کنترل اتوماتیک

تحلیل پاسخ فرکانسی
نمودار قطبی، نمودار نایکوئیست، بخش اول

دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

Polar Plots, Nyquist Plot

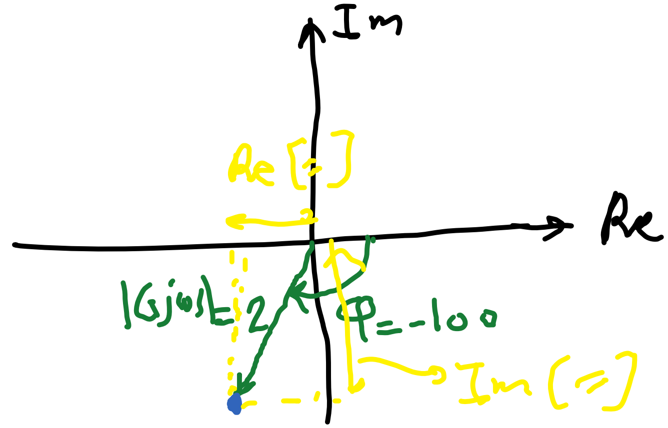
نمودارهای نایکوئیست یک نحوه دیگر از نمایش پاسخ فرکانسی سیستم می باشند.

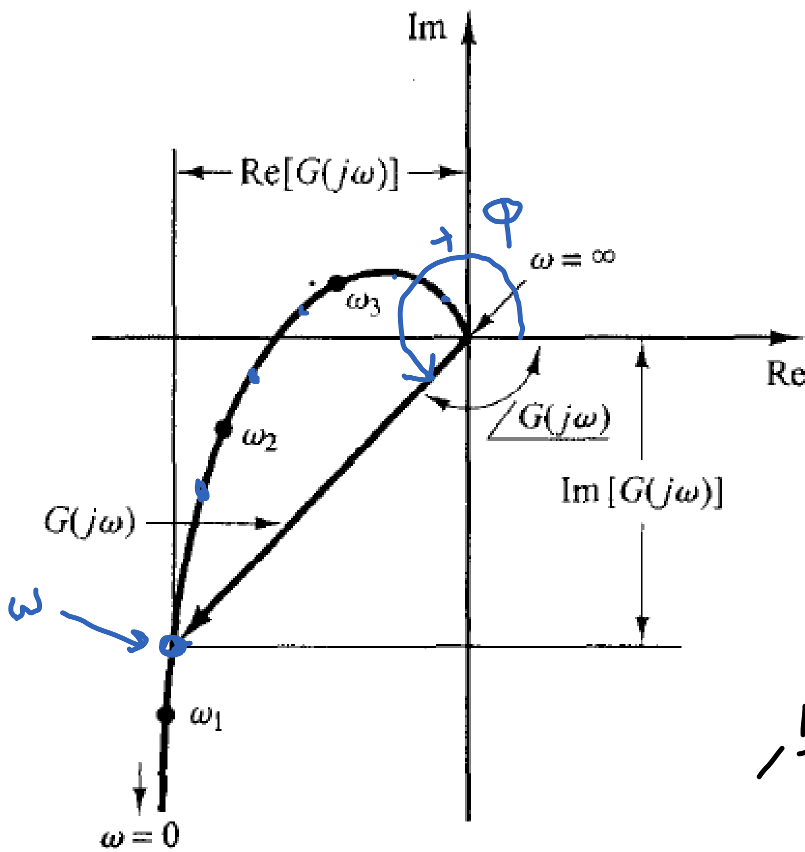
$$\sin \omega t \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow y_{ss} = \underline{|G(j\omega)|} \sin(\omega t + \underline{\varphi})$$

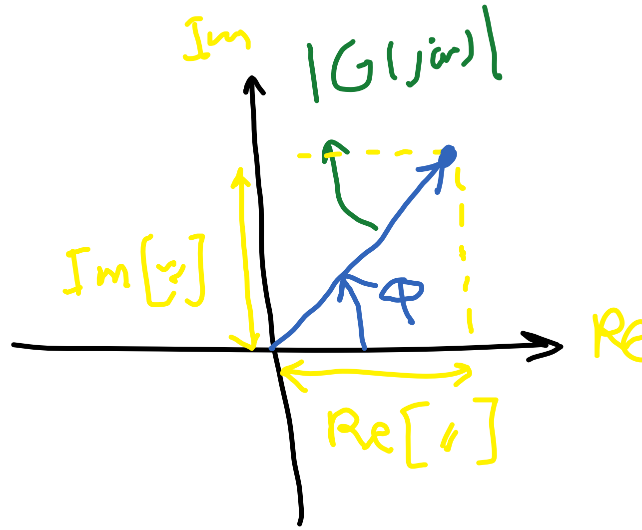
تابع موهومی

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi} = Re[G(j\omega)] + Im[G(j\omega)] j$$

$$\omega_1 = 0.1 \rightarrow \begin{cases} |G(j\omega_1)| = 2 \\ \varphi = \angle G(j\omega_1) = -100^\circ \end{cases}$$







φ در جهت CCW مثبت است

در نمودار قطبی، هر دو مقدار دامنه و فاز در یک نمودار نشان داده می‌شوند

تقسیم بندی های محورها هم خطی است.

$m=1$

$n=3$ $\to n-m=2 \xrightarrow{\omega\to\infty} \varphi=-180$

$|\ |\to 0$

مثال: نمودار نایکوئیست تابع زیر را رسم کنید.

$$G(s)=\frac{20(s+5)}{s(s+3)(s+1)} \longrightarrow G(j\omega)=\frac{20(j\omega+5)}{j\omega(j\omega+3)(j\omega+1)}$$

محاسبه $|G(j\omega)|$، φ، $Re[\,]$، $Im[\,]$

$$|G(j\omega)|=\frac{20|j\omega+5|}{|j\omega||j\omega+3||j\omega+1|}=\frac{20\sqrt{\omega^2+25}}{\omega\sqrt{\omega^2+9}\sqrt{\omega^2+1}}$$

$tg^{-1}\frac{\omega}{0}=tg^{-1}\infty=90$

$$\varphi=\angle G(j\omega)=\angle 20+\angle(j\omega+5)-\angle j\omega-\angle(j\omega+3)-\angle(j\omega+1)$$

$$\Rightarrow \varphi=tg^{-1}\omega/5-90-tg^{-1}\omega/3-tg^{-1}\omega$$

$$G(j\omega) = \frac{20(j\omega+5)}{j\omega(j\omega+3)(j\omega+1)} \times \frac{-j\omega(-j\omega+3)(-j\omega+1)}{-j\omega(-j\omega+3)(-j\omega+1)}$$

محاسبه این عبارت مهمترین نقش را در رسم نمودار نایکوئیست است

$$= \frac{-20\omega^2(\omega^2+17) + 20\omega(\omega^2-15)j}{\omega^2(9+\omega^2)(1+\omega^2)}$$

$j^2 = -1$

$j^3 = -j$

در مخرج نباید منفی داشته باشیم

$$-j\omega(-j\omega+3) = (-\omega^2 - 3j\omega)(-j\omega+1) =$$

$$= j\omega^3 - \omega^2 - 3\omega^2 - 3j\omega = (j\omega^3 - 4\omega^2 - 3j\omega)(j\omega+5)$$

$$= -\omega^4 + 5j\omega^3 - 4j\omega^3 - 20\omega^2 + 3\omega^2 - 15j\omega = (-\omega^4 - 17\omega^2) + (\omega^3 - 15\omega)j$$

$$G(j\omega) = \frac{-20\omega^2(\omega^2+17) + 20\omega(\omega^2-15)j}{\omega^2(9+\omega^2)(1+\omega^2)}$$

$$Re[G(j\omega)] = \frac{-20\cancel{\omega^2}(\omega^2+17)}{\cancel{\omega^2}(9+\omega^2)(1+\omega^2)} = \frac{-20(\omega^2+17)}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}$$

$$Im[G(j\omega)] = \frac{20\omega(\omega^2-15)j}{\omega^2(9+\omega^2)(1+\omega^2)} = \frac{20(\omega^2-15)j}{\omega(\omega^2+9)(\omega^2+1)}$$

$$Re[\,''\,] = \frac{-20(\omega^2+17)}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}$$

$$\varphi = tg^{-1}\omega/5 - 90 - tg^{-1}\omega/3 - tg^{-1}\omega$$

$$Im[\,''\,] = \frac{20(\omega^2-15)}{\omega(\omega^2+9)(\omega^2+1)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{20\sqrt{\omega^2+25}}{\omega\sqrt{\omega^2+9}\sqrt{\omega^2+1}}$$

$\omega \rightarrow 0^+$

$$Re[G(j\omega)]_{\omega\rightarrow 0^+} = -\frac{20\times 17}{9}$$

$$-\frac{20\times 15}{0} \rightarrow Im[\,''\,] = -\infty$$

$$|G(j\omega)| = \infty$$

$$\varphi = 0 - 90 - 0 - 0 = -90$$

$\omega \rightarrow +\infty$

$$Re[\,''\,] = 0^-$$

$$Im[\,''\,] = 0^+$$

$$|G(j\omega)| = 0$$

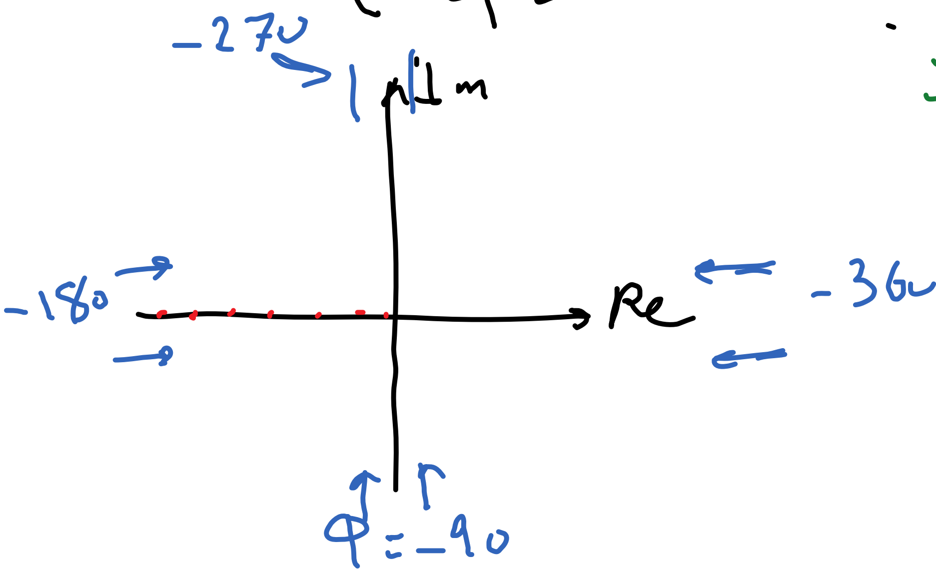
$$\varphi = 90 - 90 - 90 - 90 = -180$$

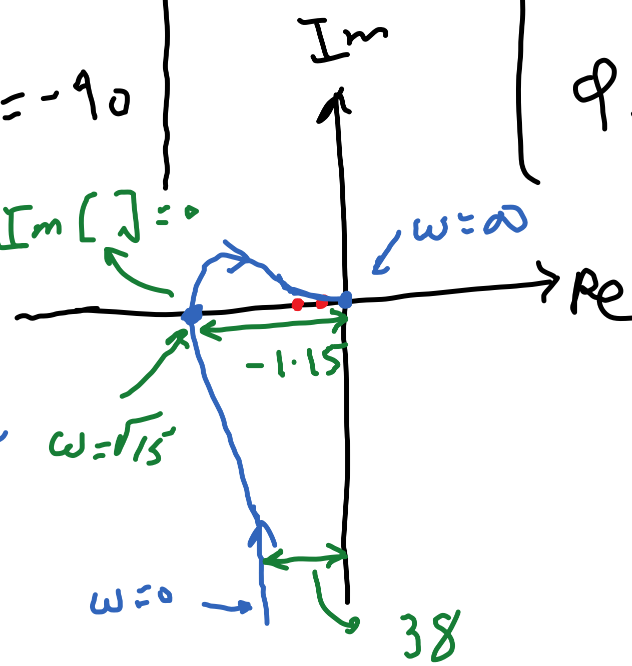
$\omega \to 0^+$

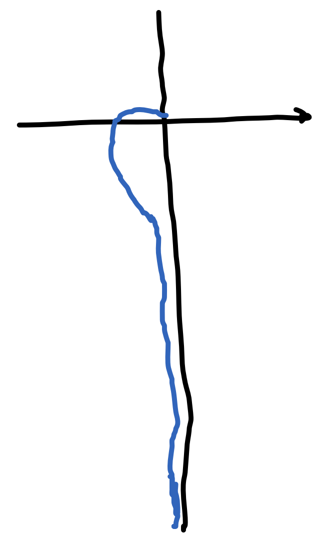
$$\begin{cases} \mathrm{Re}[G(j\omega)]_{\omega \to 0^+} = -\dfrac{20 \times 17}{9} \simeq -38 \\ \mathrm{Im}[\;''\;] = -\infty \\ |G(j\omega)| = \infty \\ \varphi = 0 - 90 - 0 - 0 = -90 \end{cases}$$

$\omega \to +\infty$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[\;''\;] = 0^- \\ \mathrm{Im}[\;''\;] = 0^+ \\ |G(j\omega)| = 0 \\ \varphi = 90 - 90 - 90 - 90 = -180 \end{cases}$$







