ریاضی مهندسی پیشرفته
معادلات مشتق جزئی

مسائل انتقال حرارت

یک بعدی، دو بعدی، سه بعدی
متناهی، نامتناهی، نیمه متناهی
همگن و ناهمگن

دکتر امین نیکوبین
دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک
anikoobin@semnan.ac.ir

مسائل انتقال حرارت

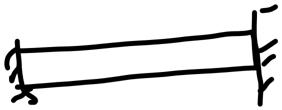
جلسه بیستم

PDE
- مسائل انتقال حرارت
  - مختصات دکارتی —
    - یک بعدی
    - دو بعدی
    - سه بعدی
  - مختصات استوانه‌ای
  - مختصات کروی
- مسائل انتشار موج
  - مختصات دکارتی —
    - یک بعدی
    - دو بعدی
    - سه بعدی
  - مختصات استوانه‌ای

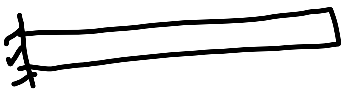
روش حل
- روش جداسازی متغیرها ← $u(x,t)=\varphi(x)q(t)$ ، حدس
- استفاده از تبدیلات فوریه

تقسیم بندی از نظر شرایط مرزی

- محدود $0<x<L$ ، $-L<x<L$



- محدود، نامحدود $0<x<\infty$



- نامحدود، نامحدود $-\infty<x<\infty$

- معادله
  - همگن $u_t=ku_{xx}$
  - ناهمگن $u_t=ku_{xx}+f(x)$

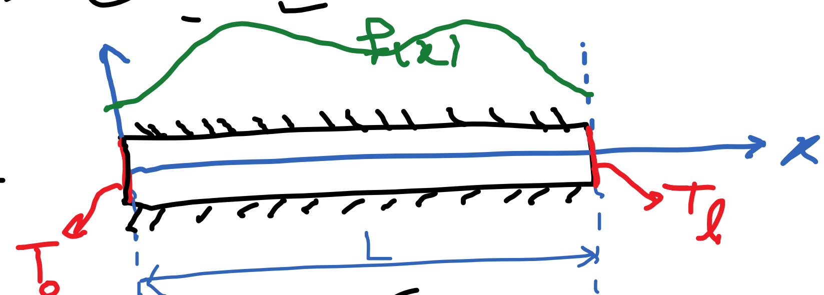
- شرایط مرزی ←
  - همگن، $u(x,0)=0$ ، $u(0,t)=0$
  - ناهمگن $u(x,0)=f(x)$ ، $u(0,t)=g(t)$

انتقال حرارت در مختصات دکارتی ، یک بعدی

$$u_t = K u_{xx}$$

مثال: انتقال حرارت یک بعدی در میله متناهی با شرایط مرزی دیریکله

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0<x<L$$



B.C.: $u(0,t) = T_0$, $u(l,t) = T_l$

I.C.: $u(x,0) = f(x)$

دنبال جوابی $u(x,t)$ که در معادله بالا صدق کند و IC ، BC را نیز برآورده نماید.

روش اول: جداسازی متغیرها

توسط برنولی در اوایل قرن هجدهم ارائه شد،

$$u(x,t)=\varphi(x)\,q(t)$$

یا

$$u(x,t)=X(x)\,T(t)$$

شرط استفاده از این روش این است که معادله و BC همگن باشد.

در بعضی مسائل که معادله یا BC همگن نیست می‌توان با استفاده از تکنیکهای آن را همگن کرد و روش جداسازی را روی آن پیاده نمود.

اگر BC همگن نباشد و مقدار ثابتی باشد می‌توان پاسخ را به دو بخش جزای حالت ماندگار و گذرا تفکیک نمود به صورت زیر

$$u(x,t)=\underbrace{w(x,t)}_{\text{گذرا}}+\psi(x)$$

ماندگار ← ناشی از دمای T_L

بعداً خواهیم دید اگر BC تابعی از زمان باشه $u(0,t)=g_1(t)$ ، $u(l,t)=g_2(t)$

آنگاه، پاسخ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم $u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)$

$$\begin{cases} u_t = k\,u_{xx}, & u = w(x,t)+\psi(x) \\ u(0,t)=T_0, \quad u(l,t)=T_l \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_t + \cancel{\psi_t}^{\,0} = k\left(w_{xx}+\psi_{xx}\right) \\ w(0,t)+\psi(0)=T_0, \quad w(l,t)+\psi(l)=T_l \\ w(x,0)+\psi(x)=f(x) \end{cases}$$

این معادله را به دو معادله تجزیه می‌کنیم

$$\Rightarrow \begin{cases} w_t = K\left(w_{xx} + \psi_{xx}\right) \\ \text{BC} \quad w(0,t) + \psi(0) = T_0 \,, \quad w(l,t) + \psi(l) = T_L \\ \text{IC} \quad w(x,0) + \psi(x) = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_t = K\, w_{xx} \\ w(0,t) = 0 \,, \quad w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = f(x) - \psi(x) \end{cases} + \begin{cases} K \psi_{xx} = 0 \\ \psi(0) = T_0 \,, \quad \psi(l) = T_l \end{cases}$$

همگن

$$\begin{cases} k\,u_{xx} = 0 \\ u(0) = T_0 \,,\; u(\ell) = T_\ell \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} u(x) = Ax + B \\ u(0) = B = T_0 \\ u(\ell) = A\ell + B = T_\ell \Rightarrow A = \dfrac{T_\ell - T_0}{L} \end{cases}$$

$$\boxed{u(x) = \frac{T_\ell - T_0}{L}\,x + T_0} \quad (1)$$

پاسخ حالت ماندگار

اگر $T_\ell = T_0 = 0$ باشد $\leftarrow$ $u(x) = 0$

حل بخش پاسخ گذرا

$$\begin{cases} w_t = k\, w_{xx} \\ w(0,t) = \underbrace{0}, \quad w(l,t) = \underline{0} \\ w(x,0) = F(x) - \psi(x) \end{cases}$$

$$w(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial XT}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}(XT) \Rightarrow X\,\frac{\partial T(t)}{\partial t} = k\left(T\,\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}\right)$$

$$X\dot{T} = k\left(X''\,T\right) \quad , \qquad \begin{cases} \dot{T} = \dfrac{\partial T(t)}{\partial t} \\ X' = \dfrac{\partial X(x)}{\partial x} \end{cases}$$

$$X(x)\,\dot{T}(t) = k\left(X''(x)\,T(t)\right)$$

$$X\dot{T} = k(X''T)$$

این معادله را بر kXT تقسیم می‌کنیم

$$\Rightarrow \frac{X\dot{T}}{kXT} = \frac{kX''T}{kXT} \Rightarrow \frac{\dot{T}(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = cte = -C$$

$$\Rightarrow X'' = -CX \Rightarrow \begin{cases} X'' + CX = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتورم لیوویل}} C = \lambda^2$$

اگر $C = \lambda^2$ باشد این معادله جواب غیر صفر دارد

$$\begin{cases} w(0,t) = 0,\quad w(l,t) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \\ X(L)T(t) = 0 \Rightarrow X(L) = 0 \end{array} \\ w(x,0) = f(x) - \psi(x) \Rightarrow X(x)T(0) = f(x) - \psi(x) \end{cases}$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_n = \dfrac{n\pi}{L} \\ X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{L} \end{cases}$$

$$X(0) = 0 \,,\, X(L) = 0$$

معادله T

$$\frac{\dot{T}}{kT} = -\lambda_n^2 \Rightarrow \dot{T} + k\lambda_n^2 T = 0$$

$$T_n(t) = b_n e^{-k\lambda_n^2 t}$$

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\,T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k\lambda_n^2 t} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

مجهول باقی ماند: $\longrightarrow$ IC

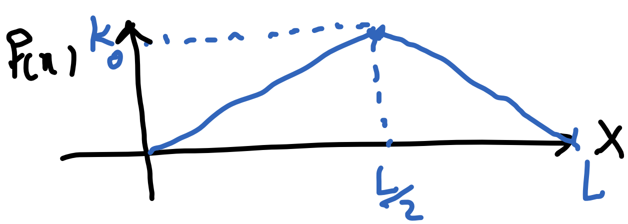
$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k\lambda_n^2 t} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} = f(x) - \psi(x)$$

با استفاده از سری فوریه سینوسی داریم

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left(f(x) - \overset{1}{\psi(x)}\right) \sin\frac{n\pi x}{l}\, dx$$

تمرین. فرض کنید تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد



مقدار b_n را محاسبه کنید.

روش دوم، استفاده از تبدیل فوریه

از کدام تبدیل فوریه باید استفاده کرد. کتاب هالتی نژاد ص 299 تبدیلات

$$F_s\{f''(x)\} = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 F_s(n) + \frac{2n\pi}{l^2}\left[f(0) + (-1)^{n+1} f(l)\right]$$

تبدیل فوریه سینوسی متناهی $0<x<l$

تبدیل فوریه کسینوسی متناهی $0<x<l$

$$F_c\{f''(x)\} = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 F_c(n) - \frac{2}{l}\left[f'(0) + (-1)^{n+1} f'(l)\right]$$

$$F_s\{u(x,t)\} = U_s(n,t) \quad , \quad F_s\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right] = \dot{U}_s(n,t)$$

تبدیل فوریه سینوسی روی متغیر x عمل می‌کند، نه متغیر t ،

$x \longrightarrow n$

$$u_t = k\,u_{xx} \Rightarrow F_s\{u_t(x,t)\} = k\,F_s\{u_{xx}(x,t)\}$$

$$\Rightarrow \dot{U}_s(n,t) = k\left\{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 U_s(n,t) + \frac{2n\pi}{l^2}\left[u(0,t)+(-1)^{n+1}u(l,t)\right]\right\}$$

$$\dot{U}_s(n,t) = k\left\{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 U_s(n,t) + \frac{2n\pi}{l^2}\left[T_0 + (-1)^{n+1}T_1\right]\right\}$$

$$\begin{cases} u_t = k\, u_{xx} \\ u(0,t) = T_0 \,, \quad u(l,t) = T_l \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

معادله PDE تبدیل به معادله ODE شد

$$\begin{cases} \dot{U}_s(n,t) = k\left\{ -\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 U_s(n,t) + \dfrac{2n\pi}{l^2}\left[T_0 + (-1)^{n+1} T_l \right] \right\} \\ U_s(n,0) = F_s(n) \end{cases}$$

$$F_s\{f(x)\} = F_s(n) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\, dx$$

$\leftarrow$ 299
تبدیل فوریه سینوسی متناهی

$$\begin{cases} \dot{U}_s(n,t) = \overbrace{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}^{a} U_s(n,t) + \overbrace{\frac{2n\pi k}{l^2}\left[T_0 + (-1)^{n+1} T_1\right]}^{b} \\ U_s(n,0) = \underbrace{F_s(n)}_{c} \end{cases}$$

$U_s(n,t) = y$

معادله بالا شبیه معادله زیر است

$$\begin{cases} \dot{y} = ay + b \\ y(0) = c \end{cases} \xRightarrow{\text{حل عمومی}} y = y_h + y_p \quad , \quad y_p = B \rightarrow \dot{y}_p = 0$$

جواب خصوصی یک مقدار ثابت است

$$0 = aB + b \rightarrow B = -\frac{b}{a} \Rightarrow y_p = -\frac{b}{a}$$

$$y_h = Ae^{+at} \Rightarrow y = Ae^{+at} - \frac{b}{a} \quad , \quad y(0) = A - \frac{b}{a}$$

$$y(0) = c$$

$$y = Ae^{+at} - \frac{b}{a} \Rightarrow y(0) = A - \frac{b}{a} = c \Rightarrow A = c + \frac{b}{a}$$

جایگذاری مقادیر اصلی

$$y = \left(c + \frac{b}{a}\right)e^{+at} - \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow u_s(n,t) = \left\{ F_s(n) + \frac{\frac{2n\pi k}{l^2}\left[T_0 + (-1)^{n+1}T_1\right]}{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} \right\} e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$$

$$+ \frac{2}{n\pi}\left[T_0 + (-1)^{n+1}T_1\right]$$

$$\frac{\frac{2n\pi k}{l^2}}{\frac{k n^2 \pi^2}{l^2}}$$

$$U_s(n,t) = \left\{ F_s(n) - \frac{2}{n\pi}\left[T_0 + (-1)^{n+1} T_L\right] \right\} e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$$

$$+ \frac{2}{n\pi}\left[T_0 + (-1)^{n+1} T_L\right]$$

$$\Rightarrow U_s(n,t) = F_s(n)\, e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} + \frac{2}{n\pi}\left[T_0 + (-1)^{n+1} T_L\right]\left\{1 - e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}\right\}$$

با استفاده از عکس تبدیل فوریه $u(x,t)$ را محاسبه می کنیم

$$F_s^{-1}\left\{U_s(n,t)\right\} = u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_s(n,t) \sin\frac{n\pi x}{l}$$

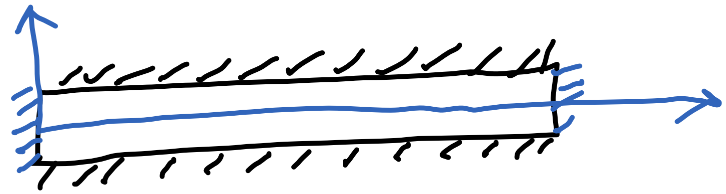
$\leftarrow$ ۲۹۹

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} U_s(n,t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{F_s(n)\,e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}+\frac{2}{n\pi}\left[T_0+(-1)^{n+1}T_1\right]\left(1-e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}\right)\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$F_s(n)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

مثال: انتقال حرارت یک بعدی در میله متناهی با دو انتهای عایق



$$u_t = k u_{xx} \quad , \quad 0 < x < l$$

BC.: $u_x(0,t) = 0 \,,\; u_x(l,t) = 0$

IC.: $u(x,0) = f(x)$

هم معادله و هم BC همگن هستند. پس براحتی می‌توان روش جداسازی را اعمال کرد

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$X \dot{T} = K X'' T \xRightarrow{\frac{1}{kXT}} \frac{\dot{T}}{KT} = \frac{X''}{X} = c \Rightarrow \begin{cases} X'' - cX = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases}$$

$$u_x(x,t) = X' T \Rightarrow u_x(0,t) = X'(0)\,T(t) = 0$$

$$\begin{cases} X'' - cX = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases}$$

اثبات شد که در صورتی جواب غیر بدیهی دارد که $c = -\lambda^2$

$$\begin{cases} \lambda_n = \dfrac{n\pi}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ X_n(x) = c_n' \cos \lambda_n x \end{cases}$$

$$\dot{T} = -k\lambda_n^2 T \longrightarrow T_n(t) = c_n e^{-k\lambda_n t}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-k\lambda_n t} \cos \lambda_n x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-k\lambda_n t} \cos \lambda_n x$$

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-k\lambda_n t} \cos \lambda_n x$$

با اعمال شرایط اولیه $u(x,0) = f(x)$ ، I.C.

$$u(x,0) = f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx \,, \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \cos \lambda_n x \, dx$$

روش دوم: تبدیل فوریه

ص 300 تبدیل فوریه کسینوسی متناهی

$$\mathbb{F}_c\{f(x)\} = F_c(n) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n=0,1,2,\dots$$

$$\mathbb{F}_c\{f''(x)\} = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 F_c(n) - \frac{2}{l}\left[f'(0)+(-1)^{n+1} f'(l)\right]$$

$$u(x,t) \longrightarrow U_c(n,t)$$

$$u_t(x,t) \longleftrightarrow \dot{U}_c(n,t)$$

$$u_t = k u_{xx} \,, \qquad 0 < x < l$$

$$BC.: \quad u_x(0,t) = 0 \,, \quad u_x(l,t) = 0$$

$$IC.: \quad u(x,0) = f(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{U}_c(n,t) = k \left\{ -\lambda_n^2 U_c(n,t) - \dfrac{2}{l}\left(\cancelto{0}{u_x(0,t)} + (-1)^{n+1} \cancelto{0}{u_x(l,t)} \right) \right\} \\ U_c(n,0) = F_c(n) \end{cases} \Rightarrow \boxed{U_c(n,t) = F_c(n)\, e^{-k\lambda_n^2 t}}$$

ساده‌سازی
معادله

$$\begin{cases} \dot{y} = a y \\ y(0) = c \end{cases} \Rightarrow y = c\, e^{at}$$

$$U_c(n,t) = F_c(n)\, e^{-k\lambda_n^2 t}$$

عکس تبدیل فوریه $u(x,t)$

$$\mathcal{F}_c^{-1}\{U_c(n,t)\} = u(x,t)$$

$$\mathcal{F}_c^{-1}\{F_c(n)\} = f(x) = \frac{F_c(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_c(n) \cos\frac{n\pi x}{l}$$

300

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{U(0,t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_c(n)\, e^{-k\lambda_n^2 t} \cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{F_c(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_c(n)\, e^{-k\lambda_n t} \cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$u(x,t) = \frac{F_c(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_c(n)\, e^{-k\lambda_n t} \cos\frac{n\pi x}{l}$$

اعمال شرایط اولیه IC،

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{F_c(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_c(n) \cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$F_c(0) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \qquad F_c(n) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

298

سری فوریه کسینوسی

که در آن

جلسه بیست و یکم

ادامه مسائل انتقال حرارت

مثال: انتقال حرارت یک بعدی در میله متناهی با منبع حرارتی

$$F_s\left[u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)\right] \quad , \quad 0<x<l \; , \; t>0$$

$$\text{B.C.}: \; u(0,t) = u(l,t) = 0$$

$$\text{I.C.} \quad u(x,0) = 0$$

- در کتاب به روش بسط برحسب توابع ویژه، (خودتان بخوانید)

- از روش تبدیل فوریه سینوسی،

$$F_s\{f''(x)\} = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 F_s(n) + \frac{2n\pi}{l^2}\left[f(0) + (-1)^{n+1} f(l)\right]$$

$$F_s\{f''(x)\} = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 F_s(n) + \frac{2n\pi}{l^2}\left[f(0) + (-1)^{n+1} f(l)\right]$$

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad , \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l} , \quad \sin\frac{n\pi x}{l} = \sin\lambda_n x$$ [illegible]

$$F_s[f''(x)] = -\lambda_n^2 F_s(n) + \frac{2}{l}\lambda_n \left[f(0) + (-1)^{n+1} f(l)\right]$$

$u(0,t)=0$ $\qquad$ $u(l,t)=0$

$$F_s[u(x,t)] = U_s(n,t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{U}_s(n,t) = a^2\left[-\lambda_n^2 U_s(n,t)\right] + F_s(n,t) \\ \text{I.C.} \quad U_s(n,0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{U}_s(n,t) = a^2\left[-\lambda_n^2 U_s(n,t)\right] + F_s(n,t) \\ \text{I.C.} \quad U_s(n,0) = 0 \end{cases} \quad , \quad F_s(n,t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$u(n,t) \rightarrow y(t)$ فرم ب.د. معادله :

$$\begin{cases} \dot{y} = -a^2\lambda_n^2\, y + f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} ,$$

$$y = \underbrace{y_0\, e^{-a^2\lambda_n^2 t}}_{y_{zi}} + \underbrace{\int_0^t e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau}_{y_{zs}}$$

$$\Rightarrow \; U_s(n,t) = \int_0^t e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)}\, F_s(n,\tau)\,d\tau$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_s(n,t) \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)} F_s(n,\tau)\, d\tau \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

