda^2 + 11\lambda + 30 \Rightarrow \begin{cases} 24 + g_1 = 11 \rightarrow g_1 = -13 \\ -24 \times 13 + 4.4 \times 12 + 4.4 g_2 = 30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g_2 = 65.7$$

$$G = \begin{bmatrix} -13 \\ 65.7 \end{bmatrix}$$


u
To Workspace1
x' = Ax+Bu
y = Cx+Du
State-Space
Gain8
Fh* u
Bh* u
Gain7
1
s
Integrator
-k* u
Gain4
Ah* u
Gain9
G* u
Gain1

سیستم حلقه بسته فیدبک حالت، رویت گر حالت

تلفیق رویت گر حالت و فیدبک حالت

سیستم فیدبک حالت
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = -K\hat{x} \end{cases} \longrightarrow \dot{x} = Ax - BK\hat{x} = Ax - BK(x - e) \quad (1)$$

رویت گر
$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(Cx - C\hat{x})$$

$$e = x - \hat{x} \longrightarrow \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \Rightarrow \dot{e} = (A - GC)e \quad (2)$$

$$\hat{x} = x - e$$

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax - BK(x-e)\\ \dot{e} = (A-GC)e\end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{e}\end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix}A-BK & BK\\ 0 & A-GC\end{bmatrix}}^{\Delta}\begin{bmatrix}x\\ e\end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه‌های این ماتریس برابر است با مقادیر ویژه‌های ماتریس $A-BK$ و $A-GC$

چون ماتریس Δ یک ماتریس بالا مثلثی است و این نشان می‌دهد که طراحی رویت‌گر از طراحی کنترل کننده جداست (مستقل) است.

پس وقتی که رویت‌گر و کنترلر با هم دیگر ترکیب می‌شوند، دینامیک آنها (مقادیر ویژه‌هایشان) تغییر نمی‌کنند و مستقل از هم می‌باشند.

تلفیق رویتگر و کنترلر با ورودی مرجع غیر صفر

معادله رویتگر $\quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x})$

$\Delta\hat{x}$ مقادیر اضافی $\longrightarrow \quad \Delta\dot{\hat{x}} = A\Delta\hat{x} + B\Delta u + G(\Delta y - C\Delta\hat{x})$