تعیین محل برخورد با محور حقیقی

$$\mathrm{Im}[G(j\omega)] = 0$$

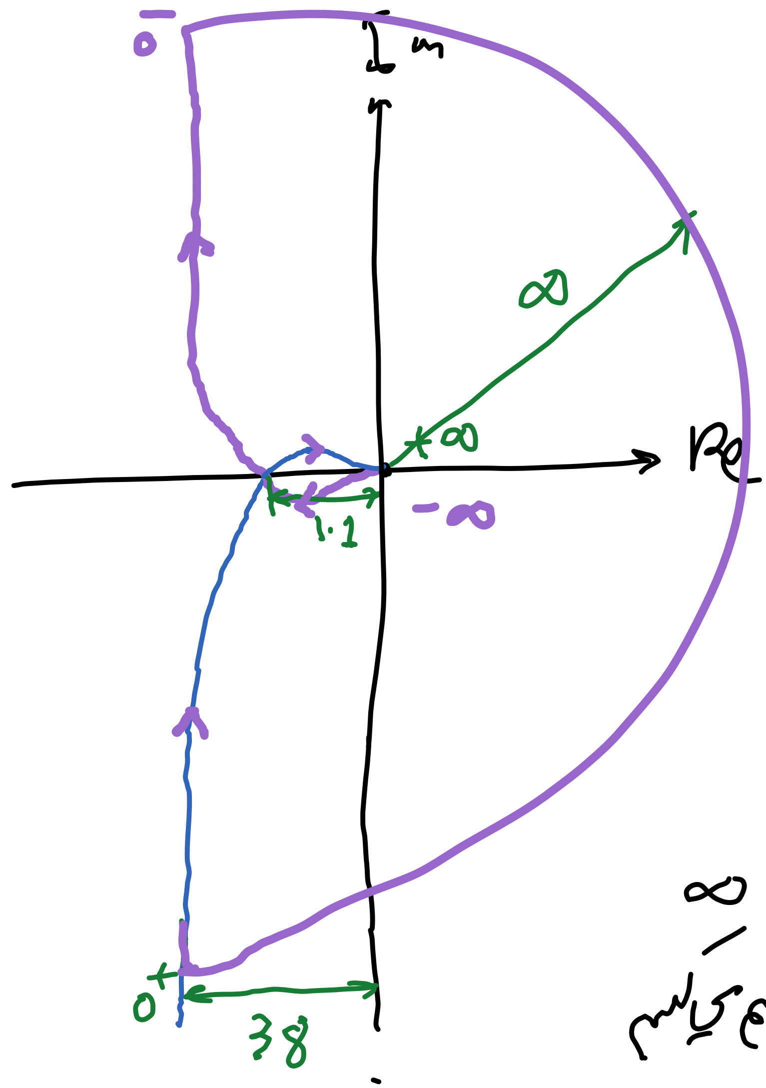
$$\mathrm{Im}[\,] = \frac{20(\omega^2 - 15)}{\omega(\omega^2+9)(\omega^2+1)} = 0 \Rightarrow \omega^2 - 15 = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{15} \checkmark$$

حقیقی

$$\omega^2 + 15 = 0 \rightarrow$$ ω جذر ندارد

$$\mathrm{Re}[\,] = \frac{-20(\omega^2+17)}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}\Bigg|_{\omega=\sqrt{15}} = \frac{-20(15+17)}{(15+9)(15+1)} = \frac{-20 \times 32}{24 \times 16}$$

$$= -1.15$$



$G(j\omega)$

$G(-j\omega)$

قرینه نمودار $G(j\omega)$ نسبت به محور Re

مرحله آخر تحلیل نمودار نایکوئیست،

اگر نمودار نایکوئیست یک نمودار باز باشد،

از 0^- به 0^+ یک دایره به شعاع ∞

در جهت عقربه‌های ساعت رسم می‌کنیم

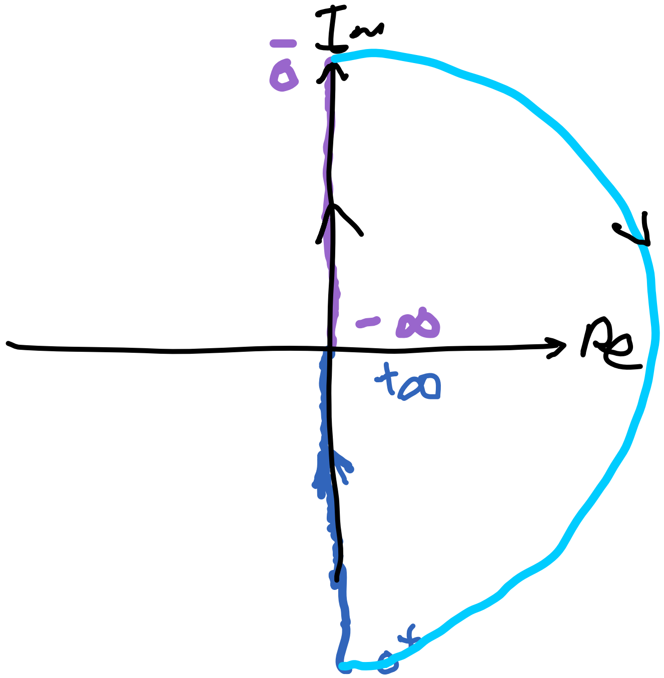
پایداری

$$G(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}, \quad \varphi = -90$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \times \frac{-j\omega}{-j\omega} = \frac{-j\omega}{\omega^2} = \frac{-j}{\omega}$$

$$\mathrm{Im}[G(j\omega)] = \frac{-1}{\omega}$$

$$\mathrm{Re}[\;\;] = 0$$



$$\omega \to 0^+ \left| \begin{array}{l} \mathrm{Im}[\;\;] = -\infty \\ \mathrm{Re}[\;\;] = 0 \end{array} \right.$$

$$\omega \to +\infty \left| \begin{array}{l} \mathrm{Im}[\;\;] = 0^- \\ \mathrm{Re}[\;\;] = 0 \end{array} \right.$$

سیستم مرتبه اول

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1} \longrightarrow G(j\omega) = \frac{1}{T\omega j+1}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}} \quad , \quad \varphi = -tg^{-1}T\omega$$

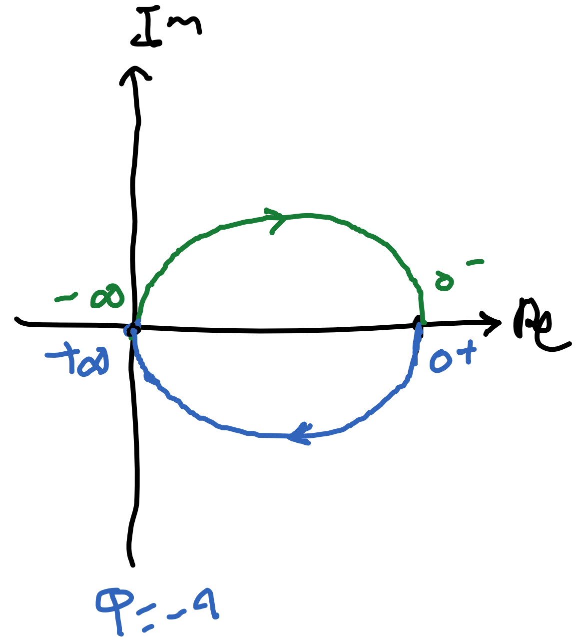
$$G(j\omega) = \frac{1}{T\omega j+1} \times \frac{-T\omega j+1}{-T\omega j+1} = \frac{-T\omega j+1}{T^2\omega^2+1}$$

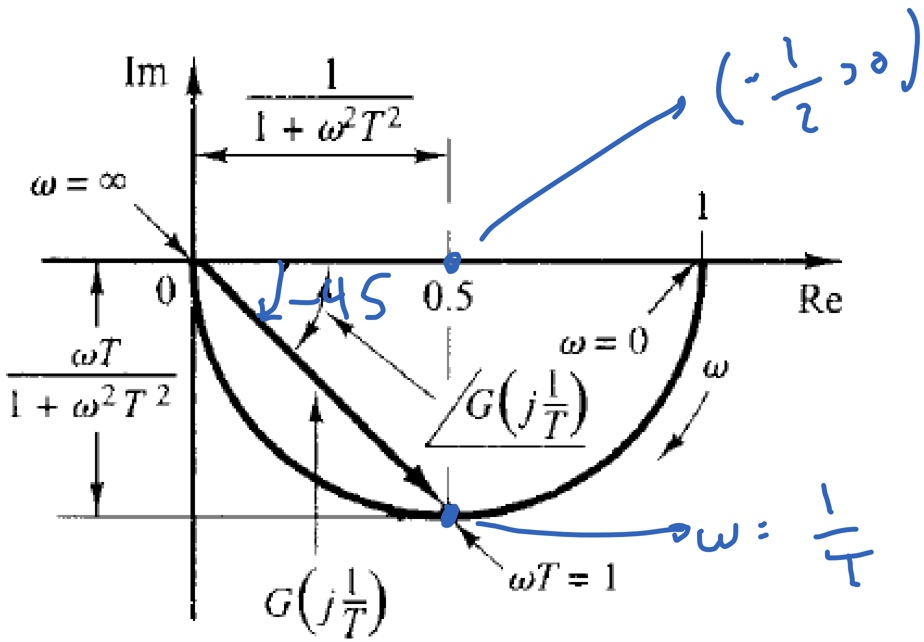
$$Re[\sim] = \frac{1}{T^2\omega^2+1} \quad , \quad Im[\sim] = \frac{-T\omega}{T^2\omega^2+1}$$

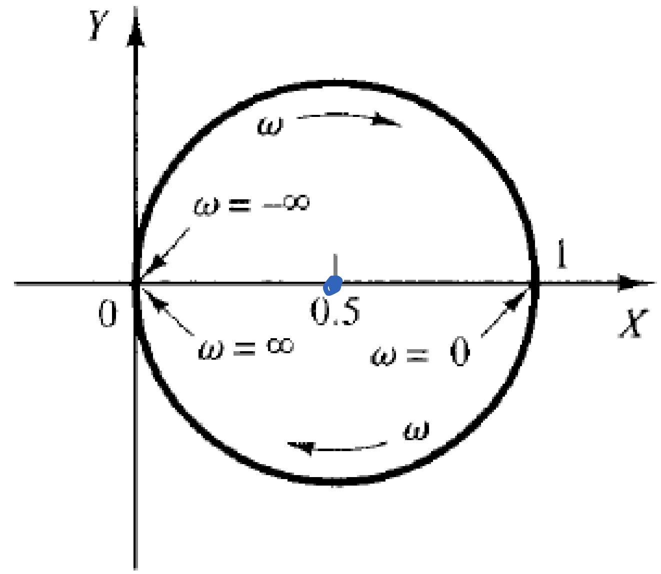
$$Re[\;] = \frac{1}{T^2\omega^2+1} \quad , \quad Im[\;] = \frac{-T\omega}{T^2\omega^2+1}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}} \quad , \quad \varphi = -tg^{-1}T\omega$$

$$\omega \to 0^+ \begin{cases} Re[\;] = 1 \\ Im[\;] = 0^- \\ \varphi = 0 \end{cases} \qquad \omega \to +\infty \begin{cases} Re[\;] = 0^+ \\ Im[\;] = 0^- \\ \varphi = -90 \end{cases}$$







$$\varphi = -tg^{-1} T\omega \rightarrow \omega T = 1 \rightarrow \varphi = -45$$

$$\rightarrow \omega = \frac{1}{T}$$

$$X = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} = \text{real part of } G(j\omega)$$

$$Y = \frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = \text{imaginary part of } G(j\omega)$$

obtain

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{1}{2}\frac{1 - \omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

R^2

شعاع دایره

$G(s) = Ts + 1$

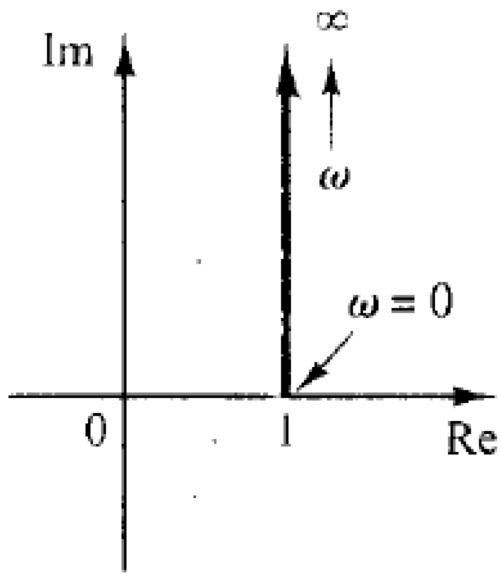


Figure 8–28
Polar plot of
$1 + j\omega T$.