داریم

$$F_s(n,\tau) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi,\tau) \sin \frac{n\pi\xi}{\ell}\, d\xi$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)} \left(\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi,\tau) \sin \frac{n\pi\xi}{\ell}\, d\xi \right) d\tau \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

$$u(x,t) = \int_0^t \left[\int_0^{\ell} \left\{ \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi\xi}{\ell} \right) \right\} f(\xi,\tau)\, d\xi \right] d\tau$$

$$u(x,t)=\int_0^t\left[\int_0^l\left\{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\right)\right\}f(\xi,\tau)\,d\xi\right]d\tau$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,t,\xi,\tau)\,f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

که در آن

$$G(x,t,\xi,\tau)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}$$

که تابع G اصطلاحاً تابع گرین گفته می‌شود

Green's Function

مثال: هدایت گرمایی میله متناهی با شرایط مرزی مخلوط ناهمگن

$$u_t = k u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad t>0$$

$$\text{B.C.:} \quad u(0,t) = f_1(t), \quad u_x(l,t) = -k^{-1} f_2(t)$$

ص 302

$$\text{I.C.:} \quad u(x,0) = f(x)$$

روش تبدیل فوریه سینوسی نیم

$$\mathbb{F}\{u_{xx}(x,t)\} = -\lambda_n^2 U(n,t) + \sqrt{\frac{2}{l}}\left\{\lambda_n u(0,t) - (-1)^n u_x(l,t)\right\}$$

$$\mathbb{F}\{u(x,t)\} = U(n,t) = \int_0^l u(x,t)\, X_n(x)\, dx$$

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$$

$$\mathbb{F}\{u_{xx}(x,t)\} = -\lambda_n^2 U(n,t) + \sqrt{\frac{2}{l}}\left\{\lambda_n u(0,t) - (-1)^n u_x(l,t)\right\}$$

$$u_t = K u_{xx}$$

$$\overset{\mathbb{F}}{\Longrightarrow} \quad \dot{U}(n,t) = K\left[-\lambda_n^2 U(n,t) + \sqrt{\frac{2}{l}}\left\{\lambda_n f_1(t) + (-1)^n K^{-1} f_2(t)\right\}\right]$$

$$\Rightarrow \dot{U}(n,t) = -K\lambda_n^2 U(n,t) + \overbrace{K\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{\lambda_n f_1(t) + (-1)^n K^{-1} f_2(t)\right\}}^{A(n,t)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{U}(n,t) = -K\lambda_n^2 U(n,t) + A(n,t) \\ U(n,0) = F(n) \end{cases}, \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}$$

$$\sim \quad F(n) = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l f(x)\sin\lambda_n x\, dx$$

$$\begin{cases} \dot{U}(n,t) = -k\lambda_n^2 U(n,t) + A(n,t) \\ U(n,0) = F(n) \end{cases}$$

$$U(n,t) = F(n)\, e^{-k\lambda_n^2 t} + \int_0^t e^{-k\lambda_n^2 (t-\tau)} A(n,\tau)\, d\tau$$

با استفاده از تبدیل فوریه معکوس

$$u(x,t) = F^{-1}\{U(n,t)\} = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} U(n,t) \sin \lambda_n x$$

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(n)\, e^{-k\lambda_n^2 t} + \int_0^t e^{-k\lambda_n^2 (t-\tau)} A(n,\tau)\, d\tau \right\} \sin \lambda_n x$$

اگر توابع f_1 و f_2 درجه یک باشند. مثلاً

$$f_1 = a_0 + a_1 t \quad , \quad f_2 = b_0 + b_1 t$$

$$A(n,t) = K\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{\lambda_n f_1(t) + (-1)^n K^{-1} f_2(t)\right\} = K\sqrt{\frac{2}{l}}\left\{\lambda_n (a_0 + a_1 t) + (-1)^{n} K^{-1} (b_0 + b_1 t)\right\}$$

$$\Rightarrow \int_0^t e^{-K\lambda_n^2 (t-\tau)} A(n,\tau)\, d\tau$$

$$= K\sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^t e^{-K\lambda_n^2 (t-\tau)} \left\{\lambda_n (a_0 + a_1 \tau) + (-1)^n K^{-1} (b_0 + b_1 \tau)\right\} d\tau$$

$$= k\sqrt{\frac{2}{\ell}}\int_0^t e^{-k\lambda_n^2(t-\tau)}\left\{\lambda_n(a_0+a_1\tau)+(-1)^n k^{-1}(b_0+b_1\tau)\right\}d\tau$$

$$= k\sqrt{\frac{2}{\ell}}\, e^{-k\lambda_n^2 t}\int_0^t e^{+k\lambda_n^2\tau}\left(\lambda_n a_0+a_1\lambda_n\tau+(-1)^n k^{-1} b_0+(-1)^n k^{-1} b_1\tau\right)d\tau$$

$$= k\sqrt{\frac{2}{\ell}}\, e^{-k\lambda_n^2 t}\left\{a_0\lambda_n\int_0^t e^{k\lambda_n^2\tau}\,d\tau + a_1\lambda_n\underbrace{\int_0^t e^{k\lambda_n\tau}\,\tau\, d\tau}_{\text{جزء به جزء}}+\cdots\right\}$$

$$= B(n,t)$$

مثال : انتقال حرارت یک بعدی با جریان همرفتی آزاد

$$u_t = a^2 u_{xx} - h(u - u_0) \quad , \quad 0 < x < l \quad , \quad t > 0$$

$$\text{B.C.} \quad u(0,t) = T_1 \quad , \quad u(l,t) = T_2$$

$$\text{I.C.} \quad u(x,0) = f(x)$$

روش جداسازی

$$u(x,t) = u_0 + w(x) + v(x,t)$$

$$\begin{cases} v_t(x,t) = a^2 (w_{xx} + v_{xx}) - h(w + v) \\ u_0 + w(0) + v(0,t) = T_1 \\ u_0 + w(l) + v(l,t) = T_2 \\ u_0 + w(x) + v(x,0) = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} - hv \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = f(x) - u_0 - w(x) \end{cases} + \begin{cases} a^2 w_{xx} - hw = 0 \\ w(0) = T_1 - u_0 \ , \ w(l) = T_2 - u_0 \end{cases}$$

بخش حالت ماندگار

$$w_{xx} - \frac{h}{a^2} w = 0 \Rightarrow w(x) = C_1 \sinh \frac{\sqrt{h}\,x}{a} + C_2 \cosh \frac{\sqrt{h}\,x}{a}$$

$$w(0) = c_2 = T_1 - u_0$$

$$w(l) = c_1 \sinh \frac{\sqrt{h}\,l}{a} + (T_1 - u_0) \cosh \frac{\sqrt{h}\,l}{a} = T_2 - u_0$$

$$\Rightarrow$$

$$C_1 \sinh\frac{\sqrt{h}\,l}{a} + (T_1 - u_0)\cosh\frac{\sqrt{h}\,l}{a} = T_2 - u_0$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{\sinh\frac{\sqrt{h}\,l}{a}}\left[T_2 - u_0 - (T_1 - u_0)\cosh\frac{\sqrt{h}\,l}{a}\right]$$

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} - hv \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = f(x) - u_0 - w(x) \end{cases}$$

$$v(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$X\dot{T} = a^2 X'' T - hXT$$

$$\Rightarrow X\dot{T} + hXT = a^2 X'' T \Rightarrow \frac{X\dot{T} + hXT}{a^2 XT} = \frac{a^2 X'' T}{a^2 XT}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{T} + hT}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ X(0) = 0,\ X(l) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad X(x) = \sin \lambda_n x$$

$$\frac{\dot{T} + hT}{a^2 T} = -\lambda_n^2 \Rightarrow \dot{T} + hT + a^2 \lambda_n^2 T = 0$$

$$\Rightarrow \dot{T} + (h + a^2 \lambda_n^2) T = 0$$

$$\Rightarrow T_n(t) = a_n e^{-(h + a^2 \lambda_n) t}$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(h + a^2 \lambda_n) t} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x) - u_0 - w(x)$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left(f(\xi) - u_0 - w(\xi) \right) \sin \frac{n\pi \xi}{l} \, d\xi$$

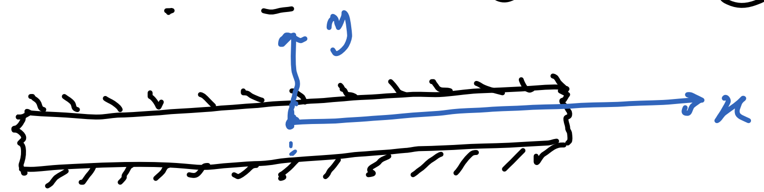
جلسه بیست و دوم

انتقال حرارت در میله نامتناهی و نیمه متناهی

۸-۱۱

مثال: انتقال حرارت یک بعدی در میله نامتناهی

$u_t = k u_{xx} , \quad -\infty < x < \infty , \quad t > 0$



I.C.: $u(x,0) = f(x)$

B.C. تعریف شده نیست

از مبحث جلسه ۳۰ تبدیل متغیر نامتناهی $-\infty < x < \infty$

Ref. Applied PDE with Fourier Series and Boundary

By Richard Haberman

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega x}\, d\omega$	$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}\, dx$	Reference
$e^{-\alpha x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}}e^{-\omega^2/4\alpha}$	Gaussian (Sec. 10.3.3)
$\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-x^2/4\beta}$	$e^{-\beta\omega^2}$	Gaussian (Sec. 10.3.3)
$\frac{\partial f}{\partial t}$	$\frac{\partial F}{\partial t}$	Derivatives (Sec. 10.4.2)
$\frac{\partial f}{\partial x}$	$-i\omega F(\omega)$	Derivatives (Sec. 10.4.2)
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$(-i\omega)^2 F(\omega)$	Derivatives (Sec. 10.4.2)
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\overline{x})g(x-\overline{x})d\overline{x}$	$F(\omega)G(\omega)$	Convolution (Sec. 10.4.3)
$\delta(x-x_0)$	$\frac{1}{2\pi}e^{i\omega x_0}$	Dirac delta function (Exercise 10.3.18)
$f(x-\beta)$	$e^{i\omega\beta}F(\omega)$	Shifting theorem (Exercise 10.3.5)
$xf(x)$	$-i\frac{dF}{d\omega}$	Multiplication by x (Exercise 10.3.8)
$\frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}$	$e^{-\lvert\omega\rvert\alpha}$	Exercise 10.3.7
$f(x) = \begin{cases} 0 & \lvert x\rvert > a \\ 1 & \lvert x\rvert < a \end{cases}$	$\frac{1}{\pi}\frac{\sin a\omega}{\omega}$	Exercise 10.3.6

Table 10.4.1: Fourier Transform

روابط تبدیل و عکس تبدیل

فوریه در بازه $-\infty<x<\infty$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{-iwx}\, dw$$

$$F(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{iwx}\, dx$$

$$\mathcal{F}\{f''(x)\}=(-iw)^2 F(w)=-w^2 F(w)$$

$$\mathcal{F}\{u_t=k\,u_{xx}\}\Rightarrow\begin{cases}\dot{U}(w,t)=-kw^2\,U(w,t)\\ U(w,0)=F(w)\end{cases}$$

$$\mathcal{F}\{u(x,t)\}=U(w,t)$$

$$\begin{cases} \dot{U}(w,t) = -kw^2\, U(w,t) \\ U(w,0) = F(w) \end{cases}$$

$$\Rightarrow U(w,t) = F(w)\, e^{-kw^2 t}$$

حال برای محاسبه $u(x,t)$ باید از رابطه روبرو عکس تبدیل فوریه بگیریم

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{ F(w)\, \underbrace{e^{-kw^2 t}}_{G(w)} \right\}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{ F(w)\, G(w) \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(w)\, g(x-w)\, dw$$

$G(w)$ را داریم به دنبال $g(x)$ هستیم

$$G(\omega) = e^{-k\omega^2 t} \longrightarrow g(x) = ?$$

از جدول $G(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}}\, e^{-\omega^2/4\alpha} \longrightarrow g(x) = e^{-\alpha x^2}$

$$\xrightarrow{\times\sqrt{4\pi\alpha}} G(\omega) = e^{-\omega^2/4\alpha} \longrightarrow g(x) = \sqrt{4\pi\alpha}\, e^{-\alpha x^2}$$

$$kt = \frac{1}{4\alpha} \Rightarrow 4kt\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4kt}$$

$$\longrightarrow \underline{G(\omega) = e^{-kt\omega^2}} \longrightarrow g(x) = \underline{\sqrt{4\pi\alpha}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}} = \sqrt{4\pi\alpha}\, e^{-\alpha x^2}$$

$$G(\omega) = e^{-kt\omega^2} \longrightarrow g(x) = \sqrt{4\pi\alpha}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

$$u(x,t) = \mathbb{F}^{-1}\{F(w)G(w)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(w)\, g(x-w)\, dw$$

$$u(x,t) = \mathbb{F}^{-1}\{F(w)\, G(w)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(w)\, \sqrt{4\pi\alpha}\, e^{-\frac{(x-w)^2}{4kt}}\, dw$$

$$= \frac{\sqrt{4\pi\alpha}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(w)\, e^{-\frac{(x-w)^2}{4kt}}\, dw = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4\pi kt}}\int - - - -$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}} e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4kt}} d\omega$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ a & x>0 \end{cases} \Rightarrow f(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega<0 \\ a & \omega>0 \end{cases}$$ با فرض

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_{-\infty}^{0} 0 \times \text{''}\, d\omega + \int_{0}^{+\infty} \frac{a}{\sqrt{4\pi k t}} e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4kt}} d\omega$$

تغییر متغیر

با فرض $\frac{(x-\omega)^2}{4kt} = \eta^2$ سپس داریم

$$\eta = \frac{\omega - x}{\sqrt{4kt}} \Rightarrow d\eta = \frac{d\omega}{\sqrt{4kt}}$$

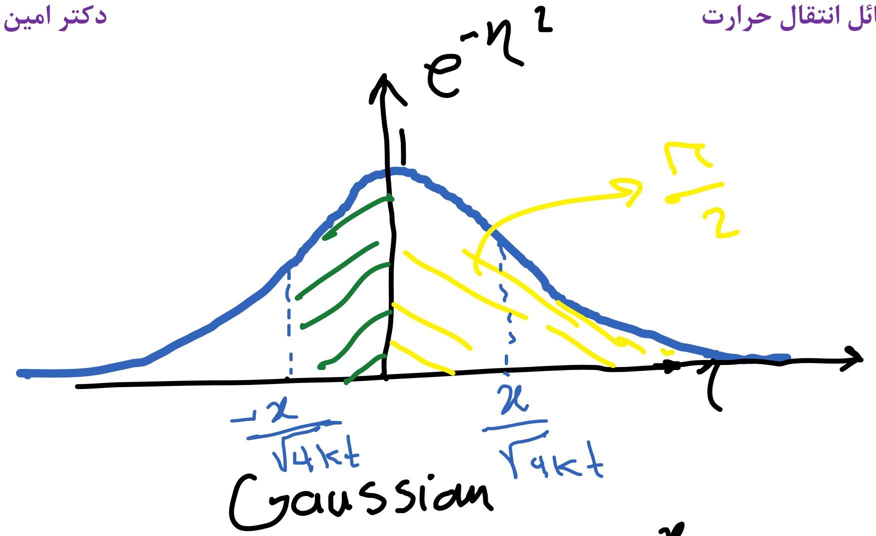
$$d\eta = \frac{d\omega}{\sqrt{4kt}} \Rightarrow d\omega = \sqrt{4kt}\, d\eta$$

$$\eta = \frac{\omega - x}{\sqrt{4kt}} \Rightarrow \xrightarrow{\omega \in [0\ +\infty]} \begin{cases} \omega = 0 \Rightarrow \eta = \dfrac{-x}{\sqrt{4kt}} \\ \omega = \infty \Rightarrow \eta = +\infty \end{cases}$$

بس داریم

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} \frac{a}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4kt}} d\omega = \int_{\frac{-x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} \frac{a}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\eta^2} \sqrt{4kt}\, d\eta$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left\{ \underbrace{\int_{\frac{-x}{\sqrt{4kt}}}^{0} e^{-\eta^2} d\eta}_{1} + \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta}_{2} \right\}$$



می‌توان نشان داد که

$$\int_0^\infty e^{-\eta^2}\, d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{\frac{-x}{\sqrt{4kt}}}^{0} e^{-\eta^2}\, d\eta = \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-\eta^2}\, d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)$$

با تعریف تابع $\mathrm{erf}(x)$ به صورت زیر

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\eta^2}\, d\eta$$

$$u(x,t)=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_{\frac{-x}{\sqrt{4kt}}}^{0} e^{-\eta^2}\,d\eta+\int_{0}^{\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta\right\}$$

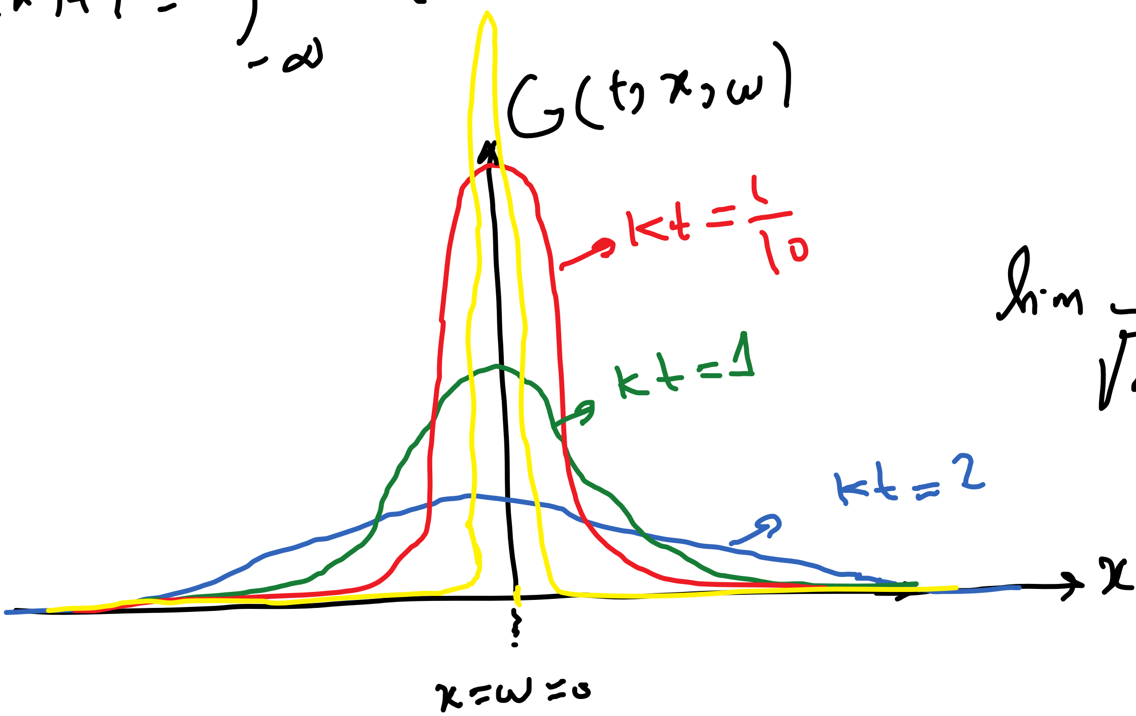
$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right\}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)=\frac{a}{2}\left(1+\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)\right)$$