Δu

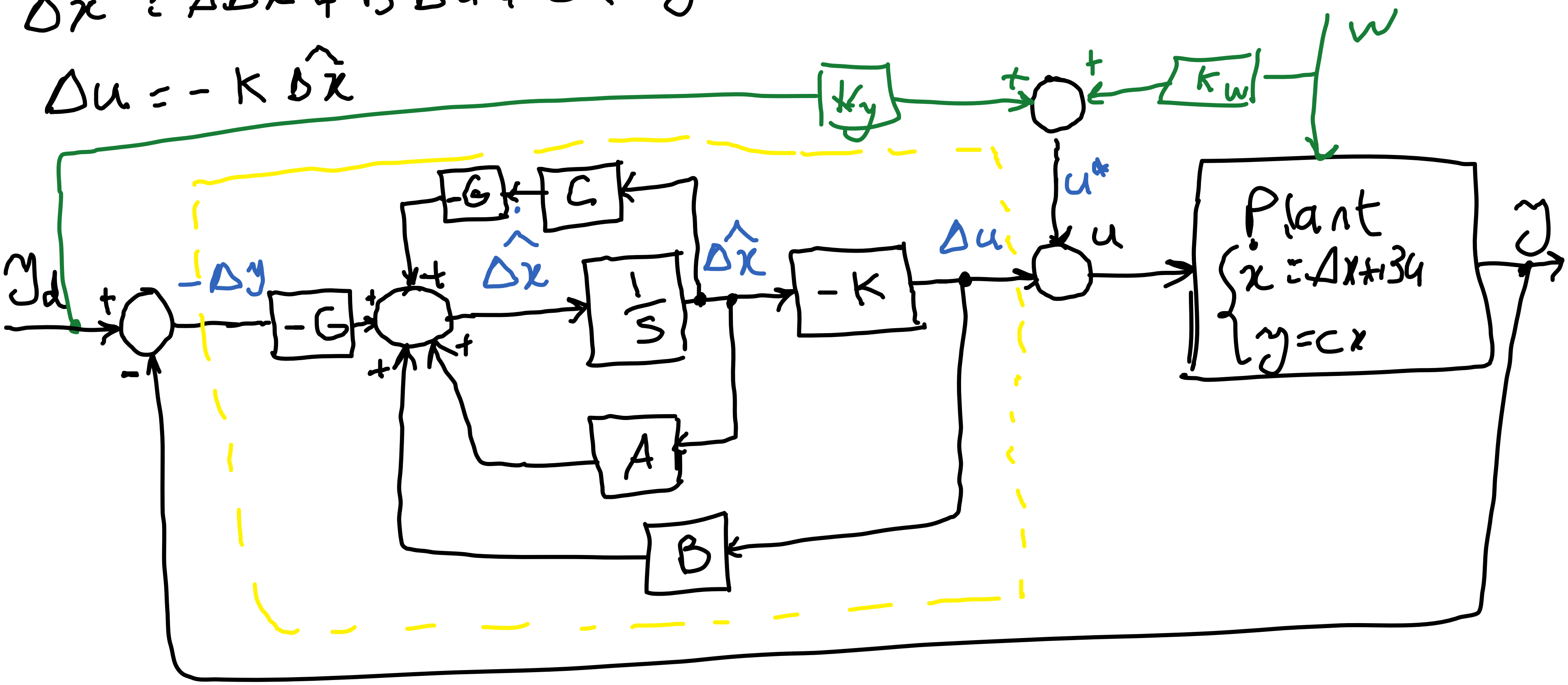
Δy

$$\Delta y = y - y_d$$

$$\Delta u = u - u^* = -K\Delta\hat{x} \Rightarrow u = u^* - K\Delta\hat{x}$$

$$\Delta\dot{\hat{x}} = A\Delta\hat{x} + B\Delta u + G(\Delta y - C\Delta\hat{x})$$

$$\Delta u = -K\Delta\hat{x}$$



$$\begin{cases}\Delta\dot{\hat{x}} = A\Delta\hat{x} + B\Delta u + G(\Delta y - C\Delta\hat{x}) \\ \Delta u = -K\Delta\hat{x}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta\dot{\hat{x}} = (A - BK - GC)\Delta\hat{x} + G\Delta y \\ \Delta u = -K\Delta\hat{x}\end{cases}$$

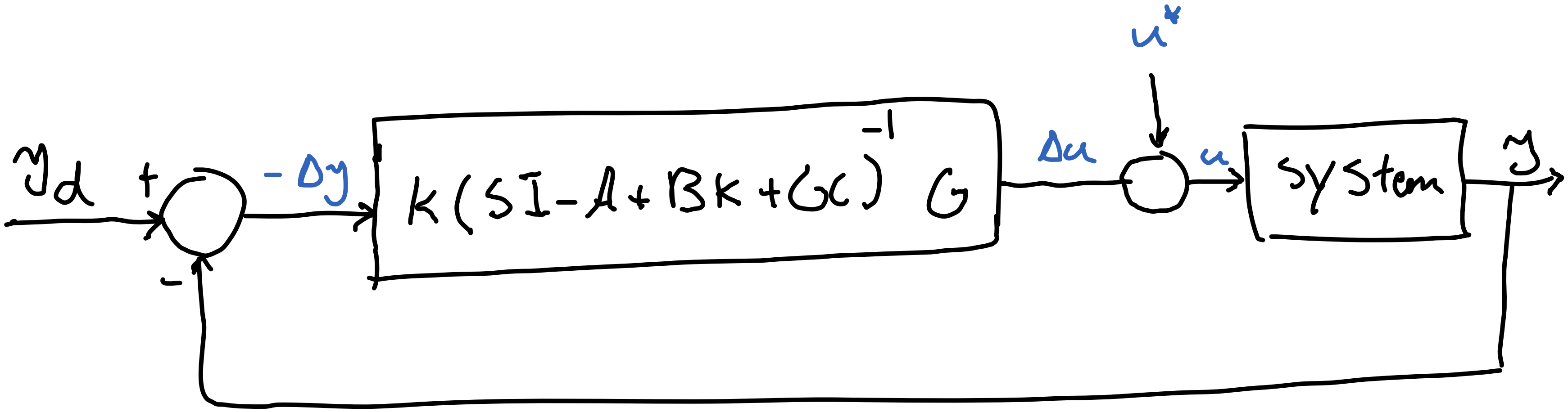
$$\frac{\Delta u(s)}{\Delta y(s)} = -K(sI - A + BK + GC)^{-1}G$$

$$\frac{\Delta u(s)}{-\Delta y(s)} = K(sI - A + BK + GC)^{-1}G$$

$A-BK-GC$ $\quad \Delta y \quad \Delta\hat{x} \quad -K \quad \Delta u$

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B$$


y_d
+
-
$-\Delta y$
$K(SI-A+BK+GC)^{-1}G$
Δu
u^*
u
system
y

مثال: برای سیستم موتور DC یک رویتگر حالت بهینه طراحی کنید. در صورتی که دقت اندازه‌گیری خروجی $\pm 0.1\,Rad$ و حداکثر اغتشاش وارد بر سیستم $0.2\,Nm$ باشد.