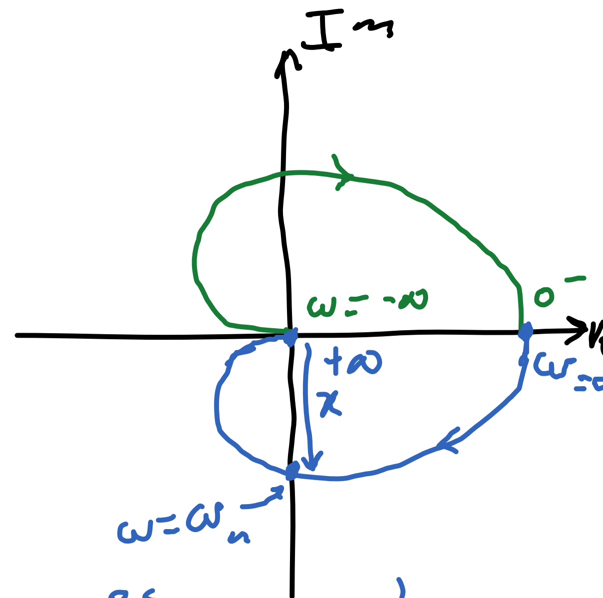
$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\xi s}{\omega_n} + 1} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\xi j\omega}{\omega_n} + 1}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + \frac{2\xi\omega}{\omega_n} j} \quad , \quad \varphi = -tg^{-1} \frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + \frac{2\xi\omega}{\omega_n} j} \times \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) - \frac{2\xi\omega}{\omega_n} j}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) - \frac{2\xi\omega}{\omega_n} j}$$

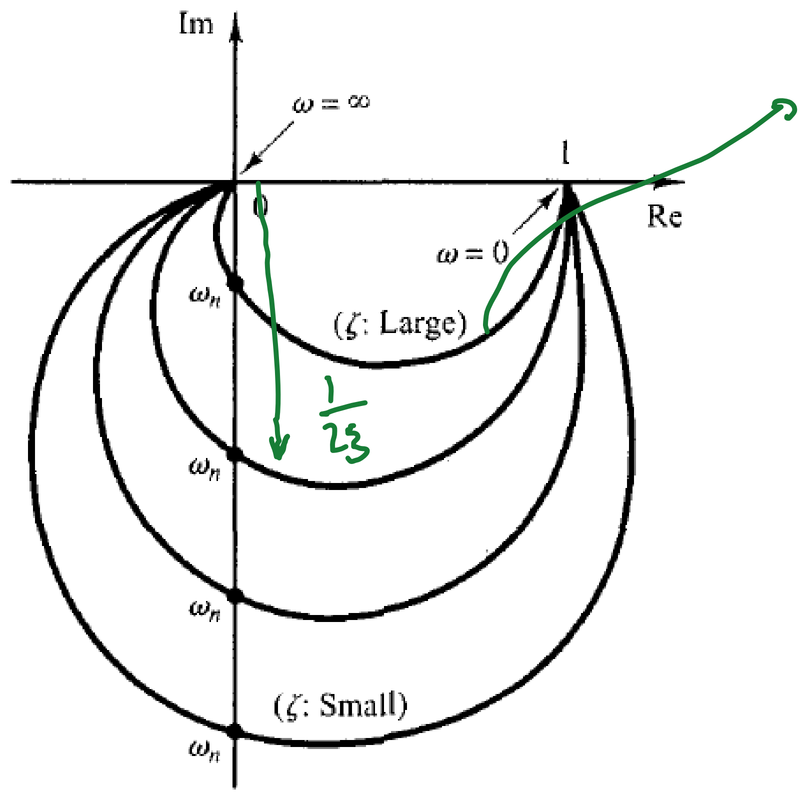
$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + \frac{2\xi\omega}{\omega_n} j} \times \frac{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) - \frac{2\xi\omega}{\omega_n} j}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) - \frac{2\xi\omega}{\omega_n} j} = \frac{\overbrace{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}^{Re} - \overbrace{\frac{2\xi\omega}{\omega_n} j}^{Im}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\omega \to 0^+ \begin{cases} Re[\,\cdot\,] = 1 \\ Im[\,\cdot\,] = 0^- \\ \varphi = 0 \end{cases} \qquad \omega \to +\infty \begin{cases} Re[\,\cdot\,] = 0^- \\ Im[\,\cdot\,] = 0^- \\ \varphi = -180 \end{cases}$$

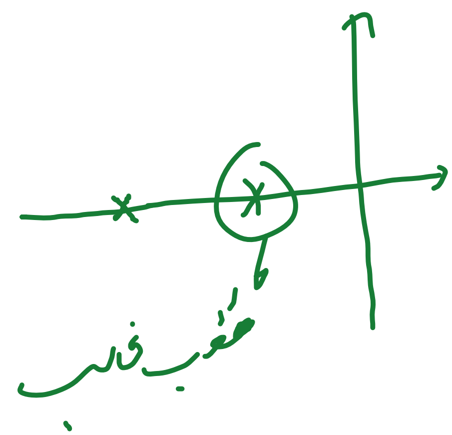


$$\omega = \omega_n \to \varphi = -90 \quad , \quad Re[\,\cdot\,] = 0 \to \omega = \omega_n$$

$$x = \frac{-2\xi}{(2\xi)^2} = \frac{-1}{2\xi}$$



ζ بزرگ معادل به
سیستم مرتبه 1 نزدیک می‌شود



کنترل اتوماتیک

تحلیل پاسخ فرکانسی

نمودار قطبی، نمودار نایکوئیست، بخش دوم

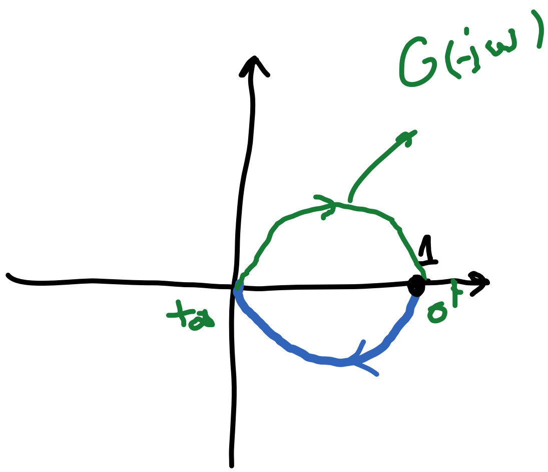
دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

anikoobin@semnan.ac.ir

نمودار نایکوئیست سیستم‌های نوع صفر

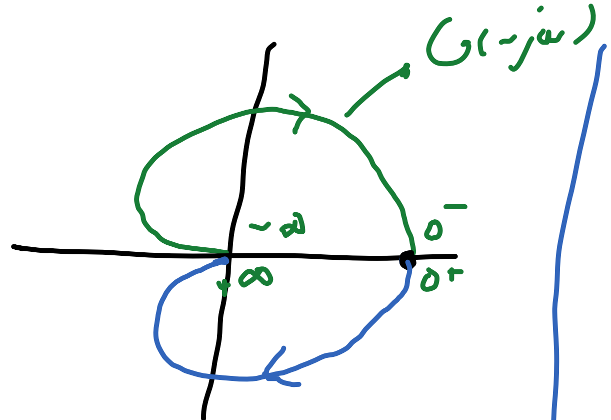
$N=0$



$$G_1(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

$$G_1(0j) = 1\angle 0$$

$$G_1(\infty j) = 0\angle -90$$

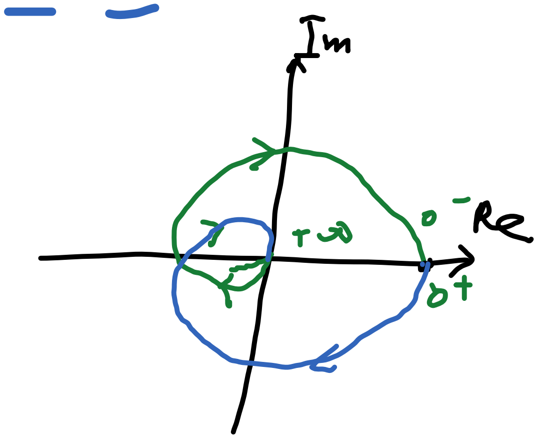


$$\omega \to 0 \Rightarrow G(j\omega) = 1\angle 0$$

$$G_2(s) = \frac{1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$

$$\varphi = -tg^{-1} T_1\omega - tg^{-1} T_2\omega$$

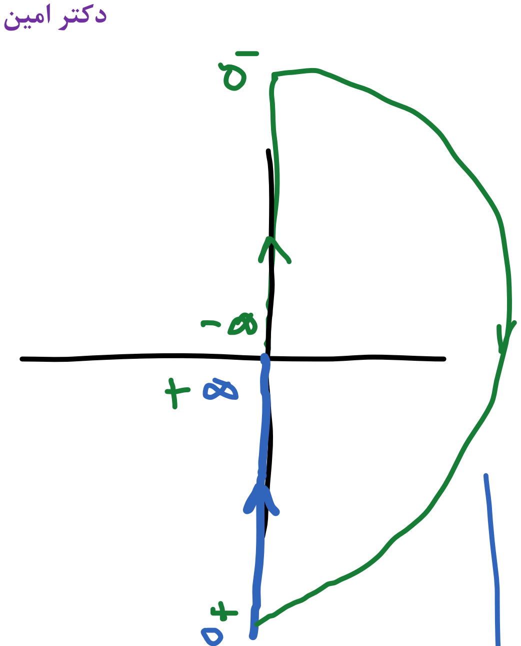
$$\omega \to \infty \Rightarrow G(j\omega) = 0\angle -180$$



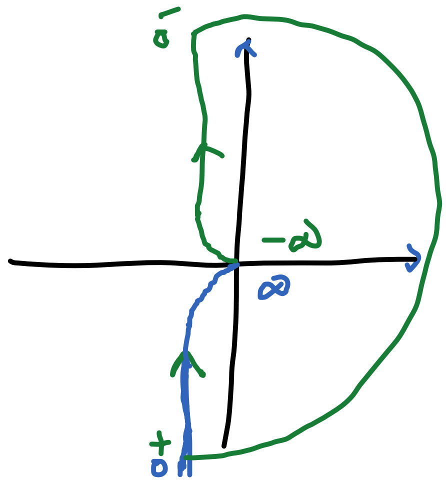
$$G_3(s) = \frac{1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$$

$$G_3(0j) = 1\angle 0$$

$$G_3(\infty j) = 0\angle -270$$



$$G_1(s) = \frac{1}{s}$$



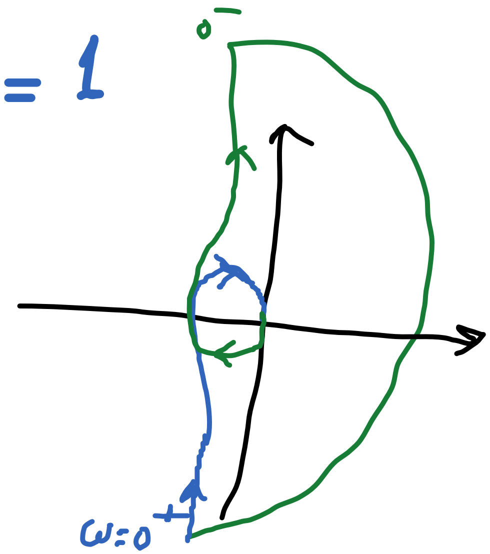
$$G_2(s) = \frac{1}{s(T_2 s+1)}$$

$$|G_2(j\omega)| = \frac{1}{\omega\sqrt{T_2\,\omega^2+1}}$$

$$\angle G(j\omega) = -90 - tg^{-1} T_1\omega$$

$$G(\infty j) = 0\angle -180, \quad G(0j) = \infty\angle -90$$

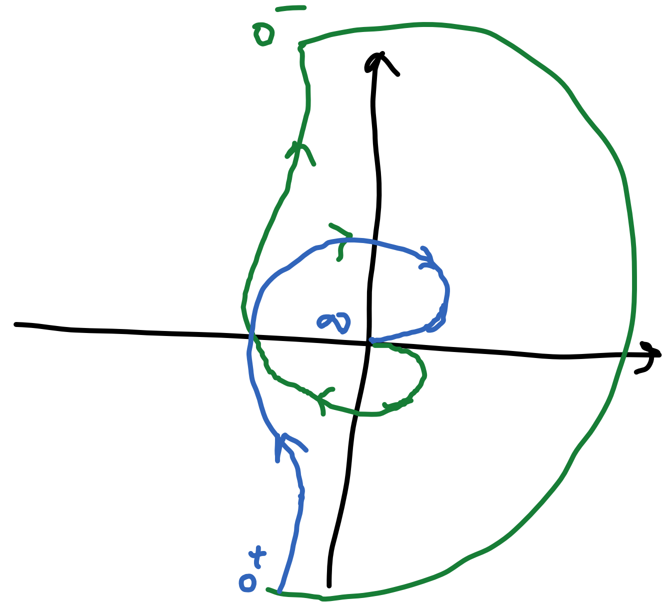
$n = 1$



$$G_3(s) = \frac{1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$

$$G_3(0j^+) = \infty\angle -90$$

$$G_3(\infty j) = 0\angle -270$$



$$G_4(s) = \frac{1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$$

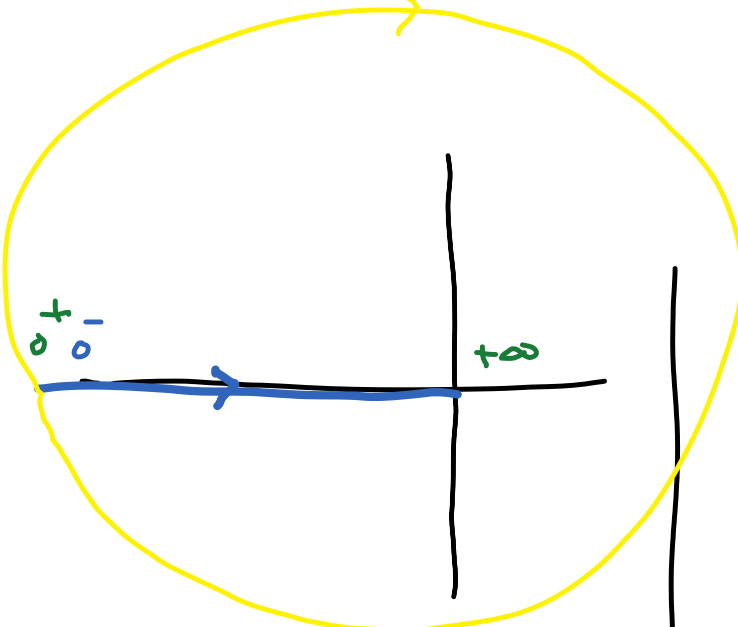
$$G(0j) = \infty \angle -90$$

$$G(\infty j) = 0 \angle -360$$

$$\angle G(j\omega) = -90 - tg^{-1} T_1\omega - tg^{-1} T_2\omega - tg^{-1} T_3\omega$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega\sqrt{T_1^2\omega^2+1}\sqrt{T_2^2\omega^2+1}\sqrt{T_3^2\omega^2+1}}$$

$$N = 2$$



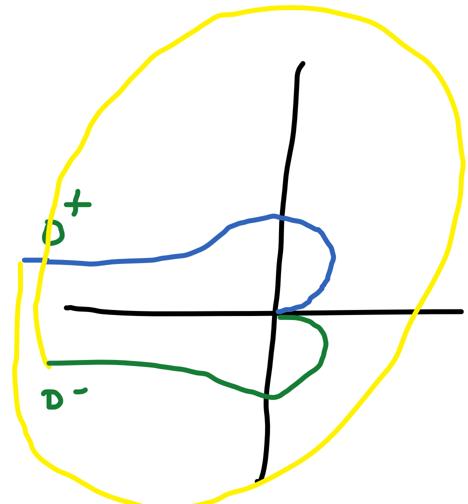
$$G_1(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$G(0j^+) = \infty \angle -180$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2(T_1 s + 1)}$$

$$\angle G_2(j\omega) = -90 - 90 - tg^{-1} T_1 \omega$$

$$G(\infty j) = 0 \angle -270$$



$$G_3(s) = \frac{1}{s^2(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

اصول و قواعد کلی رسم نمودار نایکوئیست،

$$G(s) = \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{s^{\lambda}(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots}$$