به تابع erf تابع خطا گفته می‌شود

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi k t}} e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4kt}}}_{\to\, G(t,x,\omega)} d\omega$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, G(t,x,\omega)\, d\omega$$



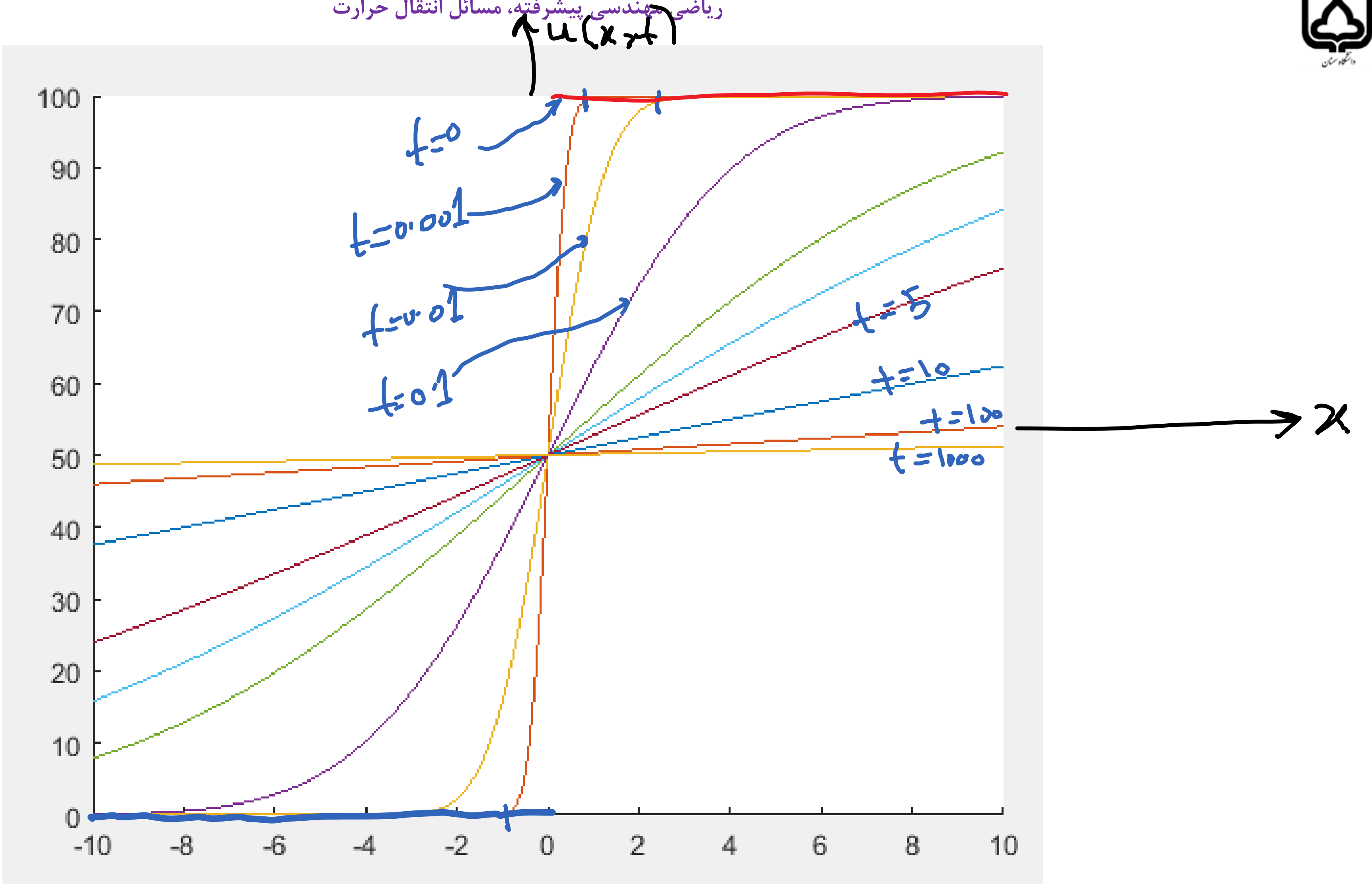
می‌توان نشان داد که

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}} e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4kt}} = \delta(x-\omega)$$

Dirac delta fun

$a = 100$

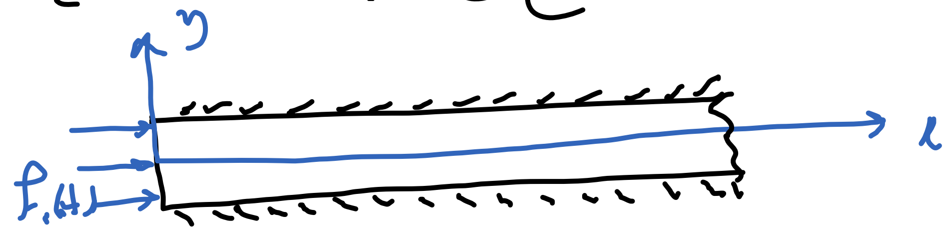
$k = 50$


u(x,t)
x
t=0
t=0.001
t=0.01
t=0.1
t=5
t=10
t=100
t=1000
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10

مثال ۱۰-۸

مثال: توزیع یک بعدی دما در میله نیمه متناهی

$$u_t = k u_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0$$



BC: $u_x(0,t) = -k^{-1} f_1(t)$

IC: $u(x,0) = f(x)$

با توجه به شرط مرزی $u_x(0,t)$ باید از تبدیل فوریه نیمه متناهی کسینوسی استفاده کنیم

$$\mathcal{F}_c\{u(x,t)\} = U_c(\omega,t)$$

$-k^{-1} f_1(t)$

$$\Rightarrow \quad \dot{U}_c(\omega,t) = k\left\{-\omega^2 U_c(\omega,t) - \frac{2}{\pi} u_x(0,t)\right\}$$

$U_c(\omega,0) = F_c(\omega)$ و $F_c(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x \, dx$

Table 10.5.2: Fourier Cosine Transform

$f(x) = \int_0^\infty F(\omega)\cos\omega x\, d\omega$	$C[f(x)] = F(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\, dx$	Reference
$\frac{df}{dx}$	$-\frac{2}{\pi}f(0) + \omega S[f(x)]$	Derivatives (Sec. 10.5.4)
$\frac{d^2 f}{dx^2}$	$-\frac{2}{\pi}\frac{df}{dx}(0) - \omega^2 F(\omega)$	
$\frac{\beta}{x^2+\beta^2}$	$e^{-\omega\beta}$	Exercise 10.5.1
$e^{-\epsilon x}$	$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\epsilon}{\epsilon^2+\omega^2}$	Exercise 10.5.2
$e^{-\alpha x^2}$	$2\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}}e^{-\omega^2/4\alpha}$	Exercise 10.5.3
$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty g(\bar{x})[f(x-\bar{x}) + f(x+\bar{x})]d\bar{x}$	$F(\omega)G(\omega)$	Convolution (Exercise 10.5.7)

Table 10.5.1: Fourier Sine Transform

$f(x) = \int_0^\infty F(\omega) \sin \omega x \, d\omega$	$S[f(x)] = F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin \omega x \, dx$	Reference
$\frac{df}{dx}$	$-\omega C[f(x)]$	Derivatives (Sec. 10.5.4)
$\frac{d^2 f}{dx^2}$	$\frac{2}{\pi}\omega f(0) - \omega^2 F(\omega)$	Derivatives (Sec. 10.5.4)
$\frac{x}{x^2 + \beta^2}$	$e^{-\omega\beta}$	Exercise 10.5.1
$e^{-\epsilon x}$	$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega}{\epsilon^2 + \omega^2}$	Exercise 10.5.2
1	$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega}$	Exercise 10.5.9
$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(\overline{x})[g(x - \overline{x}) - g(x + \overline{x})] d\overline{x} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty g(\overline{x})[f(x + \overline{x}) - f(\overline{x} - x)] d\overline{x}$	$S[f(x)]C[g(x)]$	Convolution (Exercise 10.5.6)

$$\begin{cases} \dot{U}_c(w,t) = k\left\{-w^2 U_c(w,t) + \frac{2}{\pi}k^{-1} f_1(t)\right\} \\ U_c(w,0) = F_c(w) \end{cases}$$

$$U_c(w,t) = F_c(w)e^{-kw^2 t} + \frac{2k^{-1}}{\pi}\int_0^t e^{-kw^2\tau} f_1(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \underbrace{F_c(w)e^{-kw^2 t}}_{1} + \underbrace{\frac{2k^{-1}}{\pi}\int_0^t e^{-kw^2(t-\tau)} f_1(\tau)\,d\tau}_{2}$$

برای محاسبه $u(x,t)$ باید از معادله بالا عکس تبدیل فوریه کسینوسی بگیریم

$$u(x,t) = F_c^{-1}\{U_c(w,t)\} = \int_0^\infty U_c(w,t)\cos wx\,dw$$

$$\mathcal{F}_c^{-1}\left\{F_c(w)\underbrace{e^{-kw^2t}}_{G(w)}\right\} = \mathcal{F}_c^{-1}\left\{F_c(w)\,G(w)\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty g(w)\left\{f(x-w) + f(x+w)\right\}dw$$

از جدول 10.5.2

$$G(w) = e^{-kw^2t} \longrightarrow g(x) = ?$$

$$G(w) = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}\, e^{-\frac{w^2}{4\alpha}} \longleftarrow g(x) = e^{-\alpha x^2}$$

از جدول $\Leftarrow$

$$G(w) = e^{-w^2/4\alpha} \longrightarrow g(x) = \sqrt{\pi\alpha}\, e^{-\alpha x^2}$$

و

$$kt = \frac{1}{4\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4kt}$$

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{\pi\alpha}\, e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\pi\alpha}\; e^{-\frac{x^2}{4kt}} = \sqrt{\frac{\pi}{4kt}}\; e^{-\frac{x^2}{4kt}} \\ G(\omega) = e^{-kt\omega^2} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_c^{-1}\{F(\omega)G(\omega)\} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty g(\omega)\{f(x-\omega) + f(x+\omega)\}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\omega)\{g(x-\omega) + g(x+\omega)\}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{4kt}}\int_0^\infty f(\omega)\left\{e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4kt}} + e^{-\frac{(x+\omega)^2}{4kt}}\right\}d\omega$$

محاسبه عکس تبدیل فوریه ترم 1

$$\mathcal{F}_c^{-1}\left\{F(\omega)\,e^{-kt\omega^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_0^\infty f(\omega)\left\{e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4kt}} + e^{-\frac{(x+\omega)^2}{4kt}}\right\}d\omega$$

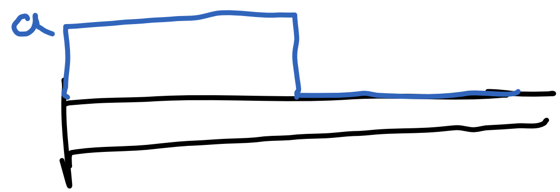
عکس تبدیل فوریه ترم 2

$$\frac{2}{k\pi}\int_0^\infty\left\{\int_0^t e^{-k\omega^2(t-\tau)} f_1(\tau)\,d\tau\right\}\cos\omega x\,d\omega$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi k t}}\int_0^\infty \overset{\text{IC}}{f(w)}\left\{e^{-\frac{(x-w)^2}{4kt}}+e^{-\frac{(x+w)^2}{4kt}}\right\}dw$$

$$+\frac{2}{k\pi}\int_0^\infty\left\{\int_0^t e^{-kw^2(t-\tau)}\underset{\text{BC}}{f_1(\tau)}\,d\tau\right\}\cos wx\,dw$$

$$f(x) = \begin{cases} a & 0 < x < L \\ 0 & x > L \end{cases}$$



با فرض

$$f_1(t) = 0 \longrightarrow u_{BC}(x,t) = 0$$

$$u_{IC}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}} \int_0^{\infty} f(w) \left\{ e^{-\frac{(x-w)^2}{4kt}} + e^{-\frac{(x+w)^2}{4kt}} \right\} dw$$

$$= \frac{a}{\sqrt{4\pi k t}} \int_0^{L} \left(e^{-\frac{(x-w)^2}{4kt}} + e^{-\frac{(x+w)^2}{4kt}} \right) dw$$

$$u_{IC}(x,t) = \frac{a}{\sqrt{4\pi k t}} \int_0^L \left(e^{\frac{-(x-w)^2}{4kt}} + e^{\frac{-(x+w)^2}{4kt}} \right) dw$$

$$= \frac{a}{\sqrt{4\pi k t}} \left\{ \int_0^L e^{\frac{-(x-w)^2}{4kt}} dw + \int_0^L e^{\frac{-(x+w)^2}{4kt}} dw \right\}$$

با فرض $\frac{w-x}{\sqrt{4kt}} = \eta \Rightarrow \frac{dw}{\sqrt{4kt}} = d\eta$, $\begin{cases} w=0 \rightarrow \eta = \frac{-x}{\sqrt{4kt}} \\ w=L \rightarrow \eta = \frac{L-x}{\sqrt{4kt}} \end{cases}$

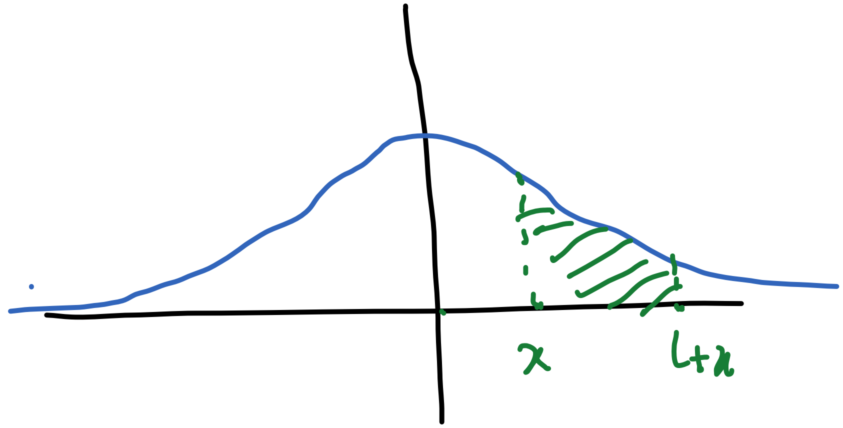
با فرض $\frac{w+x}{\sqrt{4kt}} = \xi \Rightarrow \frac{dw}{\sqrt{4kt}} = d\xi$, $\begin{cases} w=0 \rightarrow \xi = \frac{x}{\sqrt{4kt}} \\ w=L \rightarrow \xi = (x+L)/\sqrt{4kt} \end{cases}$

$$u_{Ic}(x,t) = \frac{a}{\sqrt{4\pi kt}}\left\{\int_0^L e^{-\frac{(x-w)^2}{4kt}}dw + \int_0^L e^{-\frac{(x+w)^2}{4kt}}dw\right\}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{4\pi kt}}\left\{\int_{\frac{-x}{\sqrt{4kt}}}^{\frac{L-x}{\sqrt{4kt}}} e^{-\eta^2}\sqrt{4kt}\,d\eta + \int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{\frac{L+x}{\sqrt{4kt}}} e^{-\xi^2}\sqrt{4kt}\,d\xi\right\}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_{\frac{-x}{\sqrt{4kt}}}^{0} e^{-\eta^2}d\eta + \int_0^{\frac{L-x}{\sqrt{4kt}}} e^{-\eta^2}d\eta + \int_0^{\frac{L+x}{\sqrt{4kt}}} e^{-\xi^2}d\xi - \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-\xi^2}d\xi\right\}$$

$e^{-\eta^2} \quad \xi^2$

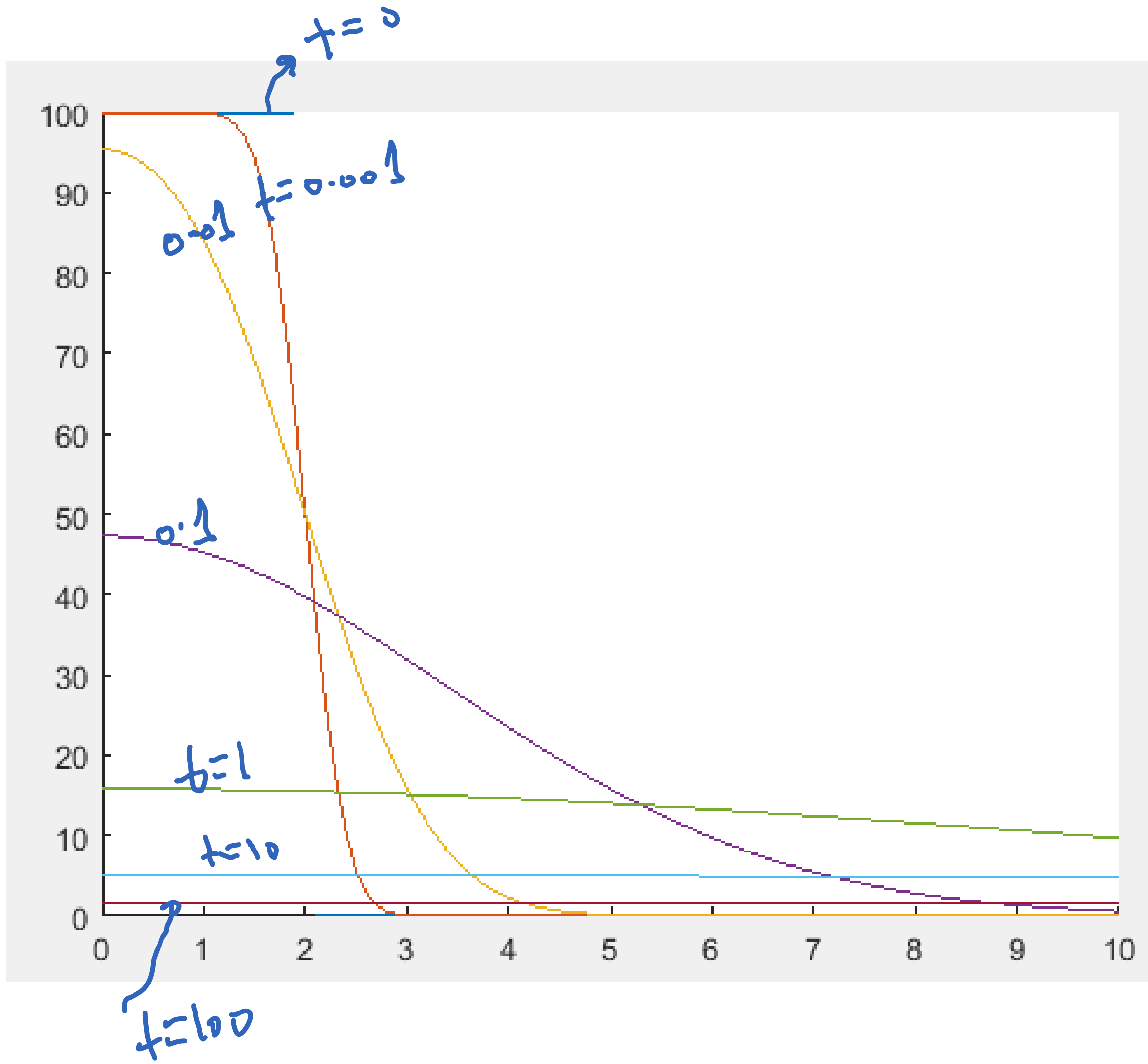


$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^{0} e^{-\eta^2} d\eta + \int_{0}^{\frac{L-x}{\sqrt{4kt}}} e^{-\eta^2} d\eta + \int_{0}^{\frac{L+x}{\sqrt{4kt}}} e^{-\xi^2} d\xi - \int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-\xi^2} d\xi \right\}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left\{ \cancel{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)} + \operatorname{erf}\left(\frac{L-x}{\sqrt{4kt}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{L+x}{\sqrt{4kt}}\right) - \cancel{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)} \right\}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{L-x}{\sqrt{4kt}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{L+x}{\sqrt{4kt}}\right) \right\}$$

$$\frac{a}{2}$$


t = 0
t = 0.001
0.01
0.1
t = 1
t = 10
t = 100
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