همچنین کنترل فیدبک حالتی که تابع هدف زیر را کمینه کند

$$J=\int_0^{\infty}\left[10(\theta_d-\theta)^2+2.5\,\omega^2+v^2\right]dt$$

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot\theta\\ \dot\omega\\ \dot i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4.4\\ 0 & -12 & -24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 20\end{bmatrix}v+\begin{bmatrix}0\\ -7.41\\ 0\end{bmatrix}T_L\\[2ex] y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ i\end{bmatrix}\end{cases}$$

تابع تبدیل کنترلر-رویتگر را به دست آورید.

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 1 \longrightarrow K = \begin{bmatrix} 3.1623 & 1.6296 & 0.2687 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0.2^2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, V = 0.1^2 \longrightarrow G = \begin{bmatrix} 0.7835 \\ 0.3069 \\ -0.1665 \end{bmatrix}$$

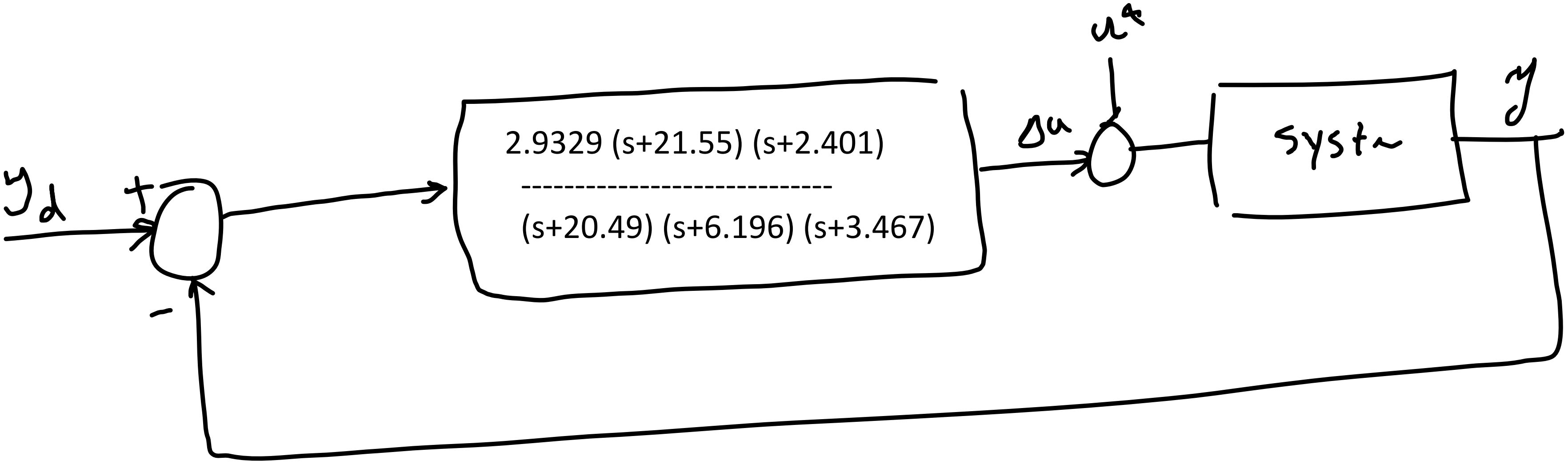
$$sys = ss(A-BK-GC, G, K, 0)$$

, $ss(A, B, C, D)$

$\hookrightarrow C(sI-A)^{-1}B+D$

$$H = tf(sys)$$

$$H = zpk(H)$$



$$V = 0.001(0.1)^2 \rightarrow \frac{99.683\,(s+21.57)\,(s+2.232)}{(s+22.36)\,(s^2 + 16.63s + 153.1)}$$

$\rightarrow -8.2$

سرعت رویتگر زیادتر می‌شد

قطب‌ها دورتر شدند