General Shapes of Polar Plots. The polar plots of a transfer function of the form

$$G(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega T_a)(1 + j\omega T_b)\cdots}{(j\omega)^{\lambda}(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)\cdots}$$

$$= \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \cdots}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \cdots}$$

where $n > m$ or the degree of the denominator polynomial is greater than that of the numerator, will have the following general shapes:

$\omega \to 0$

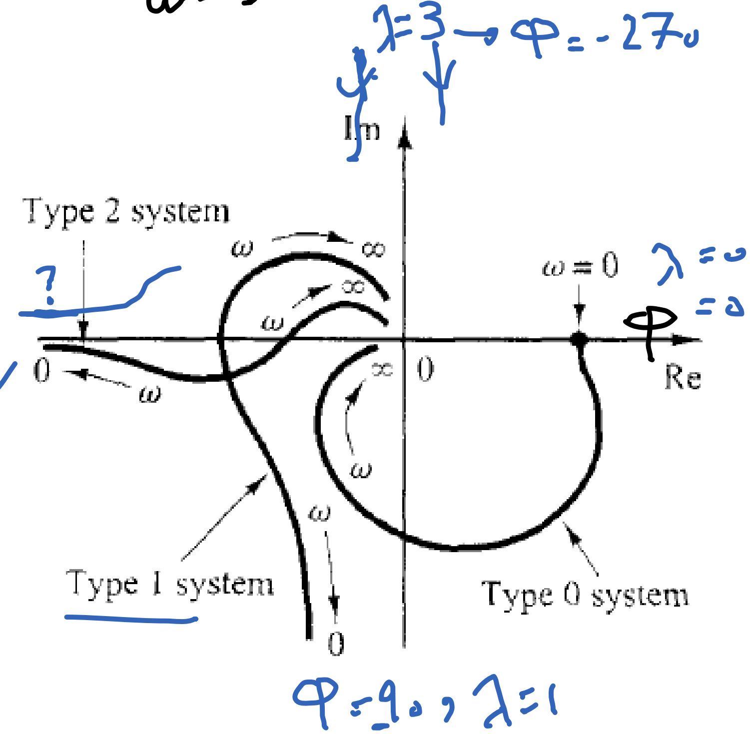
$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^{\lambda}}$$

$\omega \to 0$

$$\left|G(j\omega)\right|_{\omega \to 0} = \left|\frac{K}{\omega^{\lambda}}\right|$$

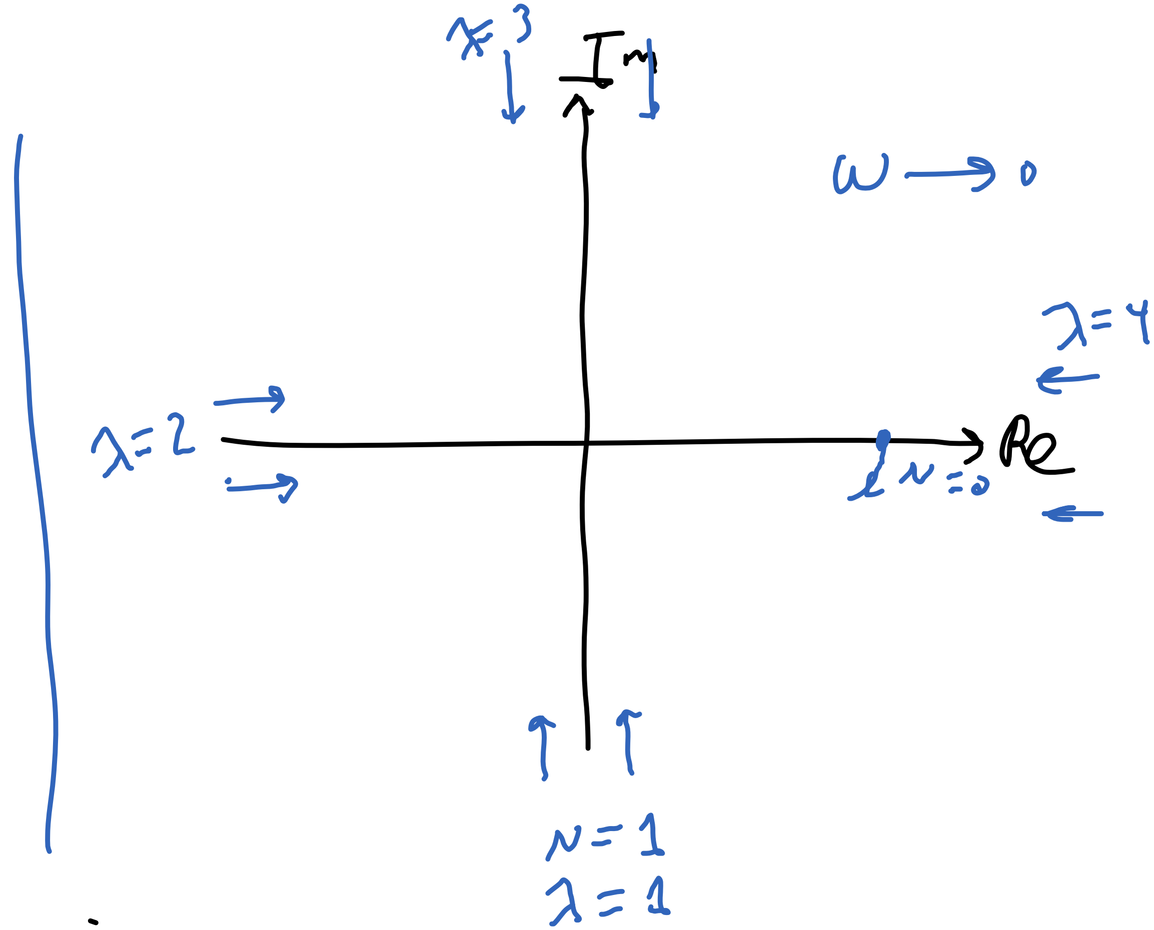
1. *For* $\lambda = 0$ *or type* 0 *systems:* The starting point of the polar plot (which corresponds to $\omega = 0$) is finite and is on the positive real axis. The tangent to the polar plot at $\omega = 0$ is perpendicular to the real axis. The terminal point, which corresponds to $\omega = \infty$, is at the origin, and the curve is tangent to one of the axes.
2. *For* $\lambda = 1$ *or type* 1 *systems:* the $j\omega$ term in the denominator contributes $-90°$ to the total phase angle of $G(j\omega)$ for $0 \le \omega \le \infty$. At $\omega = 0$, the magnitude of $G(j\omega)$ is infinity, and the phase angle becomes $-90°$. At low frequencies, the polar plot is asymptotic to a line parallel to the negative imaginary axis. At $\omega = \infty$, the magnitude becomes zero, and the curve converges to the origin and is tangent to one of the axes.
3. *For* $\lambda = 2$ *or type* 2 *systems:* The $(j\omega)^2$ term in the denominator contributes $-180°$ to the total phase angle of $G(j\omega)$ for $0 \le \omega \le \infty$. At $\omega = 0$, the magnitude of $G(j\omega)$ is infinity, and the phase angle is equal to $-180°$. At low frequencies, the polar plot is asymptotic to a line parallel to the negative real axis. At $\omega = \infty$, the magnitude becomes zero, and the curve is tangent to one of the axes.

$\lambda = 3 \to \varphi = -270$



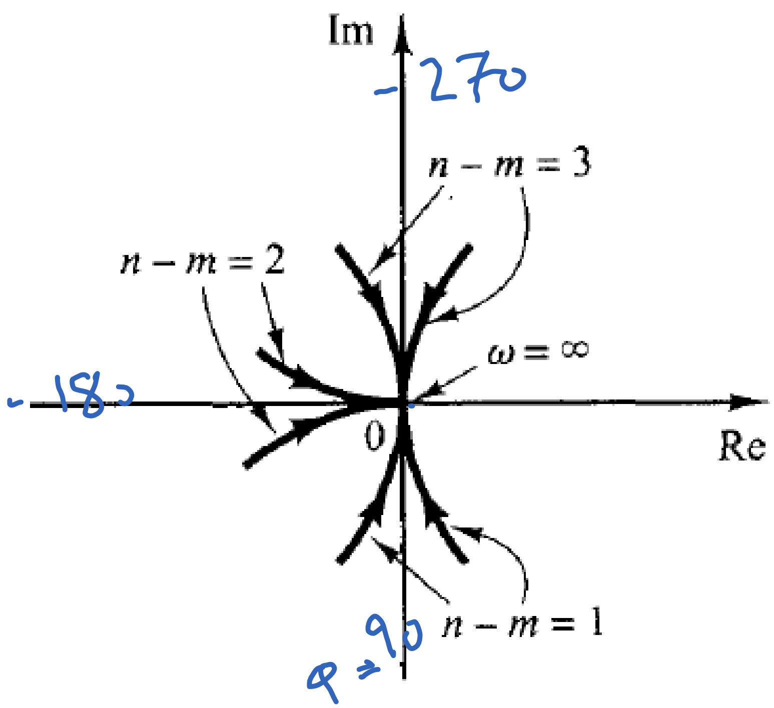
$$\varphi = \underbrace{-90 - 90 \dots - 90}_{\lambda} = -90\lambda$$

$\omega \to 0$


Im
Re
$\omega \to 0$
$\lambda = 2$
$\lambda = 3$
$\lambda = 4$
$N = 0$
$N = 1$
$\lambda = 1$

$\omega \to \infty$

loci converge to the origin clockwise. At $\omega = \infty$, the loci are tangent to one or the other axes, as shown in Figure 8–35.