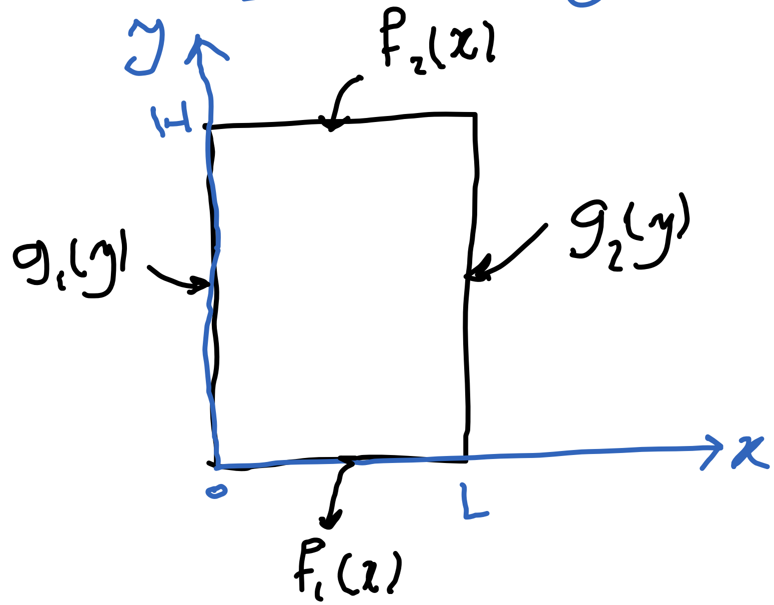
جلسه بیست و سوم

انتقال حرارت دو بعدی

انتقال حرارت پایدار در صفحه مستطیلی

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad 0 < x < L$$

$$0 < y < H$$



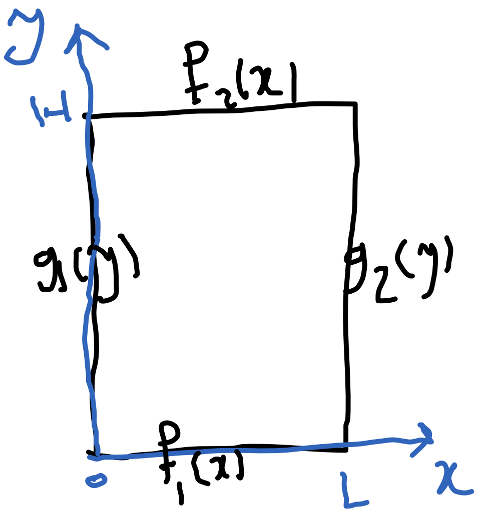
BC :

$$u(x,0) = f_1(x)$$

$$u(x,H) = f_2(x)$$

$$u(0,y) = g_1(y)$$

$$u(L,y) = g_2(y)$$

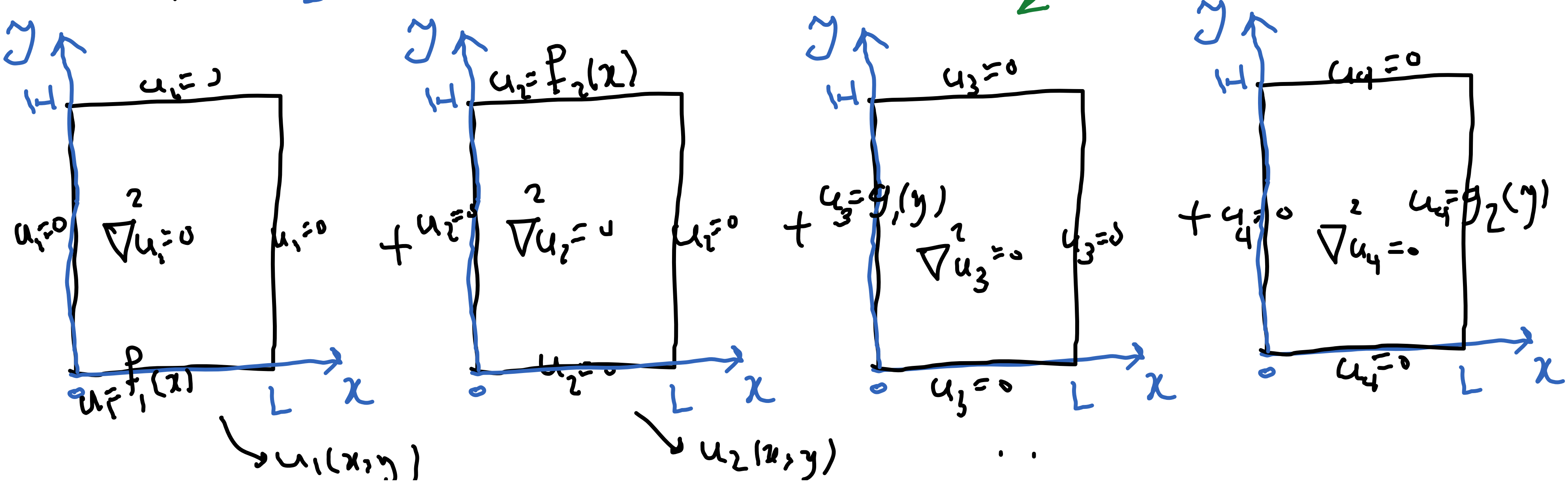


$=$

$$u(x,y) = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

از کتاب Haberman

به عنوان نمونه حالت چهارم را حل می‌کنیم



در این صورت این مسئله با روش جداسازی قابل حل خواهد بود

$$\begin{cases} \nabla^2 u_3 = u_{3xx} + u_{3yy} = 0 \\ u_3(0,y) = g_1(y) \\ u_3(L,y) = 0 \rightarrow X(L)Y(y) = 0 \rightarrow X(L) = 0 \\ u_3(x,0) = 0 \rightarrow X(x)Y(0) = 0 \rightarrow Y(0) = 0 \\ u_3(x,H) = 0 \rightarrow X(x)Y(H) = 0 \rightarrow Y(H) = 0 \end{cases}$$

$$u_3(x,y) = X(x)Y(y)$$

با جایگذاری در معادله

$$X''Y + XY'' = 0$$

$$\Rightarrow X''Y = -XY'' \xrightarrow{\frac{1}{XY}} \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda^2$$

$0 , \lambda^2 , -\lambda^2$

✓ ✗

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = b_1 \cos \lambda y + b_2 \sin \lambda y$$

$$Y(0) = Y(H) = 0 \xRightarrow{b_1 = 0} Y(y) = b_2 \sin \lambda y$$

$$\Rightarrow Y(H) = b_2 \sin \lambda H = 0 \longrightarrow \lambda H = n\pi \longrightarrow \lambda = \frac{n\pi}{H}$$

(اگر $Y'' - \lambda^2 Y = 0$ با شرایط مرزی $Y(0) = Y(H) = 0$ را حل می‌کردیم ← $Y(y) = 0$
می‌رسیدیم که قابل قبول نیست)

$$X'' - \lambda^2 X = 0 \longrightarrow X(x) = a_1 \cosh \lambda x + a_2 \sinh \lambda x$$

$$X(l) = 0$$

برای راحتی محاسبات می توان $X(x)$ را به صورت زیر در نظر گرفت

$$X(x) = b_1 \cosh \lambda (x-L) + b_2 \sinh \lambda (x-L)$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow b_1 + 0 = 0 \longrightarrow b_1 = 0 \Rightarrow X(x) = b_2 \sinh \lambda (x-L)$$

$$\Rightarrow u_3(x,y) = X(x)Y(y) = A \sinh \lambda (x-L) \sin \lambda y \;, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{H}$$

$$\Rightarrow u_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \lambda_n (x-L) \sin \lambda_n y$$

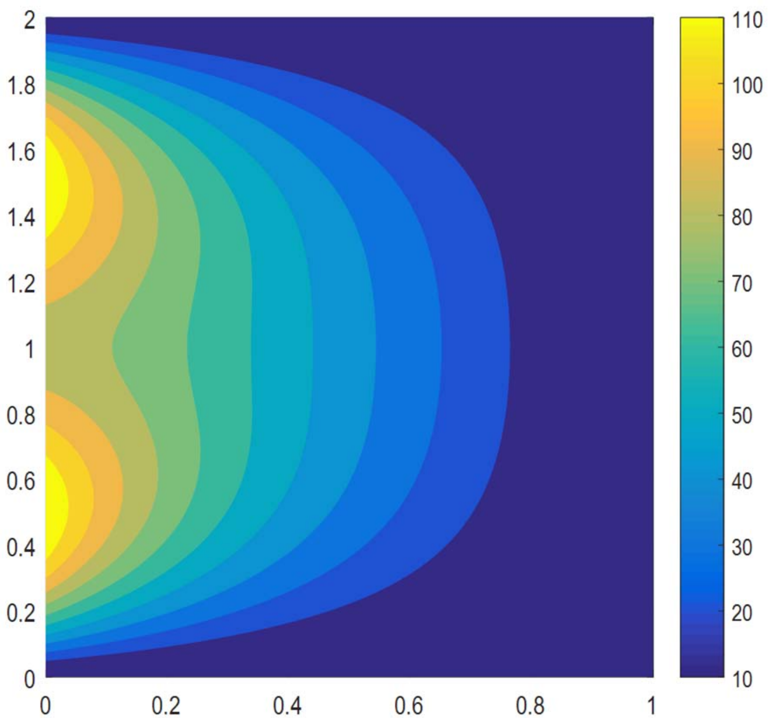
$$\begin{cases} u_3(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \overbrace{\sinh \lambda_n (x-L) \sin \lambda_n y}^{u_n} \\ u_3(0,y) = g_1(y) \longrightarrow g_1(y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(-\lambda_n L) \sin \lambda_n y \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_n \sinh(-\lambda_n L) = \frac{2}{H} \int_0^H g_1(y) \sin \lambda_n y \, dy$$

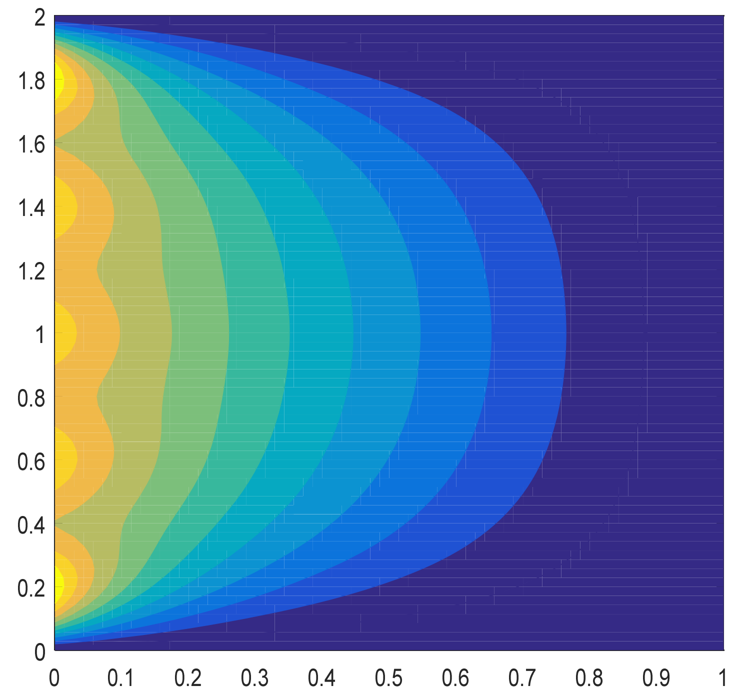
$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{H \sinh(-\lambda_n L)} \int_0^H g_1(y) \sin \lambda_n y \, dy$$

با فرض $g_1(y) = 100^\circ$ توزیع دما را در صفحه رسم کنید.

$g(y) = 100$

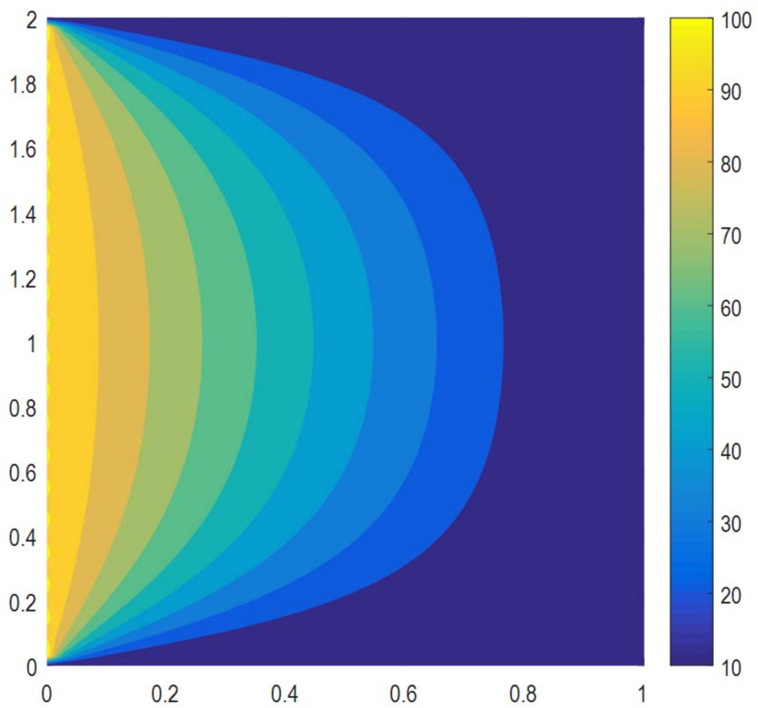

0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10

$n = 4$

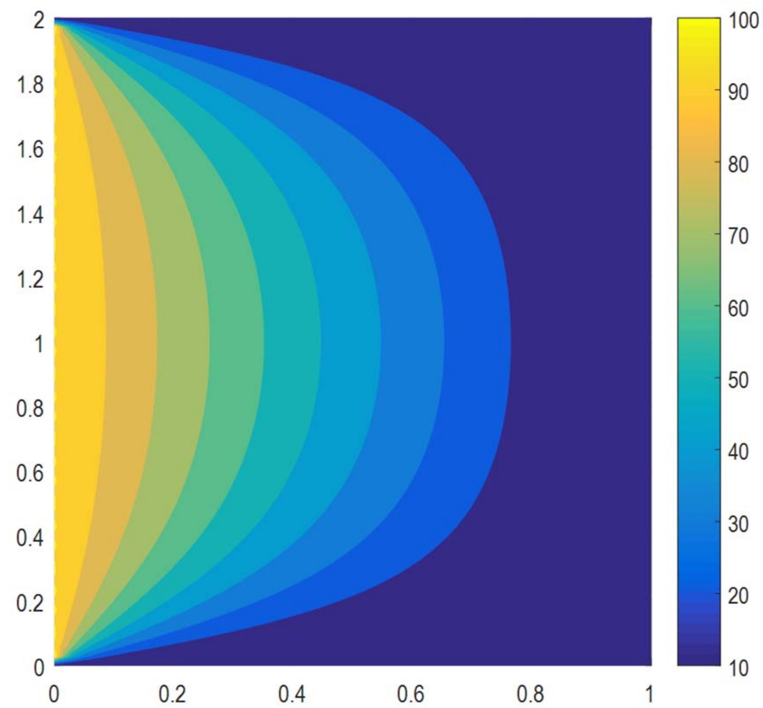

0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

$n = 10$

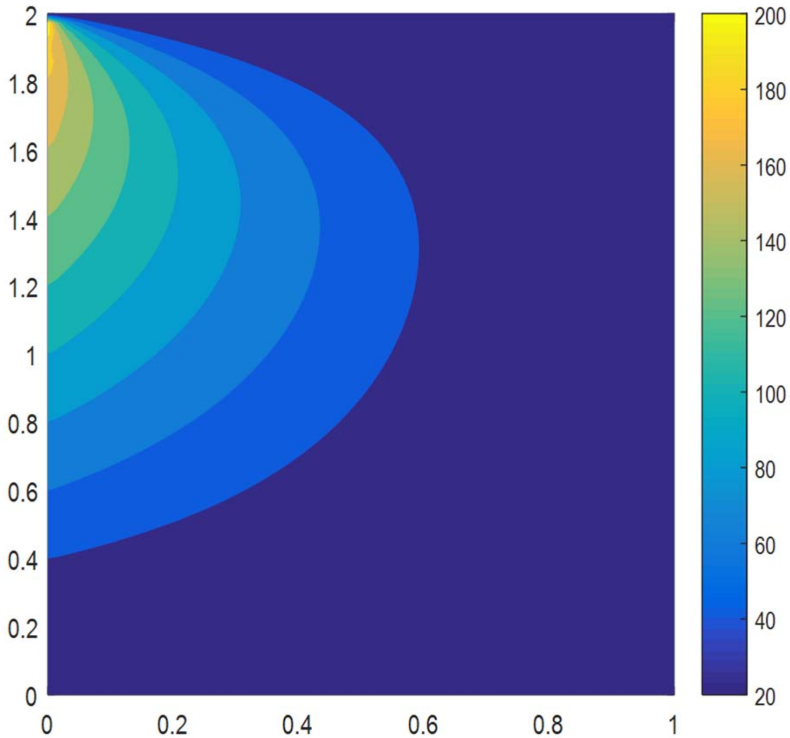
$g(y) = 100$

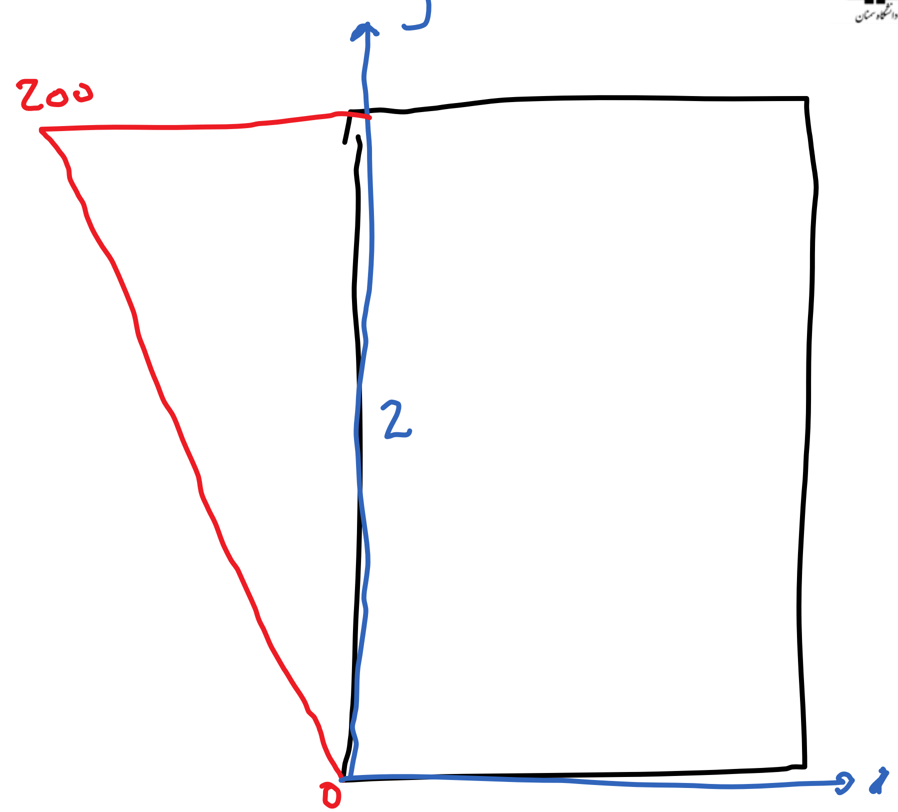


$n = 100$



$n = 200$

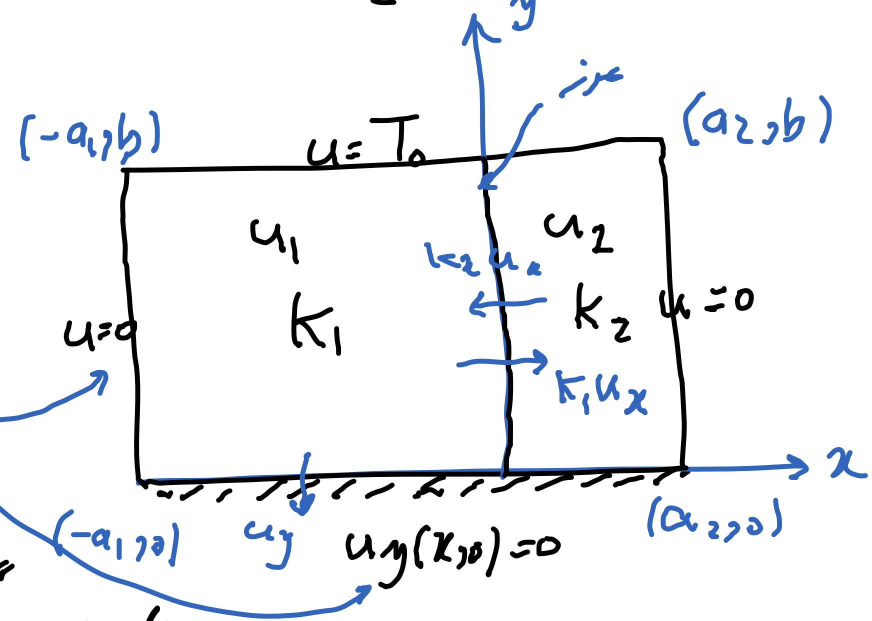

2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20


y
200
2
0
x

$n = 100$

$g(y) = 100\,y$

مثال: هدایت گرمایی پایدار در صفحه مستطیلی با دو ضریب هدایت گرمایی متفاوت k_1 و k_2



$$u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad -a_1<x<a_2$$
$$0<y<b$$

B.C. $u(x,b)=T_0$, $u_y(x,0)=0$

$$u(-a_1,y)=u(a_2,y)=0$$

$$u(x,y)=X(x)\,Y(y) \Rightarrow \frac{X''}{X}=\frac{-Y''}{Y}=\mu$$

$$u=\begin{cases} u_1=X_1Y_1 , & -a_1<x<0 \\ u_2=X_2Y_2 , & 0<x<a_2 \end{cases}$$

$u_y(x,0)=0 \Rightarrow u_y = XY' \longrightarrow X(x)\,Y'(0)=0 \longrightarrow Y'(0)=0$ $\begin{cases} Y_1'(0)=0 \\ Y_2'(0)=0 \end{cases}$

$u(-a_1,y)=0 \Rightarrow X_1(-a_1)\,Y_1(y)=0 \longrightarrow X_1(-a_1)=0$

$u(a_2,y)=0 \Rightarrow X_2(a_2)\,Y_2(y)=0 \longrightarrow X_2(a_2)=0$

شرایط پیوستگی روی مرز

۱- شرط دما $\longrightarrow$ $u_1(0^-,y)=u_2(0^+,y)$

2- شرط پیوستگی شار حرارتی $\longrightarrow$

$$-K_1\frac{\partial u_1(0^-,y)}{\partial x} = -K_2\frac{\partial u_2(0^+,y)}{\partial x}$$

$-K_1 u_{1x}(0^-,y) = -K_2 u_{2x}(0^+,y)$

$$\Rightarrow K_1 X_1'(0^-)\,Y_1(y) = K_2 X_2'(0^+)\,Y_2(y) \longrightarrow K_1 X_1'(0^-) = K_2 X_2'(0^+)$$

$Y_1(y)=Y_2(y)$ روی مرز

حالت اول　$\mu = \lambda^2$

$$\frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} = \mu \longrightarrow X'' - \lambda^2 X = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1(x) = A_1 \cosh\lambda(x+a_1) + B_1 \sinh\lambda(x+a_1), & -a_1 < x < 0 \\ X_2(x) = A_2 \cosh\lambda(x-a_2) + B_2 \sinh\lambda(x-a_2), & 0 < x < a_2 \end{cases}$$

$$u(-a_1, y) = 0 \Rightarrow X_1(-a_1) = 0 \Rightarrow A_1 + B_1 \times 0 = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$u(a_2, y) = 0 \Rightarrow X_2(a_2) = 0 \Rightarrow A_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = B_1 \sinh\lambda(x+a_1) \\ X_2 = B_2 \sinh\lambda(x-a_2) \end{cases}$$

با اعمال شرایط سازگاری دما روی مرز

$$X_1(0^-) = X_2(0^+) \Rightarrow B_1 \sinh\lambda a_1 = B_2 \sinh(-\lambda a_2)$$

$$\Rightarrow B_1 = C_1 \sinh\lambda a_2 \quad , \quad B_2 = -C_1 \sinh\lambda a_1$$

با اعمال شرایط سازگاری شار حرارتی

$$K_1 X_1'(0^-) = K_2 X_2'(0^+)$$

$$X_1 = B_1 \sinh\lambda(x+a_1) \Rightarrow X_1' = B_1 \lambda \cosh\lambda(x+a_1)$$

$$X_2 = B_2 \sinh\lambda(x-a_2) \Rightarrow X_2' = B_2 \lambda \cosh\lambda(x-a_2)$$

$$\Rightarrow K_1 B_1 \lambda \cosh\lambda a_1 = K_2 B_2 \lambda \cosh\lambda a_2$$

$$\Rightarrow K_1 \lambda C_1 \sinh\lambda a_2 \cosh\lambda a_1 = -K_2 \lambda C_1 \sinh\lambda a_1 \cosh\lambda a_2$$

$$k_1 \lambda C_1 \sinh\lambda a_2 \cosh\lambda a_1 = -k_2 \lambda C_1 \sinh\lambda a_1 \cosh\lambda a_2$$

$$\Rightarrow C_1 \lambda \underbrace{\left[k_1 \sinh\lambda a_2 \cosh\lambda a_1 + k_2 \sinh\lambda a_1 \cosh\lambda a_2 \right]}_{} = 0$$

k_1 و k_2 ، λ و a_1 و a_2 همه مقادیر مثبتی هستند پس عبارت داخل کروشه

همواره مثبت است و مخالف صفر پس باید $C_1 = 0$

و به جواب بدیهی رسیدیم پس $\mu = \lambda^2$ قابل قبول نیست،

پس $\mu = -\lambda^2$

حالت دوم

$$\mu = -\lambda^2$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} = \mu = -\lambda^2$$

$$\Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = A_1 \cos\lambda(x+a_1) + B_1 \sin\lambda(x+a_1) \\ X_2 = A_2 \cos\lambda(x-a_2) + B_2 \sin\lambda(x-a_2) \end{cases}$$

$$X_1(-a_1) = 0 \Rightarrow A_1 = 0 \Rightarrow X_1 = B_1 \sin\lambda(x+a_1)$$

$$X_2(a_2) = 0 \Rightarrow A_2 = 0 \Rightarrow X_2 = B_2 \sin\lambda(x-a_2)$$

شرط پیوستگی دما روی مرز

$$X_1(0^-) = X_2(0^+) \Rightarrow B_1 \sin\lambda a_1 = -B_2 \sin\lambda a_2$$

$$\Rightarrow B_1 = C \sin\lambda a_2 \,, \quad B_2 = -C \sin\lambda a_1$$

شرط سازگاری شار حرارتی

$$\begin{cases} X_1 = C \sin\lambda a_2 \sin\lambda(x+a_1) \\ X_2 = -C \sin\lambda a_1 \sin\lambda(x-a_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1' = C\lambda \sin\lambda a_2 \cos\lambda(x+a_1) \\ X_2' = -C\lambda \sin\lambda a_1 \cos\lambda(x-a_2) \end{cases}$$

$$K_1 X_1'(0) = K_2 X_2'(0) \Rightarrow K_1 C\lambda \sin\lambda a_2 \cos\lambda a_1 = -K_2 C\lambda \sin\lambda a_1 \cos\lambda a_2$$

$$\Rightarrow C\lambda\left[K_1 \sin\lambda a_2 \cos\lambda a_1 + K_2 \sin\lambda a_1 \cos\lambda a_2\right] = 0$$

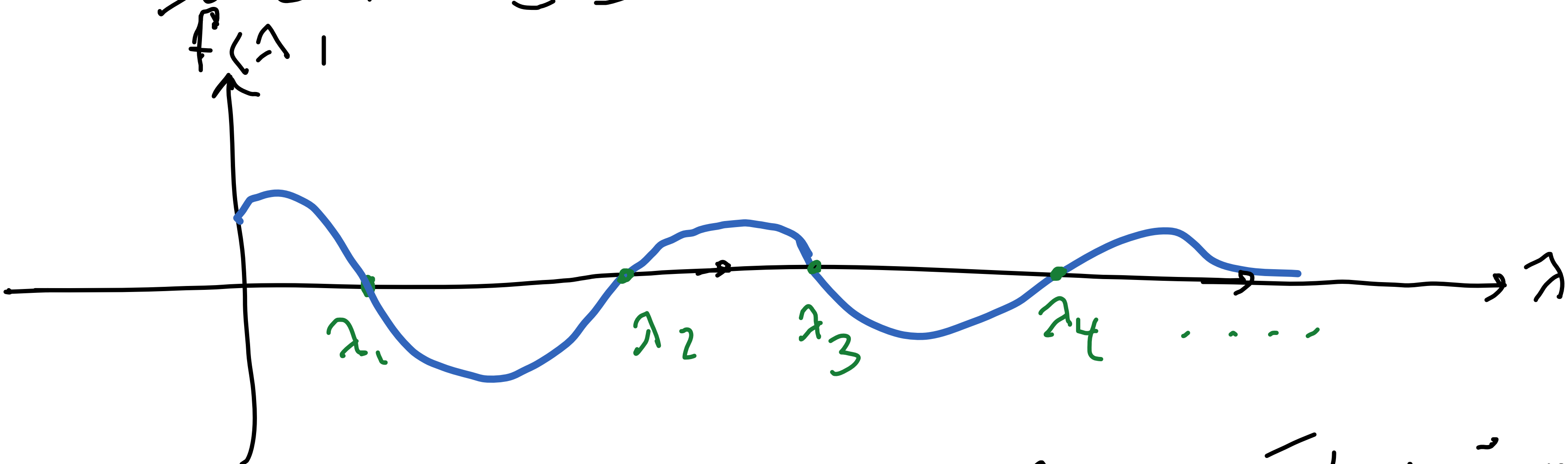
چون $C \neq 0$ پس

$$\boxed{\left[K_1 \sin\lambda a_2 \cos\lambda a_1 + K_2 \sin\lambda a_1 \cos\lambda a_2\right] = 0}$$

معادله مشخصه

$$f(\lambda)=K_1 \sin\lambda a_2 \cos\lambda a_1 + K_2 \sin\lambda a_1 \cos\lambda a_2 = 0 \longrightarrow \lambda_n = \checkmark$$

این معادله مشخصه ماست که ریشه‌های آن مقادیر ویژه را نتیجه می‌دهد



می‌توان نشان داد که $\lambda=0$ هم به جواب بدیهی منجر خواهد شد،

$\lambda_n \, , \quad n=1,2,\dots$

$$-\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \Rightarrow Y'' - \lambda^2 Y = 0$$

برای Y نیازی به تقسیم به دو بخش Y_1 و Y_2 نیست.

$$Y = A\cosh\lambda y + B\sinh\lambda y$$

$$Y'(0) = 0$$

$$Y'(y) = A\lambda\sinh\lambda y + B\lambda\cosh\lambda y$$

$$Y'(0) = B\lambda = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Rightarrow Y(y) = A\cosh\lambda y$$

پاسخ عمومی دستگاه به صورت زیر خواهد شد

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n \cosh(\lambda_n y)$$

ضریب C_n با استفاده از شرط مرزی $u(x,b)=T_0$ قابل محاسبه است، اگر $X_n(x)$ ها توابع متعامدی باشند. برای بررسی تعامد باید تابع وزنی مناسب X_n ها را پیدا کرد.

توابع وزنی
$$\begin{cases} p_1(x) & -a_1<x<0 \\ p_2(x) & 0<x<a_2 \end{cases}$$

برای تعامد توابع ویژه باید اثبات کنیم $\int_{-a_1}^{a_2} p(x) X_m X_n \, dx = 0 \ , \ m \neq n$

توابع ویژه X_n و X_m در معادله زیر صدق می‌کنند

$$X_n'' + \lambda_n^2 X_n = 0 \xrightarrow{\times P(x) X_m} P X_m X_n'' + \lambda_n^2 P X_n X_m = 0 \quad (1)$$

$$X_m'' + \lambda_m^2 X_m = 0 \xrightarrow{\times P(x) X_n} P X_n X_m'' + \lambda_m^2 P X_n X_m = 0 \quad (2)$$

$$(2)-(1) \Rightarrow (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_{-a_1}^{a_2} P(x) X_m X_n \, dx = \int_{-a_1}^{a_2} P(x) \left[X_n'' X_m - X_m'' X_n \right] dx$$

$$(\lambda_m^2-\lambda_n^2)\int_{-a_1}^{2}\rho(x)X_mX_n\,dx=\int_{-a_1}^{a_2}\rho(x)\left[X_n''X_m-X_m''X_n\right]dx$$

$$=\int_{-a_1}^{0}\rho_1(x)\left(X_n''X_m-X_m''X_n\right)dx+\int_{0}^{a_2}\rho_2(x)\left(X_n''X_m-X_m''X_n\right)dx$$

با فرض ρ_1 و ρ_2 مقادیر ثابتی باشند

$$=\rho_1\int_{-a_1}^{0}\left(X_n''X_m-X_m''X_n\right)dx+\rho_2\int_{0}^{a_2}\left(X_n''X_m-X_m''X_n\right)dx$$

$$= \rho_1 \int_{-a_1}^{0} \left(X''_n X_m - X''_m X_m \right) dx + \rho_2 \int_{0}^{a_2} \left(X''_n X_m - X''_m X_n \right) dx$$

$$= \rho_1 \left[X'_n X_m - X'_m X_n \right]_{-a_1}^{0} + \rho_2 \left[X'_n X_m - X'_m X_n \right]_{0}^{a_2}$$

$$d\left(X'_n X_m - X'_m X_n \right) = \left(X''_n X_m - X''_m X_n \right) dx$$

$$= P_1 \left[X'_n X_m - X'_m X_n \right]_{-a_1}^{0^-} + P_2 \left[X'_n X_m - X'_m X_n \right]_{0^+}^{a_2}$$

$$= P_1 \left[X'_n(0^-) X_m(0^-) - X'_m(0^-) X_n(0^-) - X'_n(-a_1) \underbrace{X_m(-a_1)}_{0} + X'_m(-a_1) \underbrace{X_n(-a_1)}_{0} \right]$$

$$+ P_2 \left[X'_n(a_2) \underbrace{X_m(a_2)}_{0} - X'_m(a_2) \underbrace{X_n(a_2)}_{0} - X'_n(0^+) X_m(0^+) + X'_m(0^+) X_n(0^+) \right]$$

از شرایط مرزی داریم

$$X_n(-a_1) = 0$$

$$X_n(a_2) = 0$$

از شرایط پیوستگی

$$X_n(0^-) = X_n(0^+)$$

$$K_1 X'_n(0^-) = K_2 X'_n(0^+)$$

$$= p_1\left[X_n'(0^-)\,X_m(0^-) - X_m'(0^-)\,X_n(0^-)\right] + p_2\left[-X_n'(0^+)\,X_m(0^+) + X_m'(0^+)\,X_n(0^+)\right]$$

اگر $p_1=k_1$, $p_2=k_2$ ترم بالا برابر صفر خواهد شد و تعامد توابع ویژه
تضمین خواهد شد

$$\int_{-a_1}^{a_2} p\,X_n X_m\,dx = 0 \quad ✓$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n \cosh(\lambda_n y) = \begin{cases} u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_{1n} \cosh(\lambda_n y) \\ u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_{2n} \cosh(\lambda_n y) \end{cases}$$

اعمال شرط مرزی $u(x,b) = T_0$

$$\Rightarrow u(x,b) = T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{C_n \cosh(\lambda_n b)}^{A_n} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{\int_{-a_1}^{a_2} f(x)\, P(x)\, X_n\, dx}{\int_{-a_1}^{a_2} P(x)\, X_n^2\, dx}$$

T_0

$$\int_{-a_1}^{a_2} T_0\, p(x)\, X_n(x)\, dx = \int_{-a_1}^{0} T_0\, \overset{p_1}{k_1}\, \overbrace{\sin(\lambda_n a_2) \sin \lambda_n (x + a_1)}^{X_1}\, dx$$

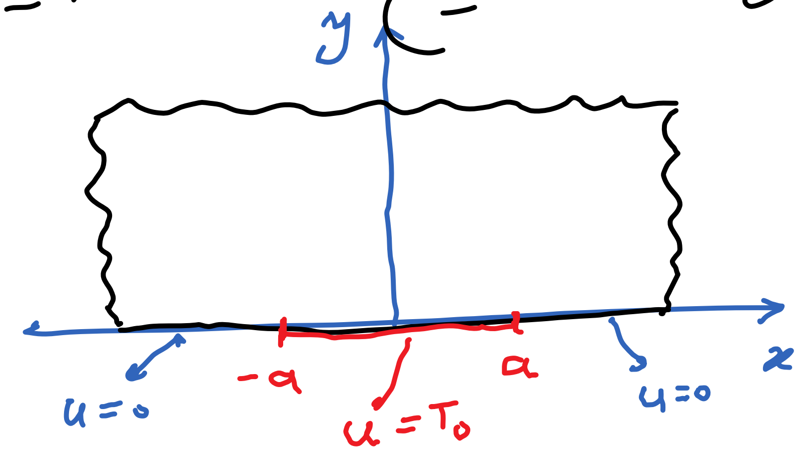
$$+ \int_{0}^{a_2} T_0\, \overset{p_2}{k_2}\, \overbrace{\sin(\lambda_n a_1) \sin \lambda_n (a_2 - x)}^{X_2}\, dx$$