$$G(j\omega) = \frac{b_0}{a_0 (j\omega)^{n-m}}$$

$\omega \to \infty$

$$|G(j\omega)| = \frac{b_0}{|a_0 (\omega)^{n-m}|} = 0$$

$\omega \to \infty$

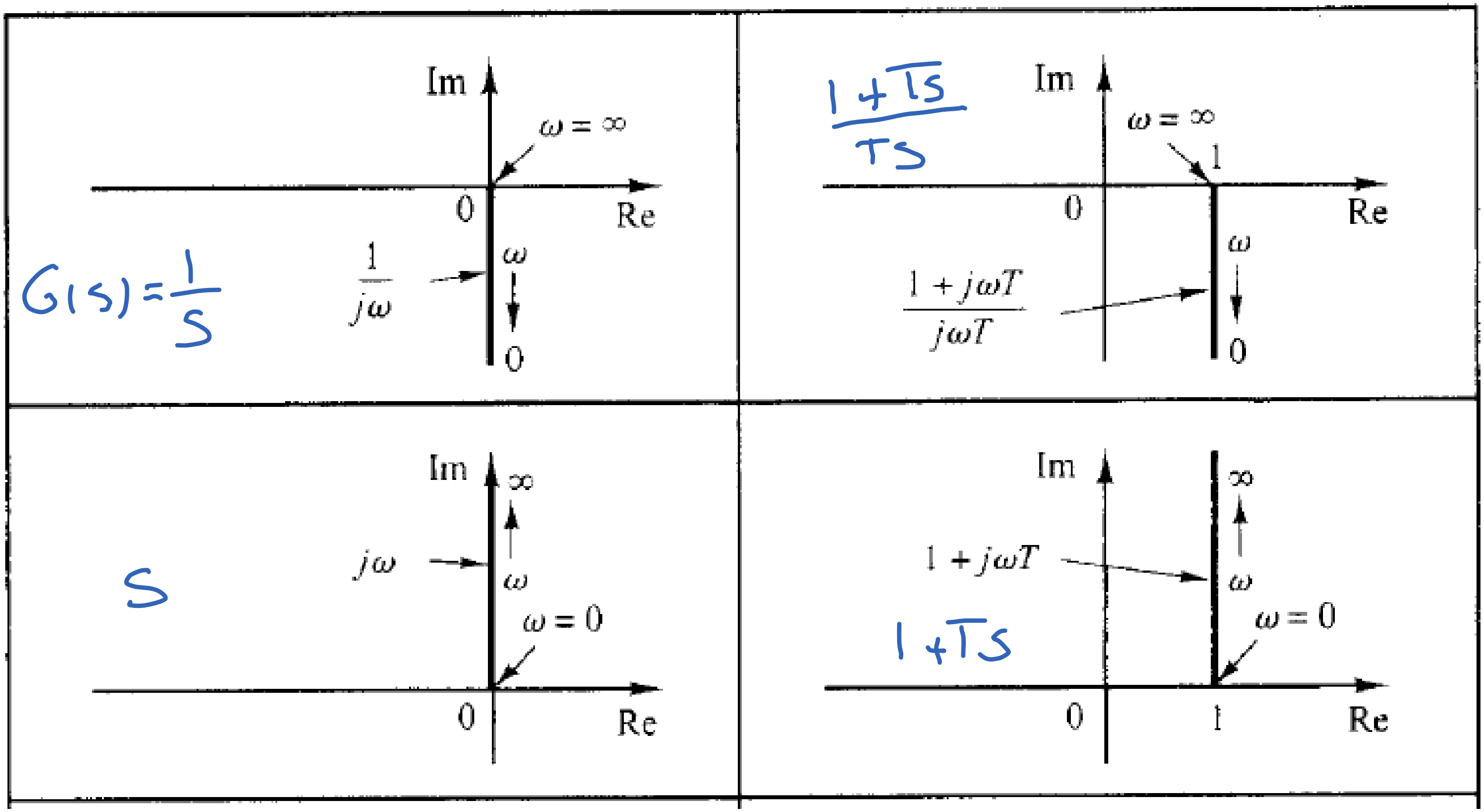
$$\varphi = -90(n-m)$$

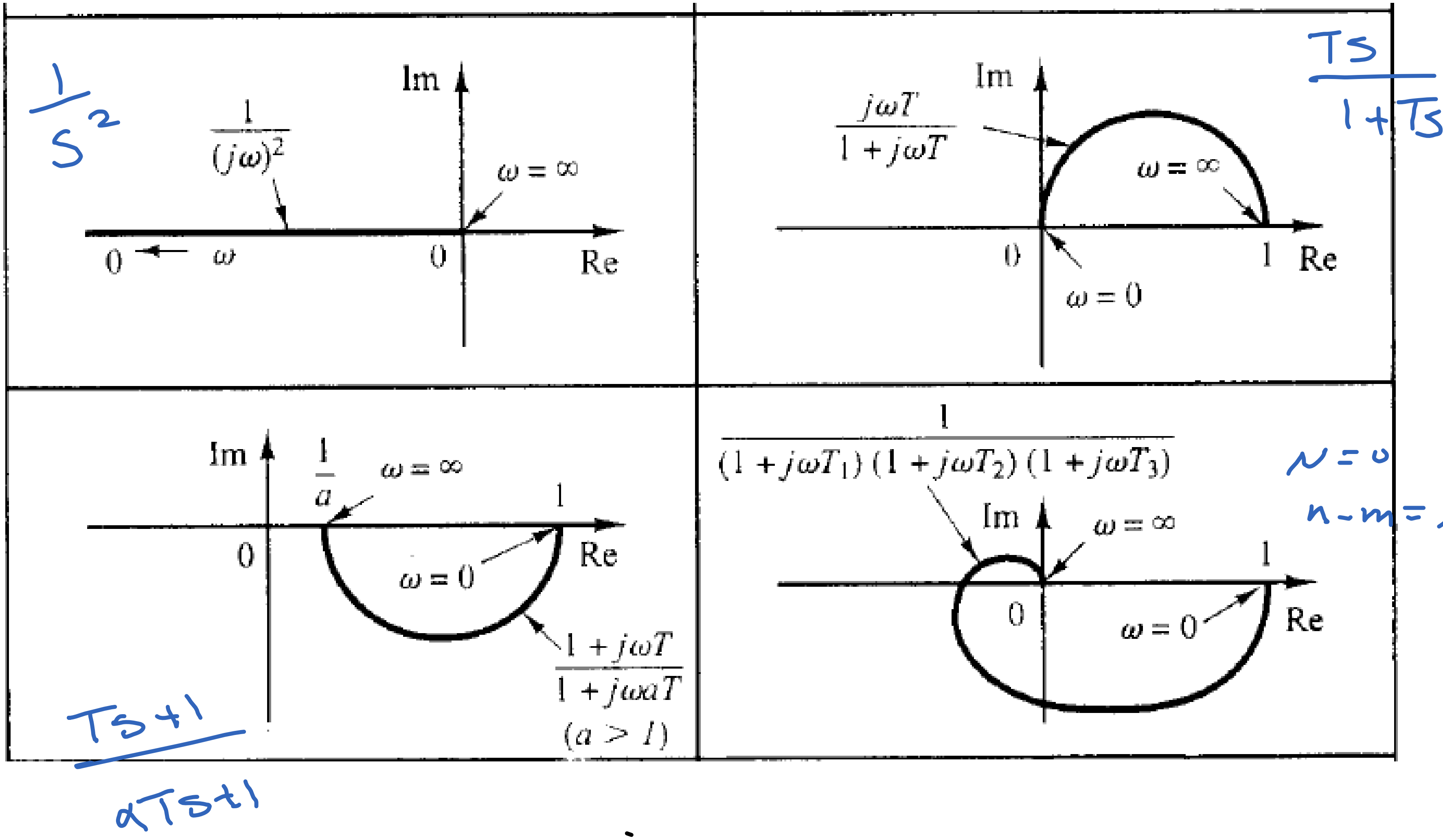
$G(s)=\frac{1}{s}$

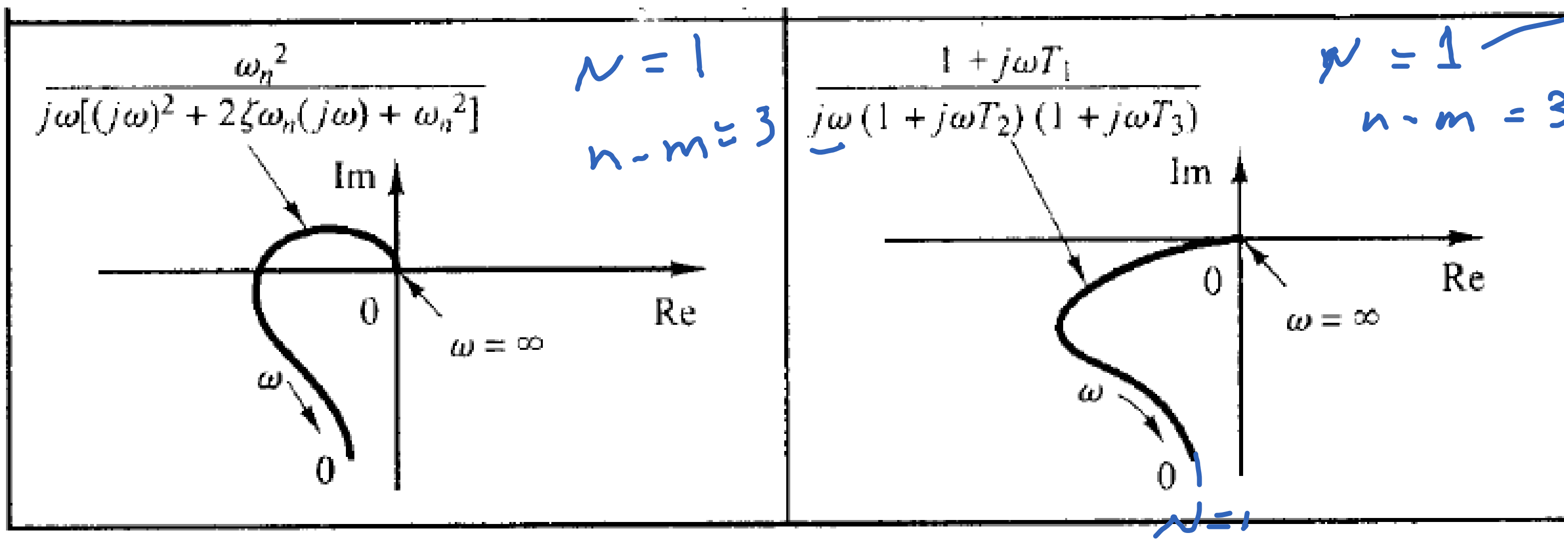
$\frac{1+Ts}{Ts}$

s

$1+Ts$




1/S^2
1/(jω)^2
Im
Re
ω = ∞
0
ω
Ts/(1+Ts)
jωT/(1+jωT)
ω = 0
1
1/a
(1 + jωT)/(1 + jωaT)
(a > 1)
(Ts+1)/(aTs+1)
1/((1 + jωT1)(1 + jωT2)(1 + jωT3))
N = 0
n-m = 3



$N = 1$

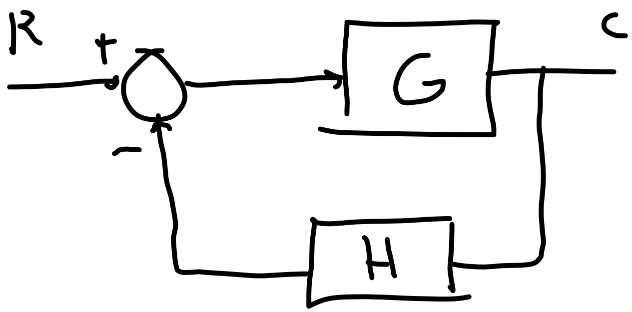
$n - m = 3$

$N = 1$ $\varphi = -90$

$n - m = 3 - 1 = 2$

-180

تحلیل پایداری به روش نایکوئیست:



$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH}$$

برای پایداری ریشه‌های معادله مشخصه باید سمت چپ محور موهومی باشند:

معادله مشخصه: $1+GH=0$

Z: تعداد ریشه‌های $1+GH$ در سمت راست محور موهومی

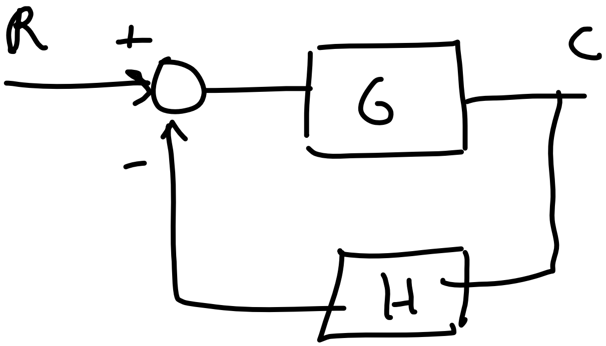
P: تعداد قطب‌های GH در سمت راست محور موهومی

N: تعداد دورهایی که منحنی نایکوئیست تابع GH، در جهت عقربه‌های ساعت حول $(-1+0j)$ می‌زند

$$Z = N + P$$

یکی از ویژگی‌های روش پایداری نایکوئیست این است که با داشتن پاسخ فرکانسی سیستم حلقه باز می‌شود پایداری سیستم حلقه بسته را پیش بینی کرد.

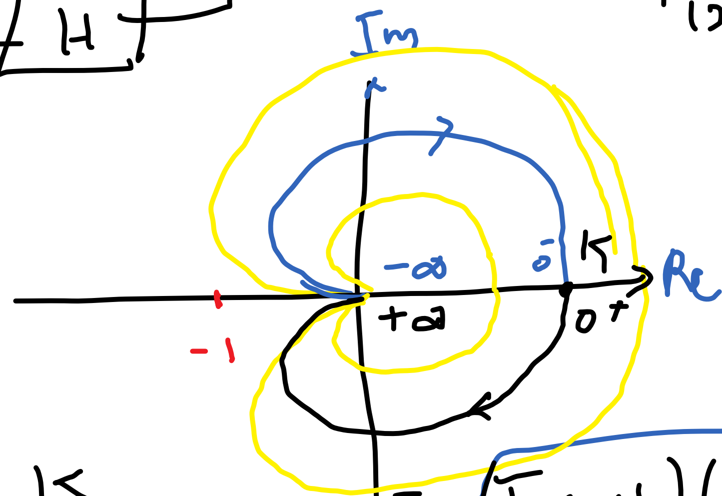
مثال: پایداری سیستم حلقه بسته زیر که تابع تبدیل حلقه باز آن (GH) بصورت زیر داده شده را با روش نایکوئیست بررسی کنید



$$GH = \frac{K}{(T_1 S+1)(T_2 S+1)}$$

$$T_1, T_2 > 0$$

به ازای $K>0$ پایدار



$$\left.\begin{aligned} P &= 0 \\ N &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Z = 0$$

ریشه سمت راست ندارد

$$1 + GH = 1 + \frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \frac{\boxed{(T_1 s+1)(T_2 S+1) + K}}{\ldots} = 0$$

- تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته که تابع تبدیل حلقه باز آن

$$GH = \frac{K(T_2 s+1)}{s^2(T_1 s+1)} \qquad T_1 , T_2 > 0$$

$T_1 < T_2$ و $T_1 = T_2$, $T_1 > T_2$

$$Re[GH(j\omega)] = \frac{-K(1+T_1 T_2 \omega^2)}{\omega^2(1+T_1^2\omega^2)}$$

$$Im[\;〃\;] = \frac{K(T_1 - T_2)}{\omega(1+T_1^2\omega^2)}$$

$$\varphi = tg^{-1}T_2\omega - 90 - 90 - tg^{-1}T_1\omega$$

$\omega \to 0^+$:

$$Re[〃] = -\infty \left(\frac{-1}{\omega^2}\right)$$

$$Im[〃] = -\infty \left(\frac{-1}{\omega}\right)$$

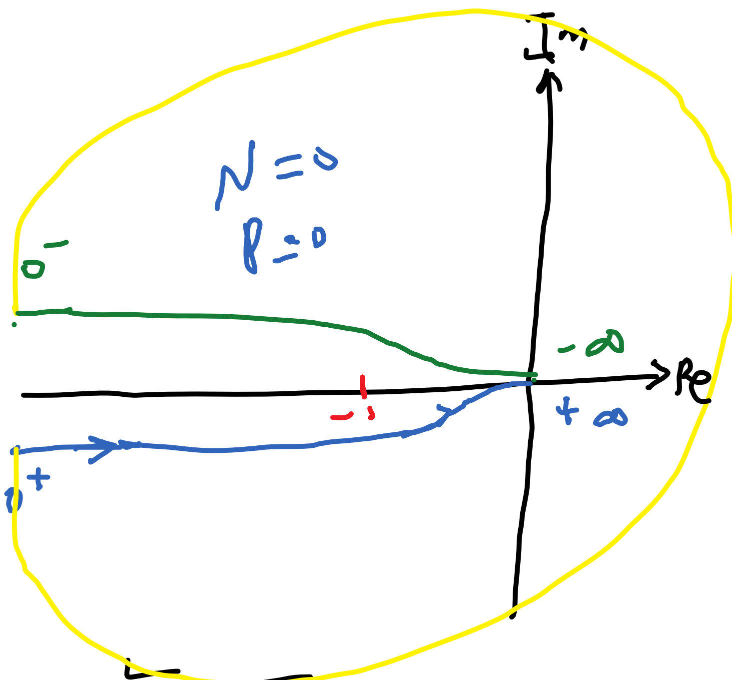
$$\varphi = -180$$

$\omega \to +\infty$:

$$Re[〃] = 0^-$$

$$Im[〃] = 0^-$$

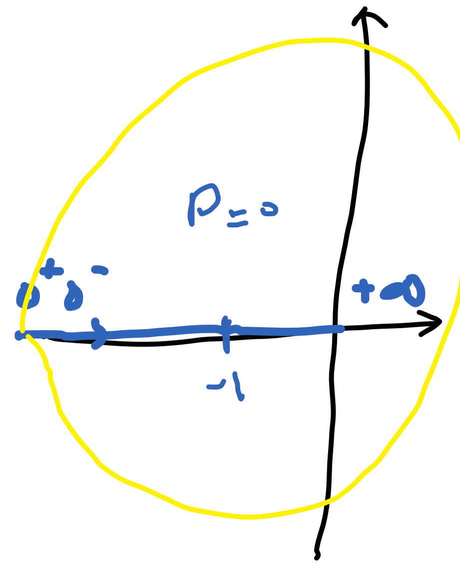
$$\varphi = -180$$



$T_1 < T_2$

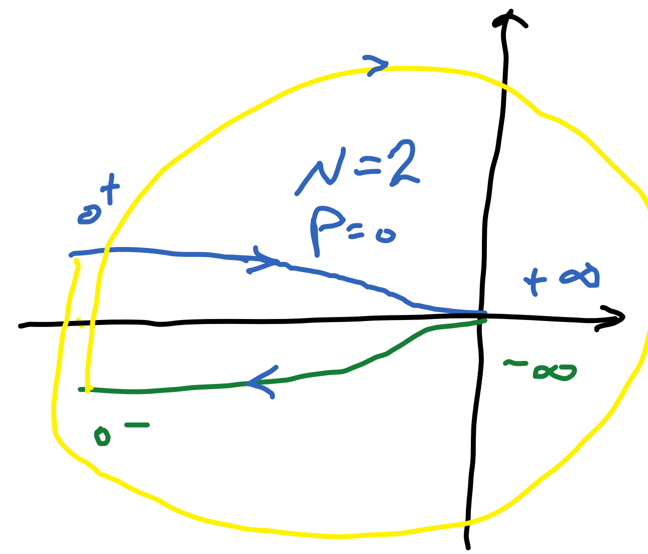
$Z = 0$

سیستم حلقه بسته پایدار



$T_1 = T_2$

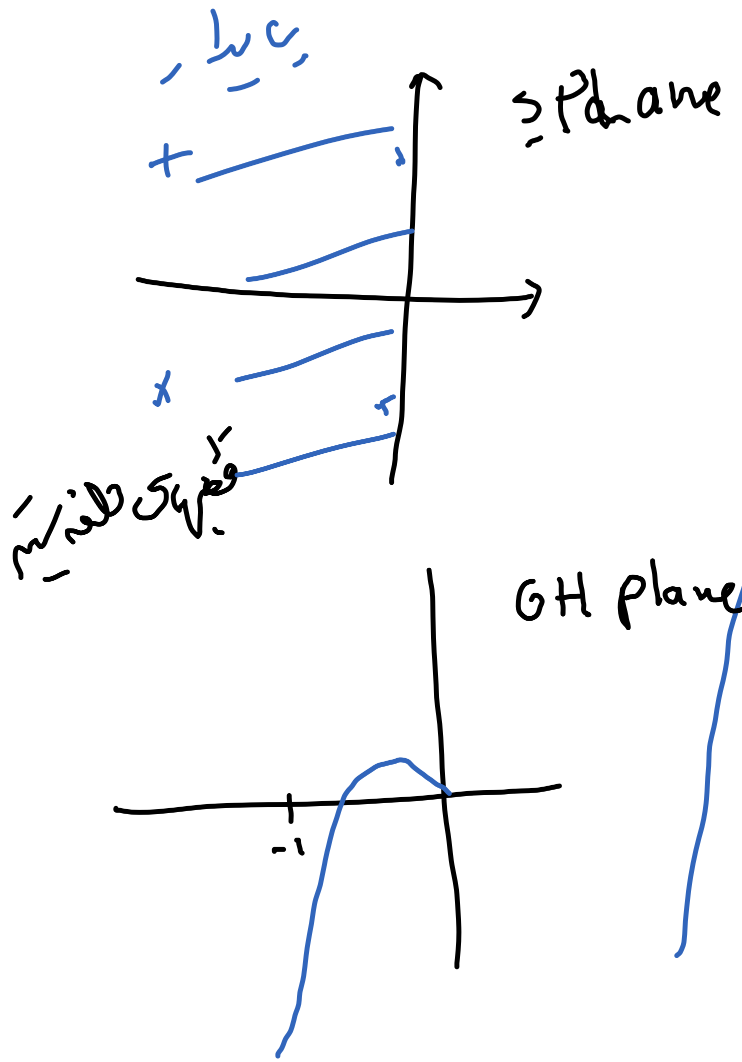
نمودار نایکوئیست از روی نقطه $-1+j0$ عبور می کند ← پایدار بحرانی

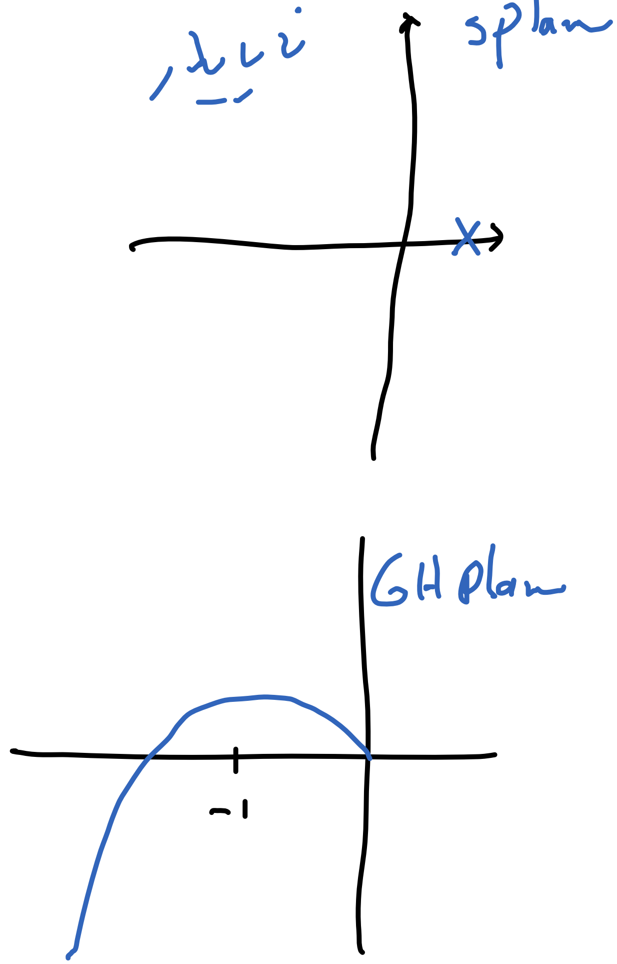


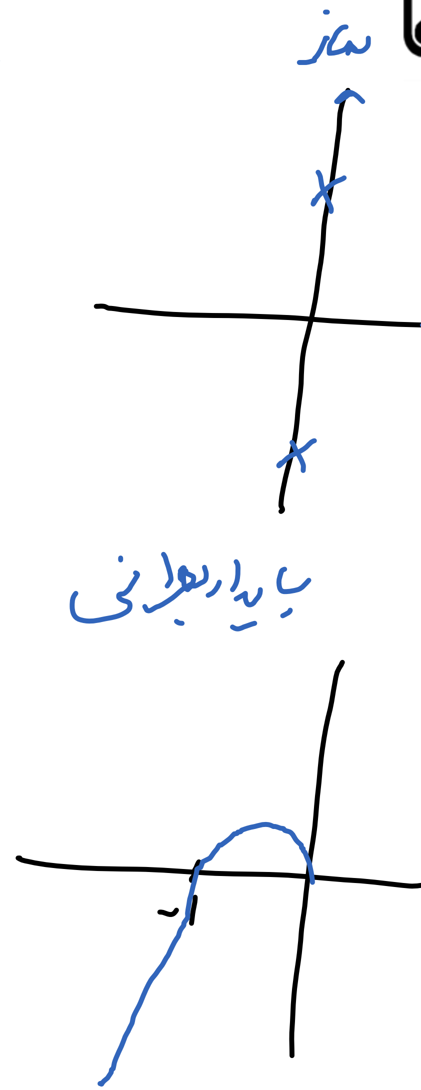
$T_1 > T_2$

$Z = 2$

ناپایدار ✓


پایدار
s plane
قطبهای حلقه بسته
GH plane
-1


ناپایدار
s plane
GH plane
-1


مرز
پایدار بحرانی
-1

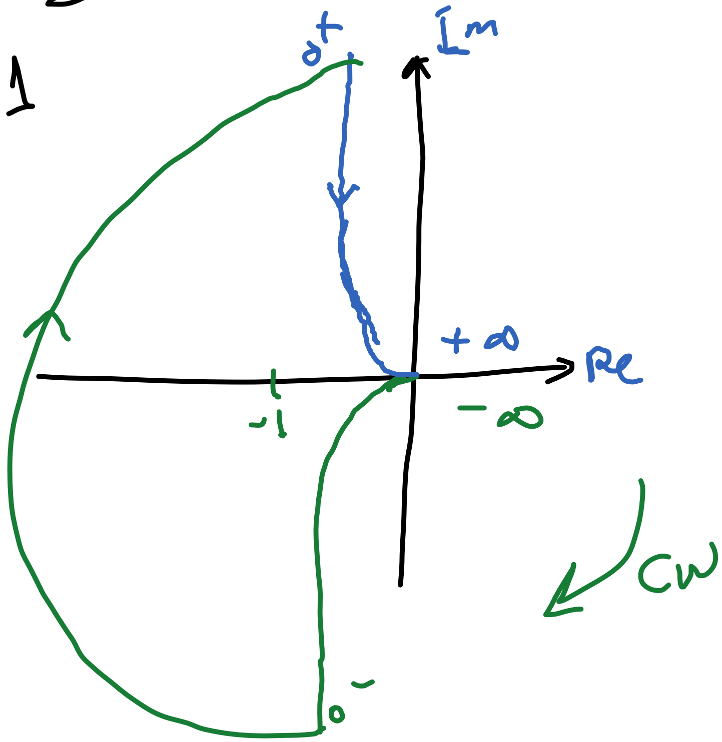
$$GH = \frac{K}{s(Ts-1)} \quad , \quad GH(j\omega) = \frac{Kj}{\omega(T^2\omega^2+1)} + \frac{-KT}{(T^2\omega^2+1)}$$

$T > 0$ ، تابع تبدیل حلقه باز ناپایدار است

$P = 1$

$\omega \to 0 \to \mathrm{Re}[\,''\,] = -KT$

$\mathrm{Im}[\,''\,] = +\infty$



$$\left.\begin{matrix} P = 1 \\ N = 1 \end{matrix}\right\} \to Z = 2$$

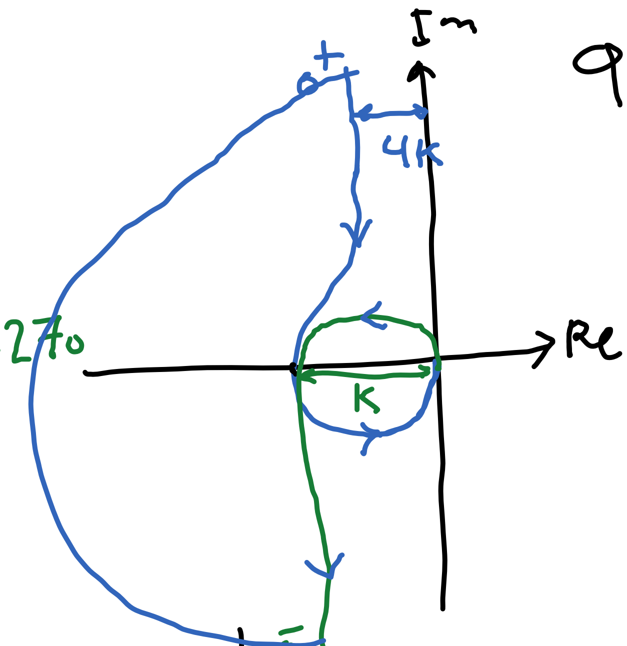
سیستم حلقه بسته ناپایدار است

$1+GH$ ، 2 ریشه مثبت دارد.