با محاسبه انتگرالها نوشته دارم :

$$\ldots \Rightarrow C_n = \frac{2T_0}{\lambda_n \cosh(\lambda_n b)} \; \frac{k_1 \sin(\lambda_n a_2) + k_2 \sin(\lambda_n a_1)}{k_1 a_1 \sin^2(\lambda_n a_2) + k_2 a_2 \sin^2(\lambda_n a_1)}$$

جلسه بیست و چهارم

مثال ۸-۱۴ توزیع دمای حالت پایدار در نیم صفحه



$$u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad -\infty<x<\infty\,,\ 0<y<\infty$$

$$BC:\ u(x,0)=f(x)=\begin{cases}T_0\,, & |x|<a\\ 0\,, & |x|>0\end{cases}$$

روش تبدیل فوریه :

نسبت به متغیر x تبدیل فوریه نامتناهی

$$x \to \xi$$

$$\mathcal{F}\{f(x)\}=F(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\xi x}\,dx$$

$$\mathcal{F}\{u(x,y)\}=U(\xi,y)\,,\qquad \mathcal{F}\{u_{xx}(x,y)\}=(-i\xi)^2\,U(\xi,y)$$

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega x}\,d\omega$	$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}\,dx$	Reference
$e^{-\alpha x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}}e^{-\omega^2/4\alpha}$	Gaussian (Sec. 10.3.3)
$\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-x^2/4\beta}$	$e^{-\beta\omega^2}$	Gaussian (Sec. 10.3.3)
$\frac{\partial f}{\partial t}$	$\frac{\partial F}{\partial t}$	Derivatives (Sec. 10.4.2)
$\frac{\partial f}{\partial x}$	$-i\omega F(\omega)$	Derivatives (Sec. 10.4.2)
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$(-i\omega)^2 F(\omega)$	Derivatives (Sec. 10.4.2)
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\overline{x})g(x-\overline{x})d\overline{x}$	$F(\omega)G(\omega)$	Convolution (Sec. 10.4.3)
$\delta(x-x_0)$	$\frac{1}{2\pi}e^{i\omega x_0}$	Dirac delta function (Exercise 10.3.18)
$f(x-\beta)$	$e^{i\omega\beta}F(\omega)$	Shifting theorem (Exercise 10.3.5)
$xf(x)$	$-i\frac{dF}{d\omega}$	Multiplication by x (Exercise 10.3.8)
$\frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}$	$e^{-\lvert\omega\rvert\alpha}$	Exercise 10.3.7
$f(x) = \begin{cases} 0 & \lvert x\rvert > a \\ 1 & \lvert x\rvert < a \end{cases}$	$\frac{1}{\pi}\frac{\sin a\omega}{\omega}$	Exercise 10.3.6

Table 10.4.1: Fourier Transform

Table 10.5.1: Fourier Sine Transform

$f(x) = \int_0^\infty F(\omega) \sin \omega x \, d\omega$	$S[f(x)] = F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin \omega x \, dx$	Reference
$\frac{df}{dx}$	$-\omega C[f(x)]$	Derivatives (Sec. 10.5.4)
$\frac{d^2 f}{dx^2}$	$\frac{2}{\pi}\omega f(0) - \omega^2 F(\omega)$	
$\frac{x}{x^2+\beta^2}$	$e^{-\omega\beta}$	Exercise 10.5.1
$e^{-\epsilon x}$	$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega}{\epsilon^2+\omega^2}$	Exercise 10.5.2
1	$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega}$	Exercise 10.5.9
$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\bar{x})[g(x-\bar{x}) - g(x+\bar{x})]d\bar{x} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty g(\bar{x})[f(x+\bar{x}) - f(\bar{x}-x)]d\bar{x}$	$S[f(x)]C[g(x)]$	Convolution (Exercise 10.5.6)

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ u(x,0)=\begin{cases} T_0 & |x|<a \\ 0 & |x|>a \end{cases} \end{cases} \xrightarrow[\text{x: نامتناهی نیست}]{\text{تبدیل فوریه}} \begin{cases} -\xi^2 U(\xi,y)+U_{yy}(\xi,y)=0 \\ U(\xi,0)=\dfrac{T_0}{\pi}\dfrac{\sin a\xi}{\xi} \end{cases}$$

$x \to \xi$

حال از این معادله نسبت به y تبدیل فوریه سینوسی نامتناهی می گیریم

$y \to \eta$

$$F_s\{f(y)\}=F(\eta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(y)\sin\eta y\,dy$$

$u(x,0)$

$$F_s\{U(\xi,y)\}=U(\xi,\eta)\ ,\quad F_s\{U_{yy}(\xi,y)\}=\frac{2}{\pi}\eta\,U(\xi,0)-\eta^2U(\xi,\eta)$$

$$\Rightarrow -\xi^2U(\xi,\eta)-\eta^2U(\xi,\eta)+\frac{2}{\pi}\eta\,U(\xi,0)=0$$

نکته: مقوجه باشید که هر دو تبدیل فوریه به صورت همزمان روی یک معادله اعمال می شود.

$$-\xi^2 U(\xi,\eta) - \eta^2 U(\xi,\eta) + \frac{2}{\pi}\eta\, U(\xi,0) = 0$$

$$\Rightarrow -\xi^2 U(\xi,\eta) - \eta^2 U(\xi,\eta) + \frac{2}{\pi}\eta\left(\frac{T_0}{\pi}\,\frac{\sin a\xi}{\xi}\right) = 0$$

$$\Rightarrow U(\xi,\eta) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\,\frac{T_0 \sin a\xi}{\pi\xi}$$

حال از رابطه بالا تبدیل فوریه سینوسی معکوس نسبت به η می‌گیریم

$$F_s^{-1}\{U(\xi,\eta)\} = U(\xi,y)$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{T_0 \sin a\xi}{\pi\xi}\, F_s^{-1}\left\{\frac{2}{\pi}\,\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\right\} = \frac{T_0 \sin a\xi}{\pi\xi}\, e^{-\xi y}$$

$$\Rightarrow U(\xi,y)=\frac{T_0 \sin a\xi}{\pi\xi}e^{-\xi y}$$

حال تبدیل فوریه معکوس نسبت به ξ می گیریم

$$\xi \longrightarrow x$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{U(\xi,y)\}=u(x,y)$$

$$U(\xi,y)=\underbrace{\frac{T_0 \sin a\xi}{\pi\xi}}_{F(\xi)}\underbrace{e^{-\xi y}}_{G(\xi)}=F(\xi)\,G(\xi)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\xi)\}=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{T_0 \sin a\xi}{\pi\xi}\right\}=f(x)=\begin{cases}T_0 & x<|a|\\ 0 & x>|a|\end{cases}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{G(\xi)\}=\mathcal{F}^{-1}\{e^{-\xi y}\}=\frac{2y}{x^2+y^2}=g(x)$$

داریم

$$u(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\left\{F(\xi)\,G(\xi)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x})\, g(x-\bar{x})\, d\bar{x}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\bar{x}=-\infty}^{\bar{x}=\infty} f(\bar{x})\,\frac{2y}{(x-\bar{x})^2+y^2}\, d\bar{x}$$

$$= \frac{T_0 y}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{d\bar{x}}{(x-\bar{x})^2+y^2}\ ,$$

با فرض $\bar{x}-x=u \Rightarrow \bar{x}=x+u$

$\rightarrow d\bar{x}=du$

$\rightarrow \bar{x}=a \quad x+u=a \rightarrow u=a-x$

$\rightarrow \bar{x}=-a \quad x+u=-a \rightarrow u=-a-x$

$$= \frac{T_0 y}{2\pi}\int_{-a-x}^{a-x}\frac{du}{u^2+y^2}$$

$$u(x,y) = \frac{T_0 y}{\pi} \int_{-a-x}^{a-x} \frac{du}{u^2+y^2}$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = tg^{-1} u \Longleftarrow$$

Derivatives of Inverse Trigonometric Functions

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq \pm 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq \pm 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, x \neq \pm 1, 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\csc^{-1} x\right) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, x \neq \pm 1, 0$$

assume $w = \frac{u}{y} \rightarrow dw = \frac{du}{y}$

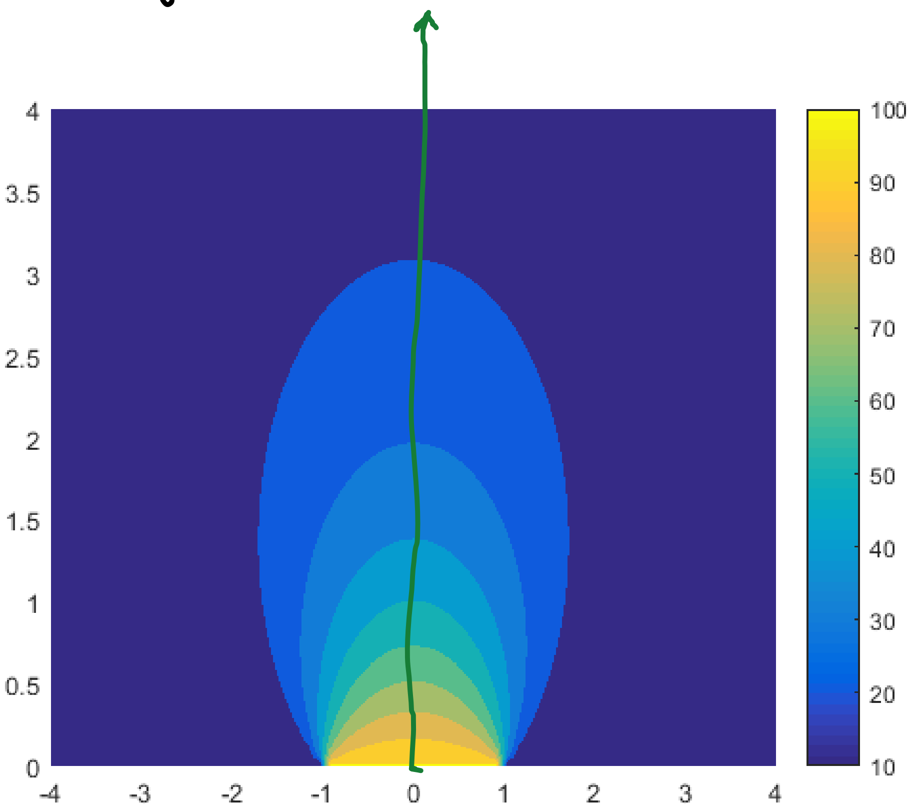
$$\Rightarrow \int \frac{du}{u^2+y^2} = \int \frac{\frac{du}{y^2}}{\left(\frac{u}{y}\right)^2+1} = \frac{1}{y^2} \int \frac{du}{\left(\frac{u}{y}\right)^2+1} = \frac{1}{y^2} \int \frac{y\,dw}{w^2+1} = \frac{1}{y} \int \frac{dw}{w^2+1}$$

$$= \frac{1}{y}\left[tg^{-1} w\right]$$

$$u(x,y)=\frac{T_0 y}{2\pi}\int_{-a-x}^{a-x}\frac{du}{u^2+y^2} = \frac{T_0 y}{2\pi}\left[\frac{1}{y}\tan^{-1}\frac{u}{y}\right]_{-a-x}^{a-x}$$

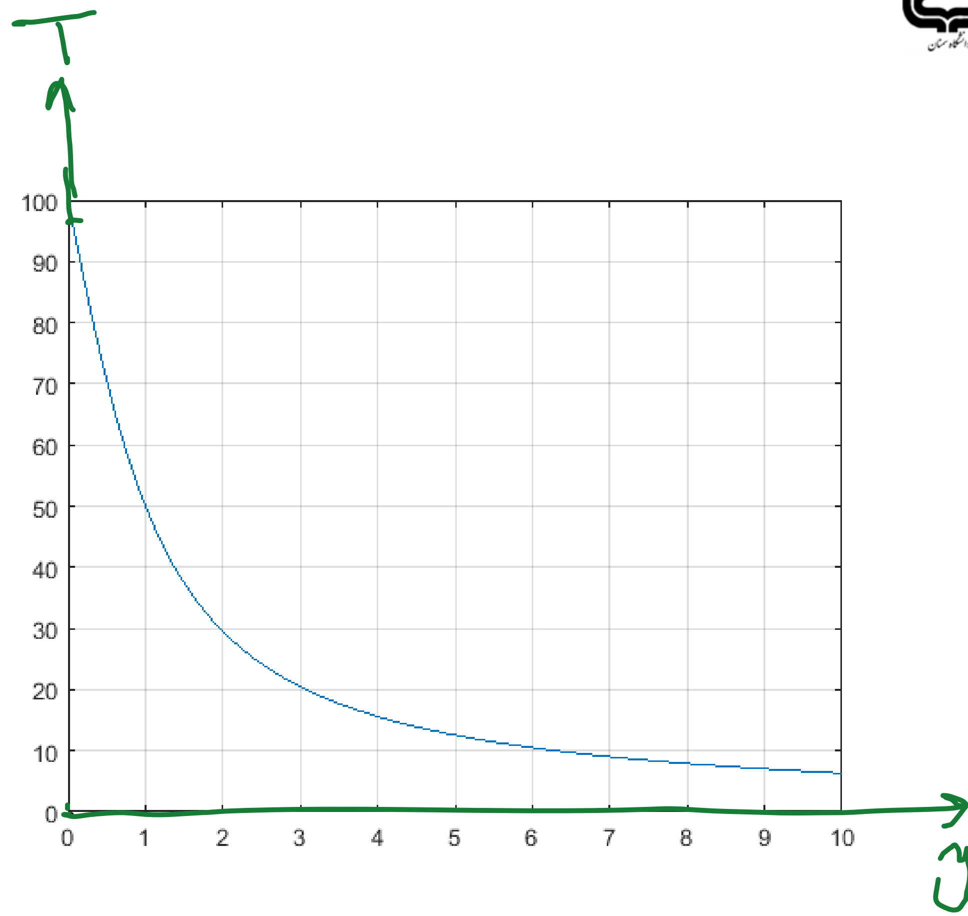
$$=\frac{T_0}{2\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{a-x}{y}\right)-\tan^{-1}\frac{(-a-x)}{y}\right]$$

$T_0 = 100$, $a = 1$



$x = 0$

$y = [0 \quad 10]$



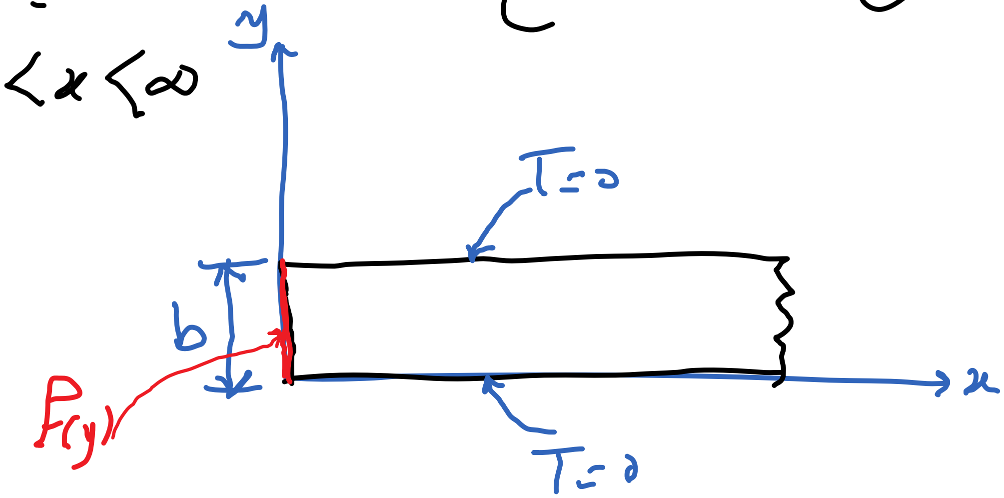
دما در امتداد محور y

مثال ۸-۱۵ توزیع دمای پایدار در نوار نیمه متناهی

$$T_{xx}+T_{yy}=0\ ,\quad 0<y<b\ ,\quad 0<x<\infty$$

BC: $T(0,y)=f(y)$

$$T(x,b)=T(x,0)=0$$



روش جداسازی متغیرها

$$T(x,y)=X(x)\,Y(y)$$

$$X''Y+Y''X=0 \Rightarrow -\frac{X''}{X}=\frac{Y''}{Y}=\mu$$

اغلب روی بازه‌ای که متناهی است پاسخ سینوس و کسینوسی است

و ~ ~ ~ نامتناهی یا نیمه متناهی است پاسخ به صورت نمایی، Sinh، Cosh

$$\frac{Y''}{Y} = \mu \quad , \quad \mu = \lambda^2 \Rightarrow Y'' - \lambda^2 Y = 0 \longrightarrow Y = 0$$ فقط جواب بدیهی است

$$Y(0) = Y(b) = 0$$

$$\Rightarrow Y'' + \lambda^2 Y = 0 \longrightarrow Y_n(y) = \sin \lambda_n y \ , \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{b} \ , \ n = 1, 2, \dots$$

$$Y(0) = Y(b) = 0$$

$X(x) \longrightarrow \infty$ باشه $A \neq 0$ اگر $x \longrightarrow +\infty$ میل

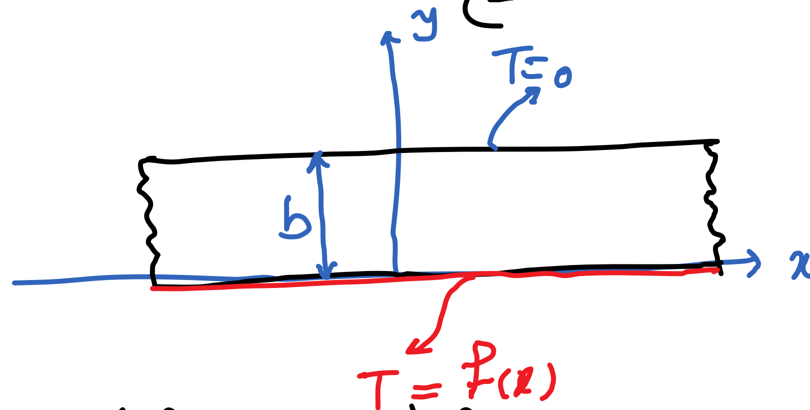
$$\Rightarrow X'' - \lambda^2 X = 0 \longrightarrow X_n(x) = A e^{\lambda_n x} + B e^{-\lambda_n x} \xrightarrow{A=0} X_n(x) = e^{-\lambda_n x}$$

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y$$

$$\text{B.C.} \quad T(0, y) = f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \lambda_n y \longrightarrow C_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin(\lambda_n y)\, dy$$