$$GH(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)} \quad , \quad GH(j\omega) = \frac{K(3-\omega^2)\,j}{\omega(\omega^2+1)} + \frac{-4K}{\omega^2+1}$$

$$\varphi = tg^{-1}\omega/3 - 90 - tg^{-1}\frac{\omega}{-1}$$

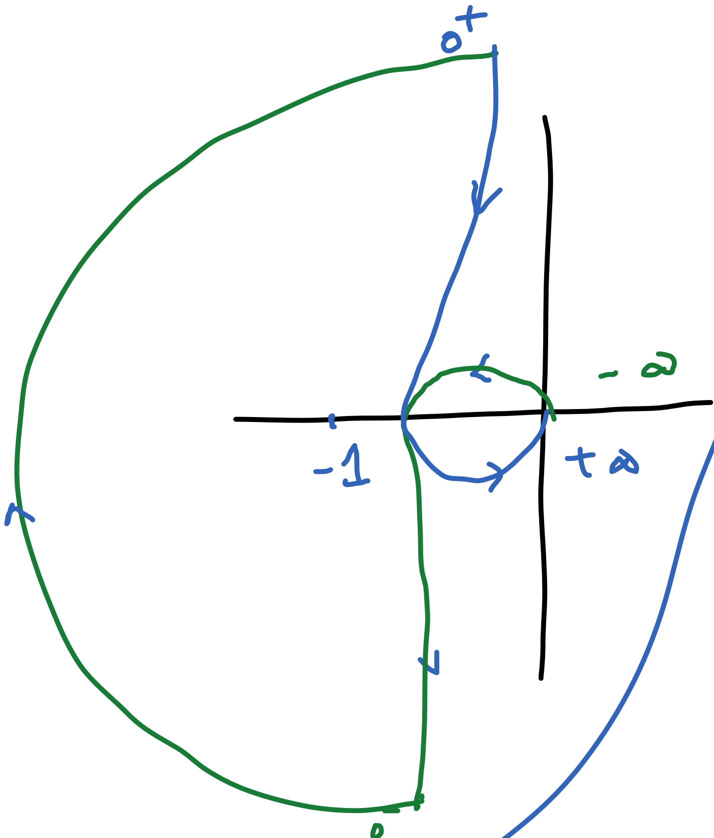
$$\omega \to 0^+ \begin{cases} Re[\,''\,] = -4K \\ Im[\,''\,] = +\infty \\ \varphi = 0 - 90 - \underbrace{tg^{-1} 0^-}_{+180} = -270 \end{cases}$$



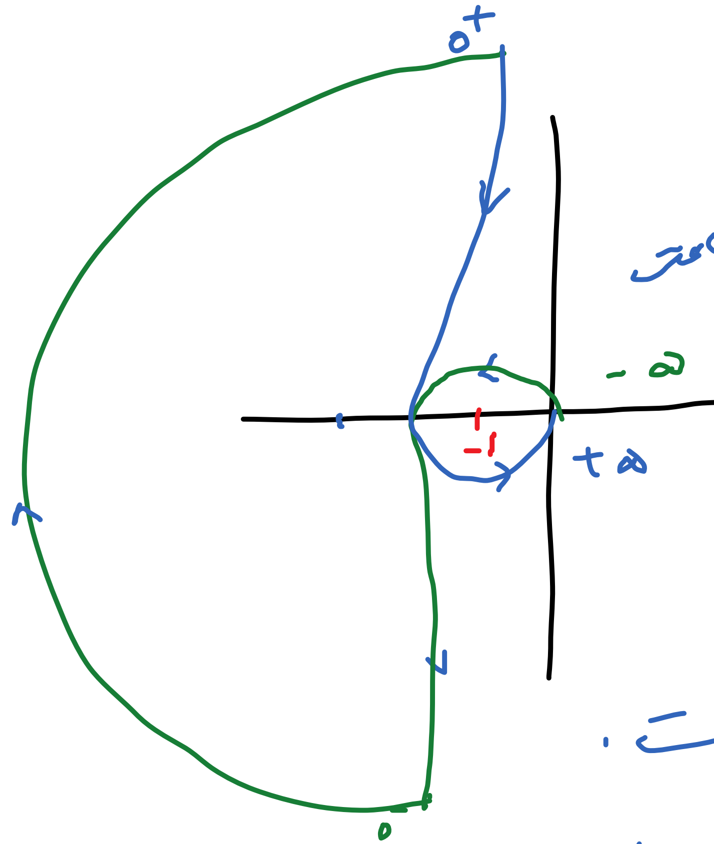
$$\omega \to +\infty \begin{cases} Re[\,''\,] = 0^- \\ Im[\,''\,] = 0^- \\ \varphi = \cancel{90} - \cancel{90} - tg^{-1} - \infty = -90 \end{cases}$$

$$Im[\,''\,] = 0 \longrightarrow \omega = \sqrt{3}$$

$$Re[\,''\,]\Big|_{\omega=\sqrt{3}} = \frac{-4K}{3+1} = -K$$



$K < 1 \Rightarrow N = 1 \,,\, P = 1 \rightarrow Z = 2$



$K > 1$

$\Rightarrow N = -1$

دور در خلاف جهت عقربه‌های ساعت

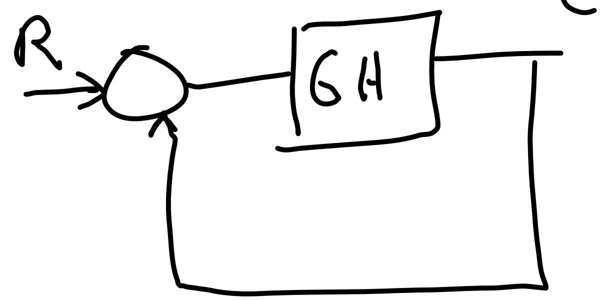
$P = 1$

$\Rightarrow Z = N + P = 0$

سیستم حلقه بسته پایدار است.

در صورتی که سیستم حلقه باز ناپایدار بود.

$$GH(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)}$$



مقایسه با روش روث

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH} \longrightarrow \text{معادله مشخصه} = 1+GH = 1+\frac{K(s+3)}{s(s-1)}$$

$$= \frac{s(s-1)+K(s+3)}{s(s-1)} = 0 \Rightarrow \text{معادله مشخصه } s(s-1)+K(s+3) = 0$$

$$\Rightarrow s^2 - s + Ks + 3 = s^2 + (K-1)s + 3 = 0$$

s^2:	1	3
s^1:	$k-1$	$0 \rightarrow k>1$
s^0:	3	

کنترل اتوماتیک

تحلیل پاسخ فرکانسی
نمودار نایکوئیست، بخش سوم

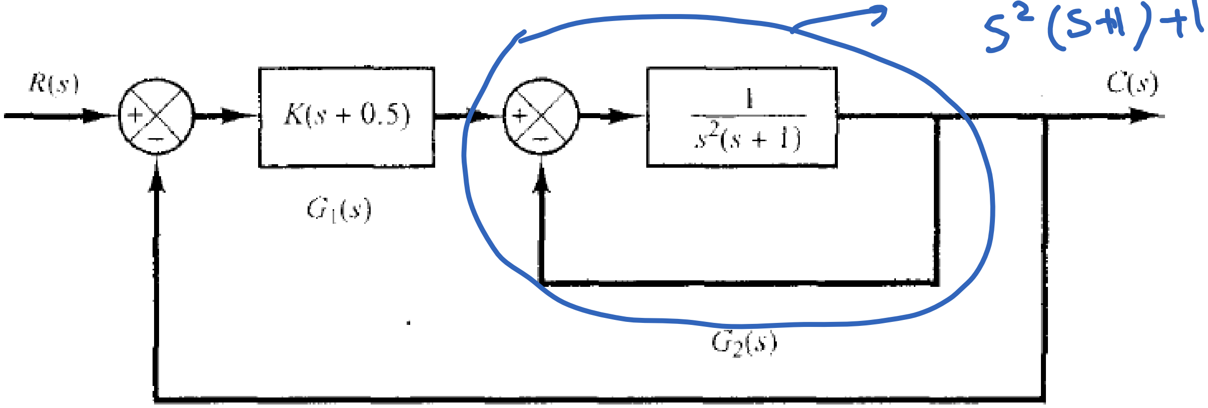
دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

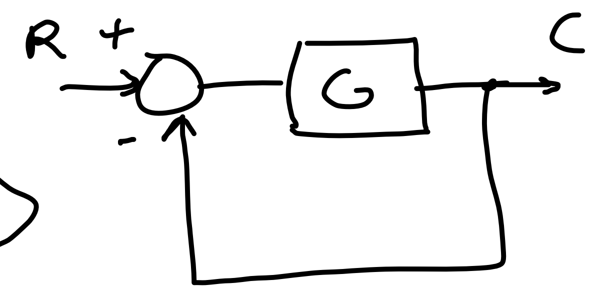
anikoobin@semnan.ac.ir

Consider the control system shown in Figure 8–61. The system involves two loops. Determine the range of gain K for stability of the system by the use of the Nyquist stability criterion. (The gain K is positive.)

$$\frac{1}{s^2(s+1)+1}$$



$\Rightarrow$



$$G(s) = \frac{K(s+0.5)}{s^3+s^2+1}$$

در روش هندسی پایداری نایکوئیست نیاز به محاسبه $\frac{C}{R}$ یا همان تابع تبدیل حلقه بسته نیست.

$$G(s) = \frac{K(s+0.5)}{s^3+s^2+1} \quad , \qquad Z = N + \underline{P}$$

P : تعداد قطب‌های ناپایدار $G(s)$ ،

با استفاده از معیار روث

s^3+s^2+1 ⟶ معادله مشخصه حلقه بسته نیست

از روش روث برای تعیین علامت ریشه‌های معادله s^3+s^2+1 استفاده کردیم

$$\begin{array}{lcc} s^3: & 1 & 0 \\ s^2: & 1 & 1 \\ s^1: & -1 & 0 \\ s^0: & 1 & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad P = 2$$

$$G(s)=\frac{K(s+0.5)}{s^3+s^2+1} \Rightarrow G(j\omega)=\frac{K(j\omega+0.5)}{(j\omega)^3+(j\omega)^2+1}$$

$$\Rightarrow G(j\omega)=\frac{K(j\omega+0.5)}{-\omega^3 j-\omega^2+1}\times\frac{\omega^3 j-\omega^2+1}{+\omega^3 j-\omega^2+1}=\frac{K(-\omega^4-0.5\omega^2+0.5)+K\omega(-0.5\omega^2+1)j}{(\omega^3)^2+(1-\omega^2)^2}$$

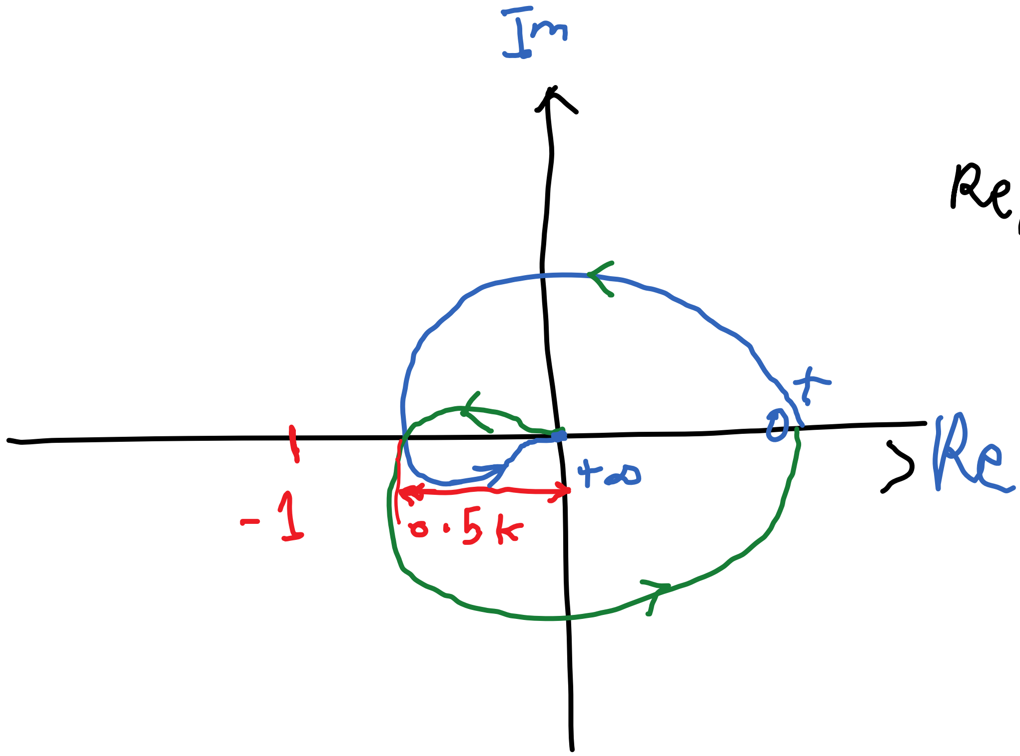
$$\omega\to 0^+\begin{cases}Re[\;]=0.5\\ Im[\;]=0^+\\ \to \varphi=0\end{cases}$$