مثال ۱۶-۸ توزیع دمای پایدار در نوار نامتناهی

$$T_{xx} + T_{yy} = 0 \qquad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < b$$



BC. $T(x,0) = f(x), \quad T(x,b) = 0$

$X'' + \mu X = 0$ با روش جداسازی $\mu = -\lambda^2$

$$\begin{cases} X'' - \lambda^2 X = 0 \\ Y'' + \lambda^2 Y = 0, \quad Y(b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x) = A\cosh\lambda x + B\sinh\lambda x \\ Y(y) = C\cos\lambda(y-b) + D\sin\lambda(y-b) \end{cases}$$

در این مسئله یک طیف پیوسته از مقادیر ویژه را داریم

$$\Rightarrow Y(y) = D\sin\lambda(y-b)$$

$$\Rightarrow T(x,y) = \int_0^\infty \sin\lambda(y-b)\left[A(\lambda)\cosh\lambda x + B(\lambda)\sinh\lambda x\right] d\lambda$$

$$T(x,y) = \int_0^\infty \sin\lambda(y-b)\left[A(\lambda)\cosh\lambda x + B(\lambda)\sinh\lambda x\right]d\lambda$$

با اعمال شرط مرزی ج

$$T(x,0) = f(x) = \int_0^\infty \sin(-\lambda b)\left[A(\lambda)\cosh\lambda x + B(\lambda)\sinh\lambda x\right]d\lambda$$

برای اینکه بتوانیم ضرایب $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ را با استفاده از روابط ضرایب انتگرال فوریه محاسبه کنیم باید تابع $X(x)$ یک مجموعه کامل باشد. $\sinh\lambda x$ و $\cosh\lambda x$ یک مجموعه کامل را تشکیل نمی‌دهند و نمی‌توان همانند مجموعه $\sin\lambda x$ و $\cos\lambda x$ هر تابع دلخواهی را به صورت بسط سری فوریه آنها نوشت. پس باید $\mu = \lambda^2$ در نظر بگیریم

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 & \longrightarrow X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \\ Y'' - \lambda^2 Y = 0 \ , \ Y(b) = 0 & \longrightarrow Y(y) = C\cosh\lambda(y-b) + D\sinh\lambda(y-b) \end{cases}$$

$$Y(b) = 0 \longrightarrow C = 0$$

$$T(x,y) = \int_0^\infty X_\lambda(x)\, Y_\lambda(y)\, d\lambda$$

λ یک طیف پیوسته از مقادیر ویژه را داریم

$$\Rightarrow T(x,y) = \int_0^\infty \underbrace{\sinh\lambda(y-b)\Big[A(\lambda)}\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\Big]\, d\lambda$$

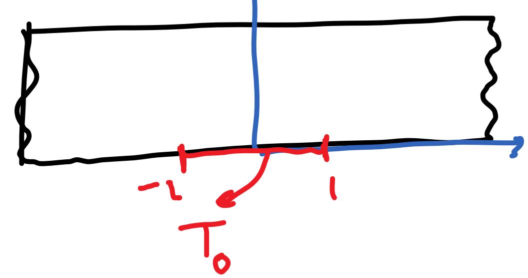
$$T(x,0) = f(x) \Longrightarrow \quad f(x) = \int_0^\infty \sinh(-\lambda b)\Big[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\Big]\, d\lambda$$

که در آن ضرایب انتگرال فوریه به صورت زیر خواهد شد

$$\begin{cases} A(\lambda)\sinh(-\lambda b) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx \\[2ex] B(\lambda)\sinh(-\lambda b) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\, dx \end{cases}$$

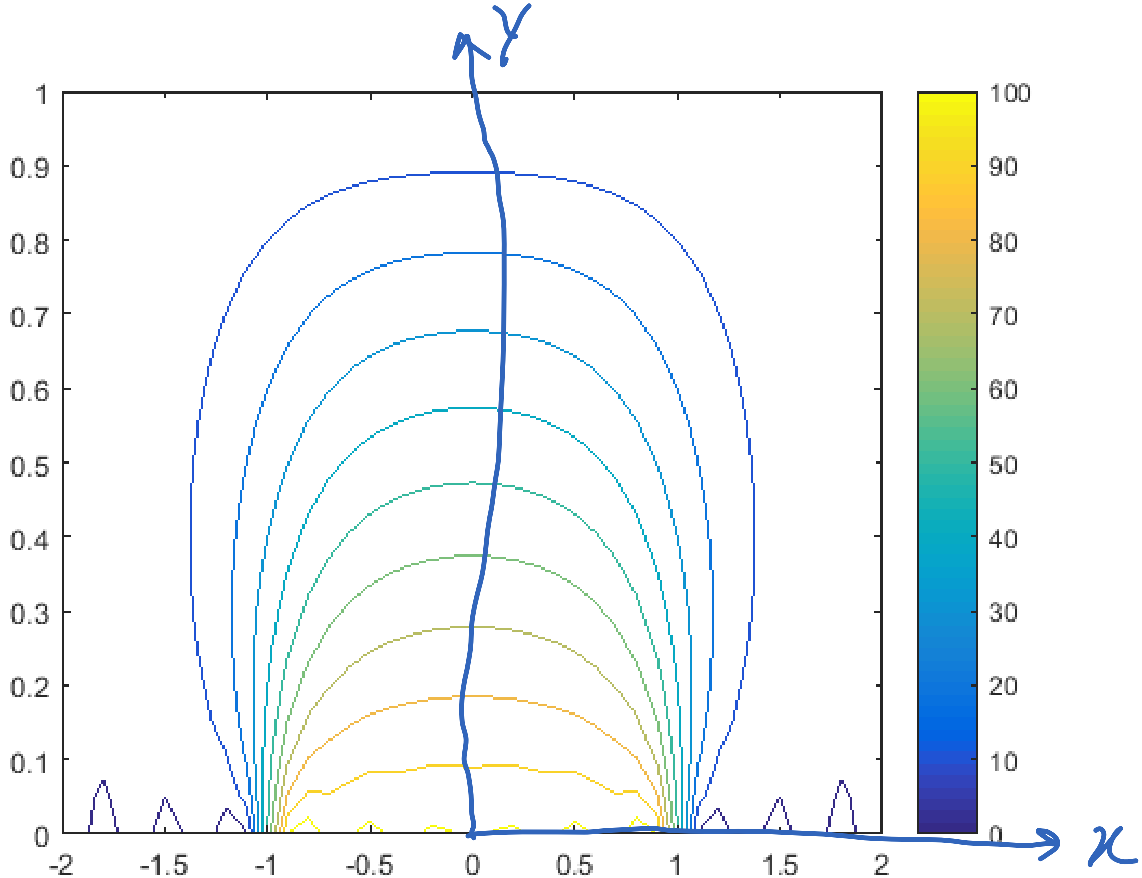
$$\Rightarrow \begin{cases} A(\lambda) = \dfrac{1}{\pi\sinh(-\lambda b)}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx \\[2ex] B(\lambda) = \dfrac{1}{\pi\sinh(-\lambda b)}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\, dx \end{cases}$$

مثال حل عددی

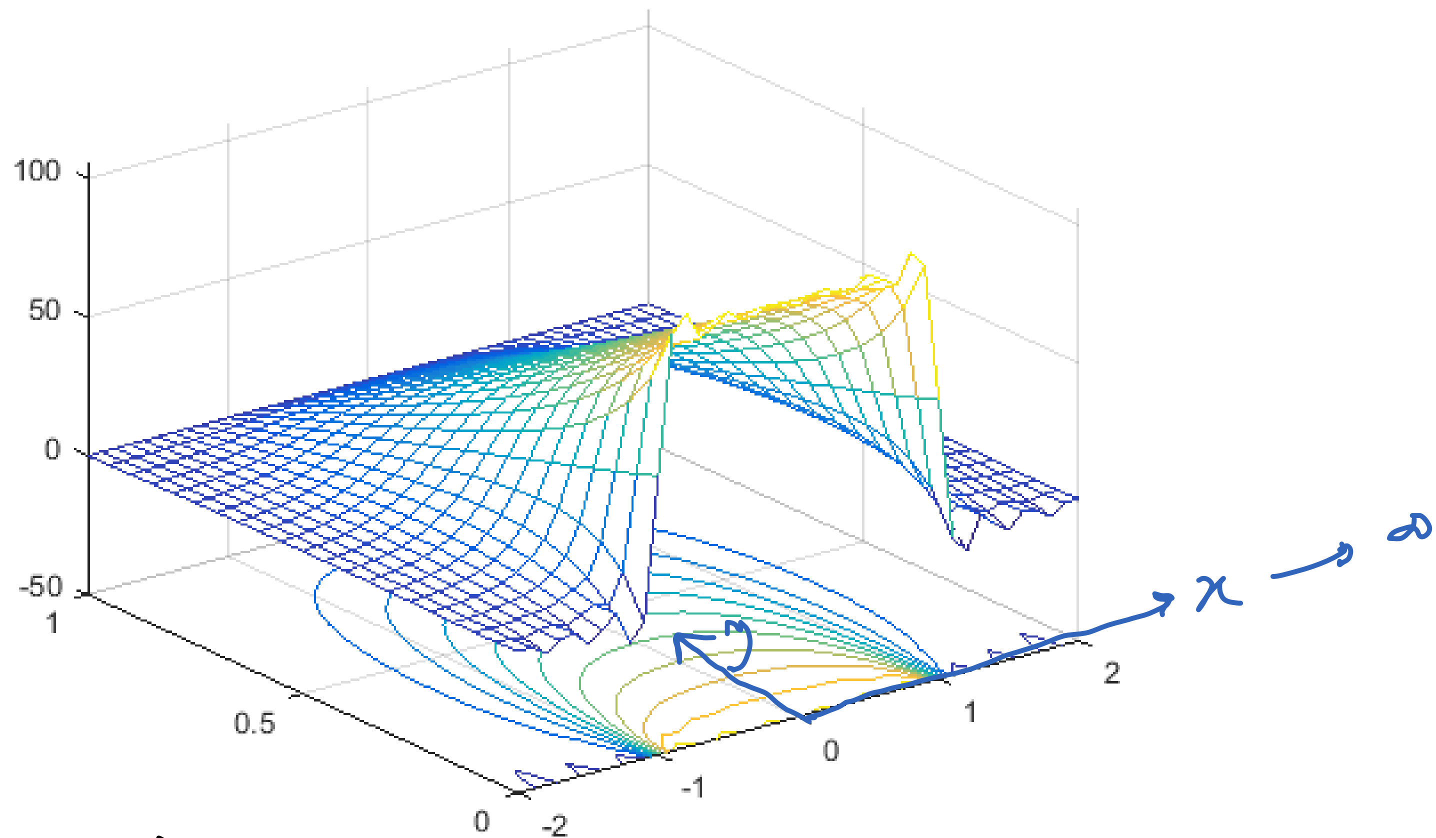


$$f(x) = \begin{cases} T_0 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

```
%Ex 8-16
clc
clear
syms w x y
f=100;
b=1;
h=1/(pi*sinh(-w*b));
Aw=h*int(f*cos(w*x),x,-1,1);
Bw=h*int(f*sin(w*x),x,-1,1);
i=0;j=0;
for x=-2:0.1:2
    j=0;
    i=i+1
    for y=0:0.05:b
     j=j+1
TT=int(sinh(w*(y-b))*(Aw*cos(w*x)+Bw*sin(w*x)),w,0,20);
T(i,j)=vpa(TT,3);
X(i,j)=x;
Y(i,j)=y;
    end
end
contour(X,Y,TT)
```


y
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
x
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0

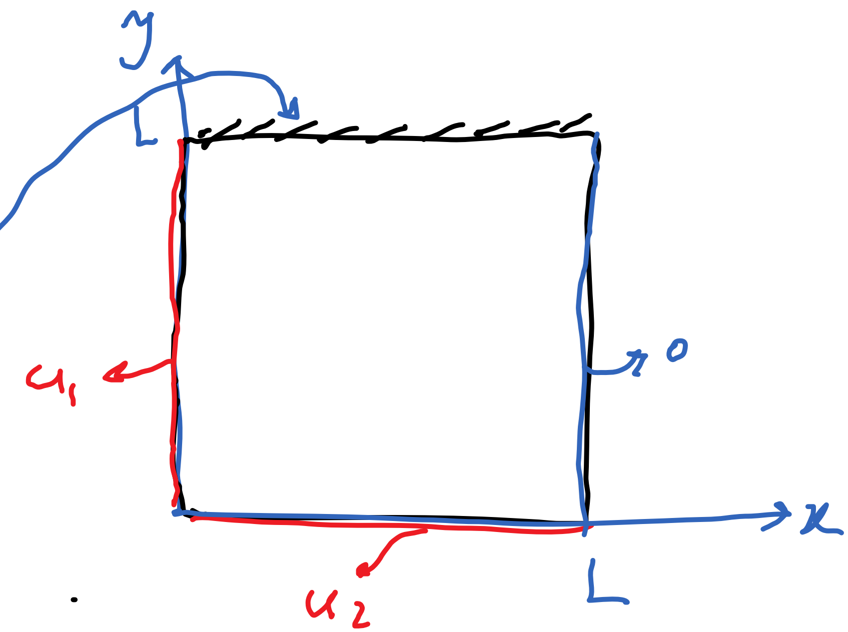
Contour



mesh(X,Y,TT)

مثال ۱۸-۸ هدایت گرمایی گذرا در صفحه مربعی با شرایط مرزی ناهمگن

$u_t = k(u_{xx}+u_{yy})$, $0<x<L$, $0<y<L$



BC: $u(0,y,t)=u_1(y,t)$, $u(l,y,t)=0$

$u(x,0,t)=u_2(x,t)$, $u_y(x,l,t)=0$

I.C. $u(x,y,0)=0$

$x \xrightarrow{F_s} n$ نسبت به x تبدیل فوریه سینوسی متناهی

$y \xrightarrow{F_c} m$ 〃 〃 y 〃 〃 کسینوسی 〃

$$u_t = k\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$$

$$\dot{U}(n,m,t) = k\Big\{ -\gamma_n^2 U(n,m,t) + \frac{2}{\ell}\gamma_n \Big[u(0,\cancelto{m}{y},t) + (-1)^{n+1} \cancelto{0}{u(\ell,m,t)} \Big]$$

$$-\lambda_m^2 U(n,m,t) + \sqrt{\frac{2}{\ell}} \Big[\lambda_m u(\cancelto{n}{x},0,t) - (-1)^n \cancelto{0}{u_y(n,\ell,t)} \Big] \Big\}$$

$$\Rightarrow \dot{U}(n,m,t) + k\left(\gamma_n^2 + \lambda_m^2\right) U(n,m,t) = \overbrace{\frac{2k}{\ell}\gamma_n \tilde{u}_1(m,t) + \sqrt{\frac{2}{\ell}}\, k \lambda_m \tilde{u}_2(n,t)}^{A(n,m,t)}$$

$$\tilde{u}_1(m) = F_b\left\{u_1(y)\right\} \quad , \qquad \gamma_n = \frac{n\pi}{\ell} \; , \quad \lambda_m = \frac{(2m-1)\pi}{2\ell}$$

$$\tilde{u}_2(n) = F_s\left\{u_2(x)\right\}$$

$$\dot{U}(n,m,t) + K(\gamma_n^2+\lambda_m^2)\,U(n,m,t) = A(n,m,t)$$

$$\Rightarrow U(n,m,t) = C_{nm}\,e^{-K(\gamma_n^2+\lambda_m^2)t} + \int_0^t A(n,m,t)\,e^{-K(\gamma_n^2+\lambda_m^2)(t-\tau)}\,d\tau$$

با فرض $A(n,m)$ تابعی از زمان نباشد

I.C. $U(x,y,0)=0 \longrightarrow C_{nm}=0$

$$\Rightarrow U(n,m,t) = \frac{A(n,m)}{K(\gamma_n^2+\lambda_m^2)}\Big[e^{-K(\gamma_n^2+\lambda_m^2)(t-\tau)}\Big]_0^t$$

$$= \frac{A(n,m)}{K(\gamma_n^2+\lambda_m^2)}\Big[1-e^{-K(\gamma_n^2+\lambda_m^2)t}\Big]$$

$$u(0,y,t) = u_1(y) \xrightarrow{IF_b} \tilde{u}_1(m) = u(0,m,t) = \int_0^l u_1(y)\sqrt{\frac{2}{l}}\sin(\lambda_m y)\,dy$$

با فرض $u_1(y) = u_1 = cte$

$$\tilde{u}_1(m) = u_1\sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \sin(\lambda_m y)\,dy = \sqrt{\frac{2}{l}}\,\frac{u_1}{\lambda_m}$$

$$u(x,0,t) = u_2(x) \xrightarrow{IF_s} \tilde{u}_2(n) = \frac{2}{l}\int_0^l u_2(x)\sin\gamma_n x\,dx$$

با فرض $u_2(x) = u_2 = cte$

$$\tilde{u}_2(n) = \frac{2u_2}{l}\int_0^l \sin\gamma_n x\,dx = \frac{2u_2}{l\gamma_n}\left[1+(-1)^{n+1}\right]$$

$$A(n,m) = \frac{2k}{l}\gamma_n \tilde{u}_1(m) + \sqrt{\frac{2}{l}}\, k \lambda_m \tilde{u}_2(n)$$

$$\Rightarrow A(n,m) = \frac{2k}{l}\gamma_n \sqrt{\frac{2}{l}}\, \frac{u_1}{\lambda_m} + \sqrt{\frac{2}{l}}\, k \lambda_m \frac{2u_2}{l\gamma_n}\left[1+(-1)^{n+1}\right]$$

$$\Rightarrow A(n,m) = 2\sqrt{\frac{2}{l}}\, k\left[\frac{u_1\gamma_n}{l\lambda_m} + \frac{u_2\lambda_m\left(1+(-1)^{n+1}\right)}{l\gamma_n}\right]$$

حال با دو بار تبدیل معکوس گرفتن از $v(n,m,t)$

$$v(x,m,t) = F_s^{-1}\left\{v(n,m,t)\right\}$$

$$u(x,y,t) = F_b^{-1}\left\{v(x,m,t)\right\}$$

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U(n,m,t) \sin(\gamma_n x) \frac{\sqrt{2}}{l} \sin(\lambda_m y)$$

که در آن

$$U(n,m,t) = \frac{A(n,m)}{k(\gamma_n^2+\lambda_m^2)} \left[1 - e^{-k(\gamma_n^2+\lambda_m^2)t} \right],$$

$$A(n,m) = 2\sqrt{\frac{2}{l}}\, k \left[\frac{u_1 \gamma_n}{l \lambda_m} + \frac{u_2 \lambda_m (1+(-1)^{n+1})}{l \gamma_n} \right],$$

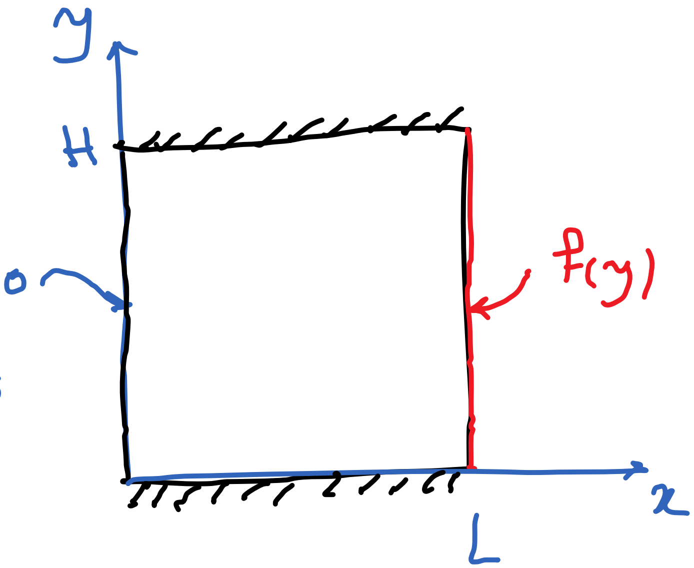
$u_1 = cte$

$u_2 = cte$

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \lambda_m = \frac{(2m-1)\pi}{2l}$$

مثال ۸ - ۱۹، هدایت گرمایی گذرا در صفحهٔ مستطیلی

$$u_{xx}+u_{yy}=a^2 u_t \quad , \quad 0<x<L, \quad 0<y<H$$



BC. $u_y(x,0,t)=u_y(x,H,t)=0 \rightarrow F_c$

$u(0,y,t)=0, \quad u(L,y,t)=f(y) \rightarrow F_s$

IC. $u(x,y,0)=g(x,y)$

در کتاب به روش جداسازی حل کرده، خودتان بخوانید.

در اینجا با روش تبدیل فوریه حل می‌کنیم.

$u_y(x,0,t)=u_y(x,H,t)=0 \rightarrow F_C$ ، تبدیل فوریه کسینوسی محدود نسبت به y $\Rightarrow y \rightarrow m$

$u(0,y,t)=0,\ u(L,y,t)=f(y) \rightarrow F_S$ ، 〃 〃 سینوسی محدود 〃 〃 x $\Rightarrow x \rightarrow n$

$$u_{xx}+u_{yy}=a^2u_t \ ,$$

$$-\lambda_n^2\,U(n,m,t)+\frac{2}{L}\lambda_n\Big[\cancelto{0}{U(0,m,t)}+\cancelto{F(m)}{(-1)^{n+1}U(L,m,t)}\Big]$$

$$-\gamma_m^2\,U(n,m,t)-\frac{2}{H}\Big[\cancelto{0}{U_y(n,0,t)}+\cancelto{0}{(-1)^{m+1}U_y(n,H,t)}\Big]=a^2\,\dot{U}(n,m,t)$$

$\lambda_n=\dfrac{n\pi}{L}$, $n=1,2,\dots$

$\gamma_m=\dfrac{m\pi}{H}$, $m=0,1,2,\dots$

$$\Rightarrow -\lambda_n^2 U(n,m,t) + \frac{2}{L}\lambda_n(-1)^{n+1}F(m) - \gamma_m^2 U(n,m,t) = a^2\dot{U}(n,m,t)$$

$$\Rightarrow a^2\dot{U} + (\lambda_n^2+\gamma_m^2)U = \frac{2}{L}\lambda_n(-1)^{n+1}F(m) = A(n,m)$$

$$F(m) = \mathcal{F}_c\{f(y)\} = \frac{2}{H}\int_0^H f(y)\cos\gamma_m y\,dy\,, \quad m=0,1,2,\dots$$

که در آن

$$\Rightarrow U(n,m,t) = C_{mn}\,e^{-(\lambda_n^2+\gamma_m^2)t} + \int_0^t A(n,m)\,e^{-(\lambda_n^2+\gamma_m^2)(t-\tau)}\,d\tau$$

IC. $u(x,y,0) = g(x,y) \longrightarrow C_{mn} = G(m,n)$

$$\text{IC.}\quad u(x,y,0) = g(x,y) \xRightarrow{F_c,\ F_s} U(n,m,0) = G(n,m)$$

که در آن

$$G(n,m) = \frac{2}{L}\frac{2}{H}\int_0^L\int_0^H g(x,y)\sin\lambda_n x \cos\gamma_m y \, dy\, dx$$

$$\Rightarrow C_{mn} = G(n,m)$$

حال با دوبار تبدیل فوریه معکوس داریم

$$u(x,y,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} U(n,m,t)\sin\lambda_n x \cos\gamma_m y$$

$$u(x,y,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}U(n,m,t)\sin\lambda_n x\cos\gamma_m y$$

$$\Rightarrow u(x,y,t)=$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{C_{mn}e^{-(\lambda_n^2+\gamma_m^2)t}+\int_0^t A(n,m)\,e^{-(\lambda_n^2+\gamma_m^2)(t-\tau)}\,d\tau\right\}\sin\lambda_n x\cos\gamma_m y$$

مثال ۲۱-۸ توزیع دمای پایدار در مکعب (حالت سه بعدی)

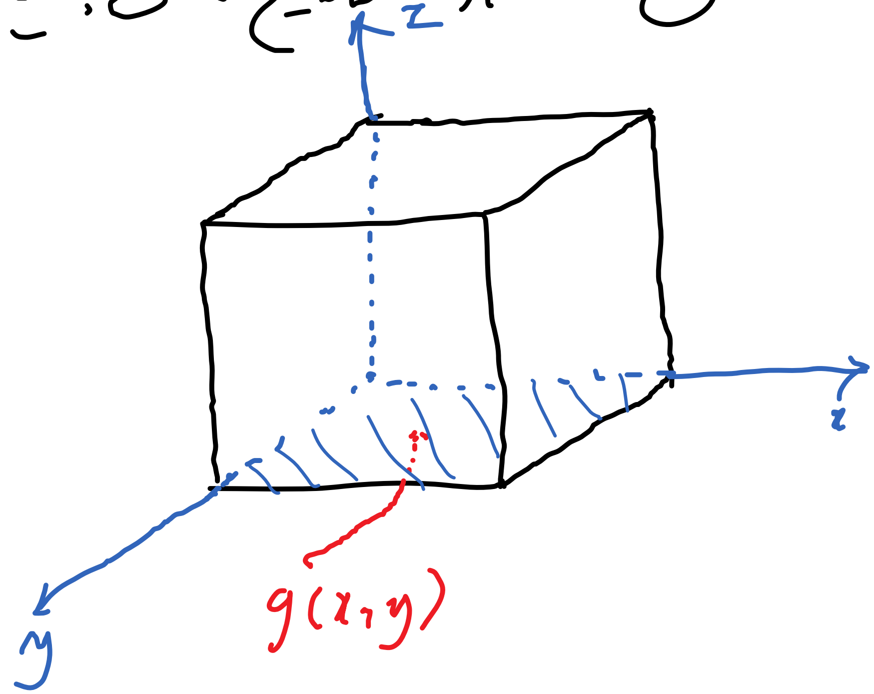
$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

$$0<x<\pi, \quad 0<y<\pi, \quad 0<z<\pi$$

B.C. $u(0,y,z) = u(\pi,y,z) = 0$

$u(x,0,z) = u(x,\pi,z) = 0$

$u(x,y,0) = g(x,y), \quad u(x,y,\pi) = 0$



با روش جداسازی

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$$

$$u(x,y,z)=X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

$$\Rightarrow X''YZ+XY''Z+XYZ''=0 \;\xRightarrow{\frac{1}{XYZ}}\; \frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}+\frac{Z''}{Z}=0$$

$$\Rightarrow \frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=-\frac{Z''}{Z}$$

$$\frac{X''}{X}=-n^2 \longrightarrow X''+n^2X=0 \Rightarrow X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{\pi}=\sin nx$$

$$X(0)=X(\pi)=0$$

اگر $\frac{X''}{X}=n^2$ ← به جواب بدیهی می‌رسیم

$$\frac{Y''}{Y} = -m^2 \longrightarrow Y'' + m^2 Y = 0 \longrightarrow Y_m(y) = \sin my$$

$$Y(0) = Y(\pi) = 0$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} \Rightarrow -n^2 - m^2 = -\frac{Z''}{Z}$$

$$\frac{X''}{X} \rightarrow -n^2 \qquad \frac{Y''}{Y} \rightarrow -m^2$$

$$\Rightarrow Z'' - (n^2 + m^2) Z = 0 \Bigg) \Rightarrow Z(z) = \sinh \lambda_{nm} (\pi - z)$$

$$Z(0) = g(x, y)$$

$$Z(\pi) = 0$$

$$\lambda_{nm}^2 = n^2 + m^2$$ که در آن

نهایتاً پاسخ عمومی به صورت زیر خواهد شد

$$u(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm} \sinh \lambda_{nm}(\pi - z) \sin nx \sin my$$

با اعمال شرط مرزی دیگر

$$u(x,y,0) = g(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\alpha_{nm} \sinh \lambda_{nm}\pi} \sin nx \sin my$$

$$\Rightarrow \alpha_{nm} \sinh \lambda_{nm}\pi = \frac{2}{\pi}\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} g(x,y) \sin nx \sin my \, dx\, dy$$

$$\Rightarrow \alpha_{nm} = \checkmark$$

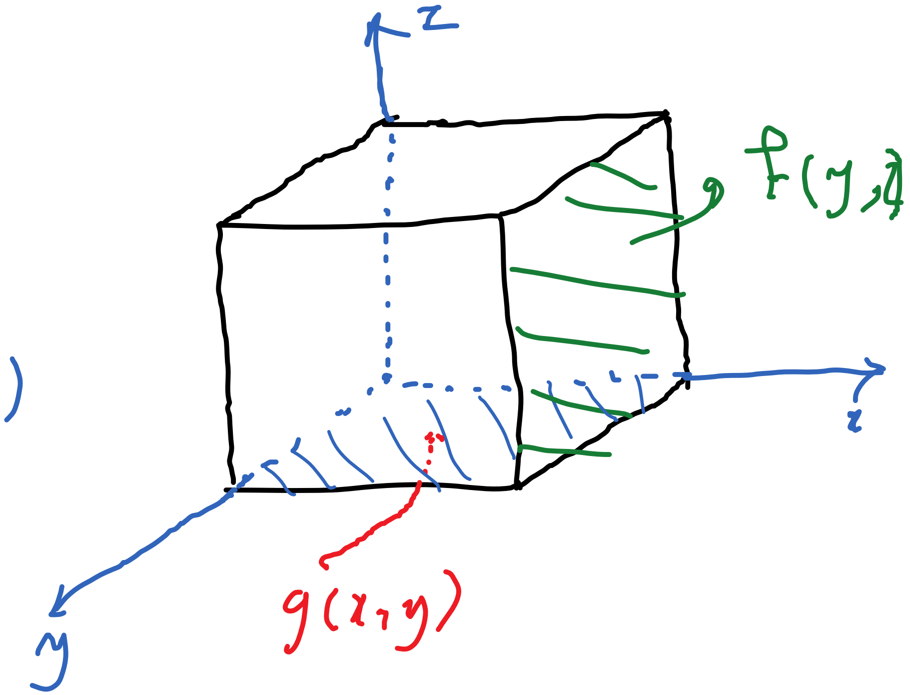
$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

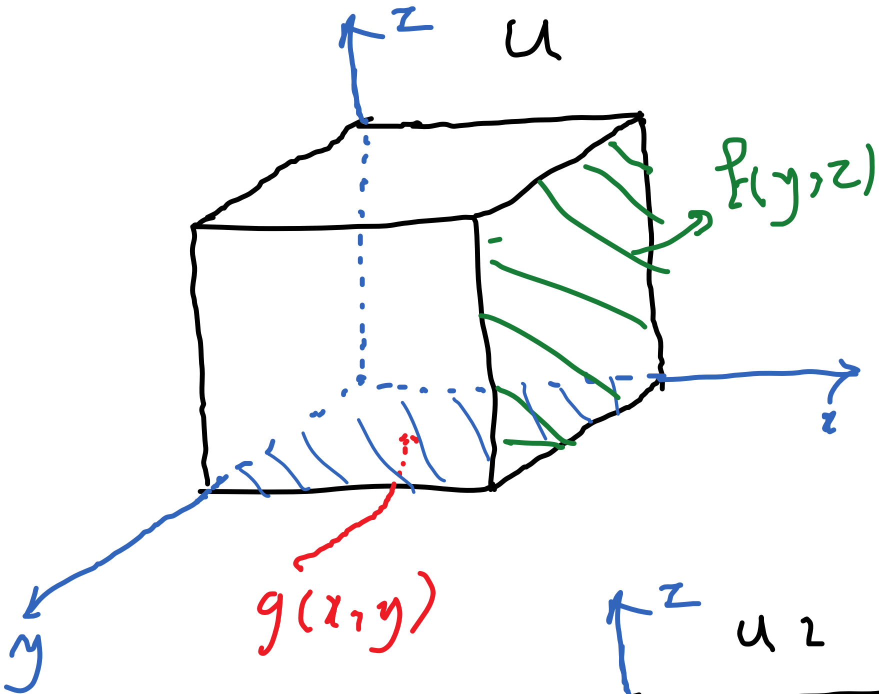
$$0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \quad 0 < z < \pi$$

B.C. $u(0,y,z) = 0$, $u(\pi,y,z) = f(y,z)$

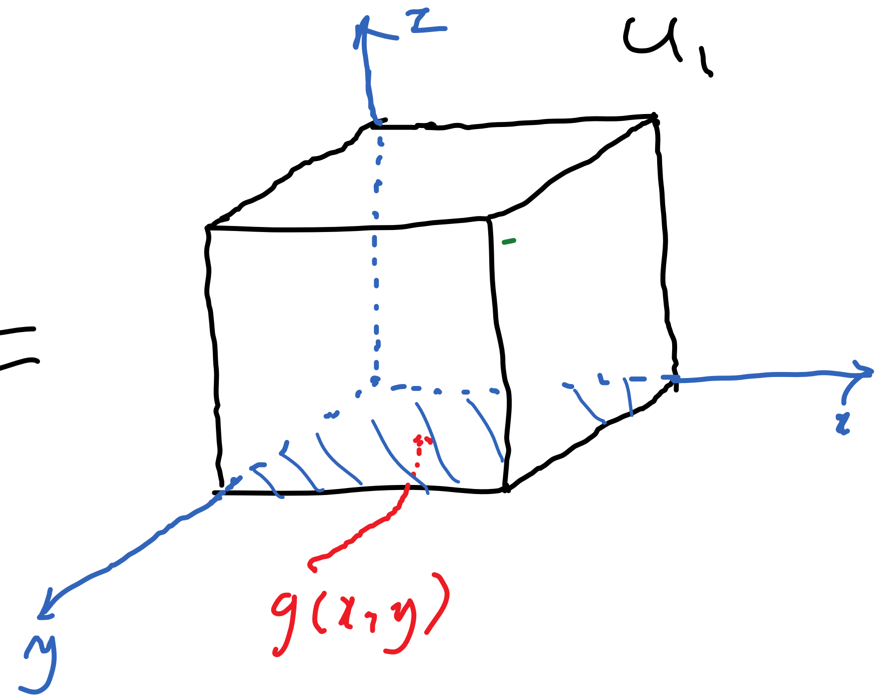
$u(x,0,z) = 0$, $u(x,\pi,z) = 0$

$u(x,y,0) = g(x,y)$, $u(x,y,\pi) = 0$

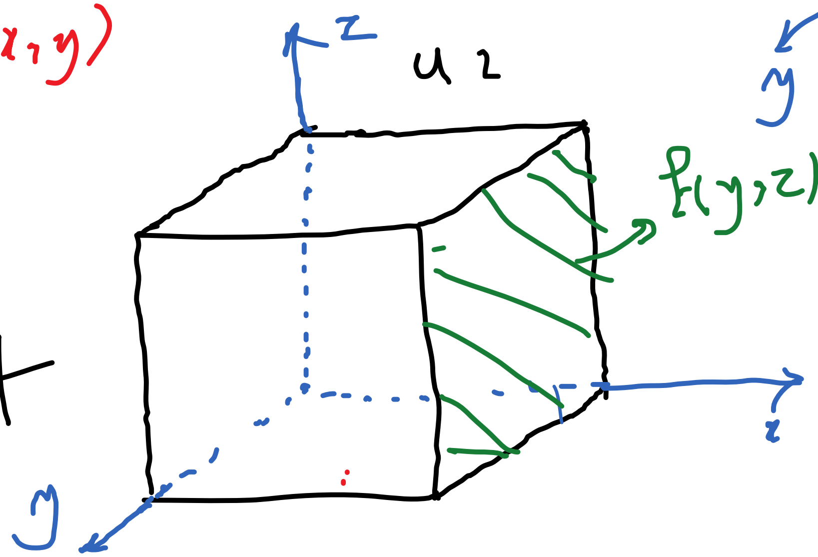




=



+



$$u(x,y,z) = u_1(x,y,z) + u_2(x,y,z)$$

مقادیر و توابع ویژه برای شرایط مختلف مرزی دیریکله و نیومن - بازه متناهی

7

معادله $X'' + \lambda X = 0$ در بازه متناهی

حالت	شرایط مرزی	مقدار ویژه ($\lambda_n = {\alpha_n}^2$)	تابع ویژه	دوره تناوب تابع ویژه
۱	$X(0) = 0; X(l) = 0$ $0 \le x \le l$	$\alpha_n = \dfrac{n\pi}{l}\ ; n = 1,2, \dots$	$\phi_n = \sin(\alpha_n x)$	$2l$
۲	$X'(0) = 0; X'(l) = 0$ $0 \le x \le l$	$\alpha_n = \dfrac{n\pi}{l}\ ; n = 0,1, \dots$	$\phi_n = \cos(\alpha_n x)$	$2l$
۳	$X(0) = 0; X'(l) = 0$ $0 \le x \le l$	$\alpha_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2l}\ ; n = 1,2, \dots$	$\phi_n = \sin(\alpha_n x)$	$4l$
۴	$X'(0) = 0; X(l) = 0$ $0 \le x \le l$	$\alpha_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2l}\ ; n = 1,2, \dots$	$\phi_n = \cos(\alpha_n x)$	$4l$
۶	$X(-l) = X(l); X'(-l) = X'(l)$ $-l \le x \le l$	$\alpha_n = \dfrac{n\pi}{l}\ ; n = 0,1, \dots$	$\begin{cases} \phi_n = \sin(\alpha_n x)\ ; n \neq 0 \\ \phi_n = \cos(\alpha_n x) \end{cases}$	$2l$

مقادیر و توابع ویژه برای شرایط مختلف مرزی دیریکله و نیومن - بازه نامتناهی

8

معادله $X'' + \lambda X = 0$ در بازه نامتناهی

حالت	شرایط مرزی	مقدار ویژه $(\lambda = a^2)$	تابع ویژه
۱	$X(0) = 0; \lvert X(\infty) \rvert < M$ $0 \leq x < \infty$	$\forall\, \alpha > 0$	$\phi = \sin(\alpha x)$
۲	$X'(0) = 0; \lvert X(\infty) \rvert < M$ $0 \leq x < \infty$	$\forall\, \alpha \geq 0$	$\phi = \cos(\alpha x)$
۳	$\lvert X(\pm\infty) \rvert < M$ $-\infty < x < \infty$	$\forall\, \alpha \geq 0$	$\begin{cases} \phi = \sin(\alpha x)\,;\, \alpha \neq 0 \\ \phi = \cos(\alpha x) \end{cases}$