$N=0$

$$\omega\to +\infty\begin{cases}Re[\;]=0^-\\ Im[\;]=0^-\end{cases}$$

$$G(j\omega)=\frac{K}{(j\omega)^2}\to\varphi=-90-90=-180$$

$\omega\to\infty$



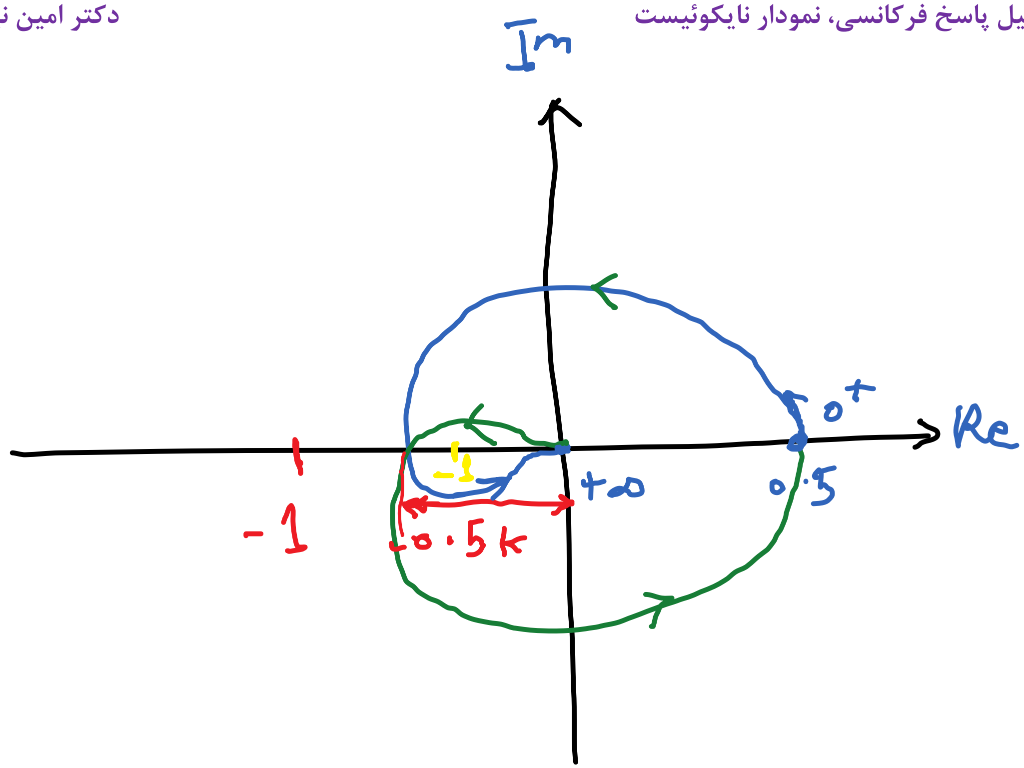
$$Re[ت] = \left.\frac{K(-\omega^4 - 0.5\omega^2 + 0.5)}{(\omega^3)^2 + (1-\omega^2)^2}\right|_{\omega=\sqrt{2}}$$

$$Re[ت] = \frac{K(-4 - 0.5 \times 2 + 0.5)}{2^3 + 1}$$

$$= -0.5K$$

محل برخورد با محور Re $\Rightarrow Im[ت] = 0 \Rightarrow -0.5\omega^2 + 1 = 0 \rightarrow \omega^2 = \frac{1}{0.5} = 2$

$$Re[G(j\omega)]\Big|_{\omega=\sqrt{2}} = -0.5K$$



$0.5k < 1 \Rightarrow N = 0$

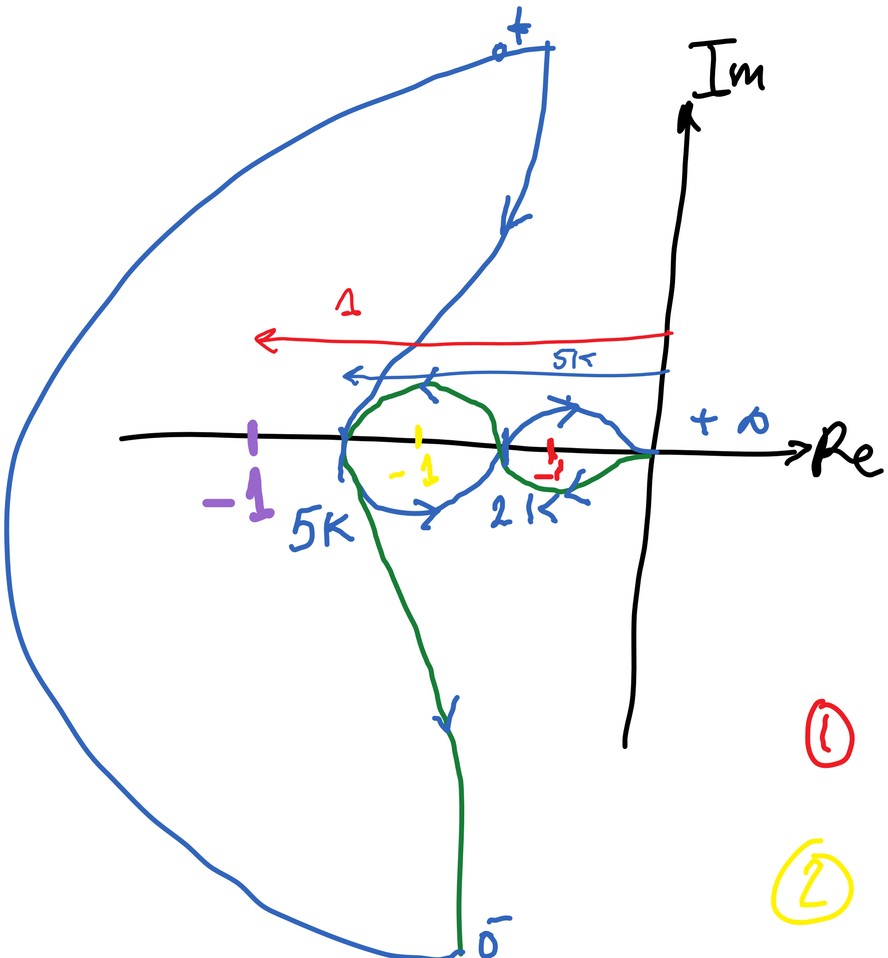
$0.5k > 1 \Rightarrow N = -2$

$\Rightarrow k > 2 \longrightarrow N = -2$

$P = 2$

$\Rightarrow$ for $k > 2 \rightarrow Z = 0$ سیستم حلقه بسته پایدار است

for $k < 2 \longrightarrow Z = 2 \longrightarrow$ ناپایدار می شود



مثال: منحنی نایکوئیست تابع حلقه باز $G(s)$ به صورت زیر رسم شده است. اگر $G(s)$ یک قطب ناپایدار داشته باشد پایداری سیستم حلقه بسته را تعیین کنید.

$P = 1$

① $2K > 1 \rightarrow N = 1$

② $2K < 1 < 5K \rightarrow N = -1$

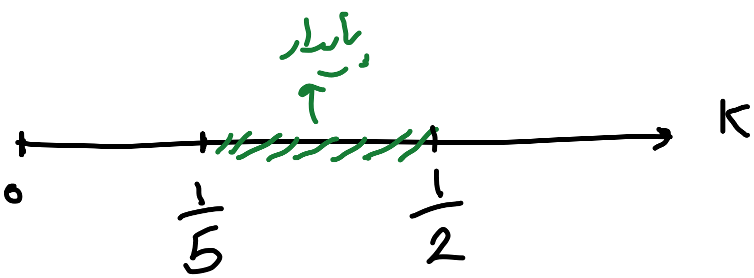
③ $1 > 5K \rightarrow N = 1$

① $2K>1 \to N=1 \Rightarrow K>\frac{1}{2} \to N=1,\ P=1 \to Z=2$ ناپایدار

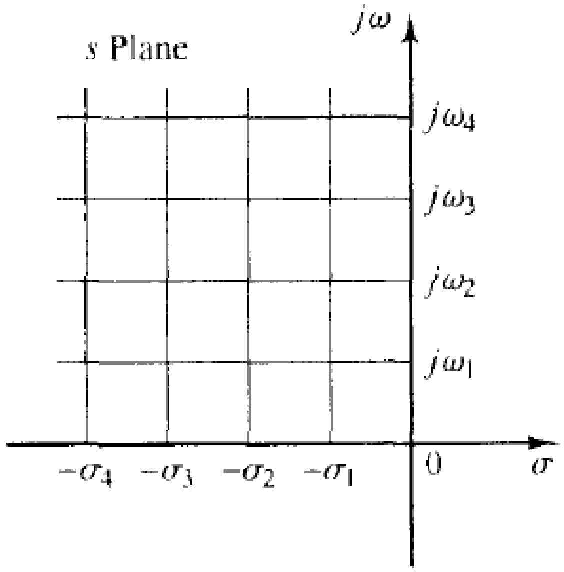
② $2K<1<5K \to N=-1 \Rightarrow \frac{1}{5}<K<\frac{1}{2},\ N=-1,\ P=1,\ Z=0$ پایدار

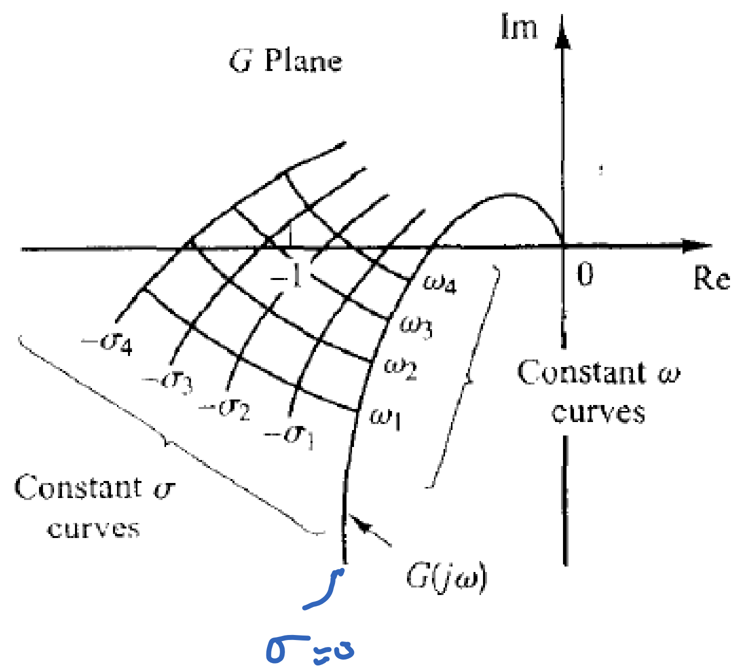
③ $1>5K \to N=1 \Rightarrow 0<K<\frac{1}{5} \to N=1,\ P=1 \to Z=2$ ناپایدار

برای $\frac{1}{5}<K<\frac{1}{2}$ سیستم حلقه بسته پایدار است.

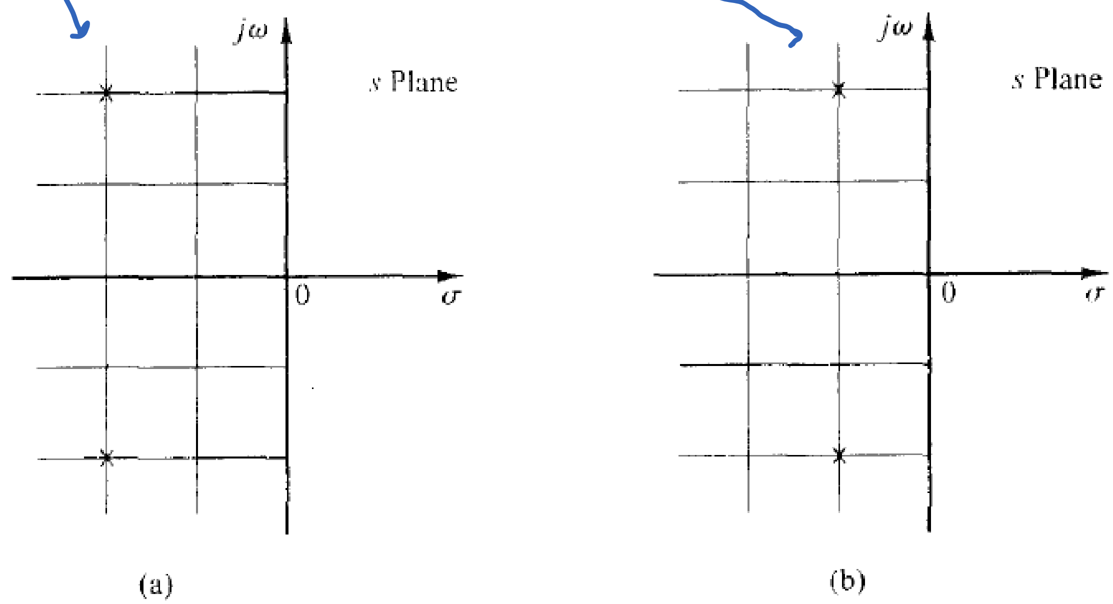


Relative stability   پایداری نسبی

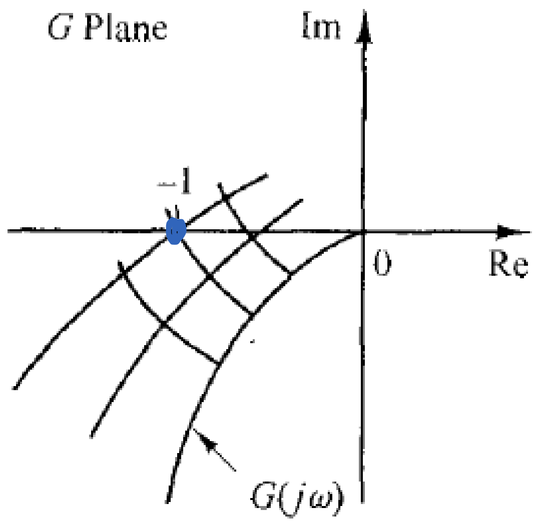




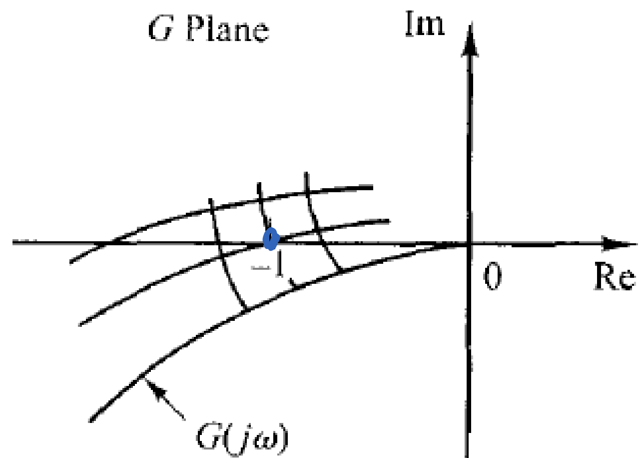
قطبهای حلقه بسته سیستم هستند



پایدار شده است

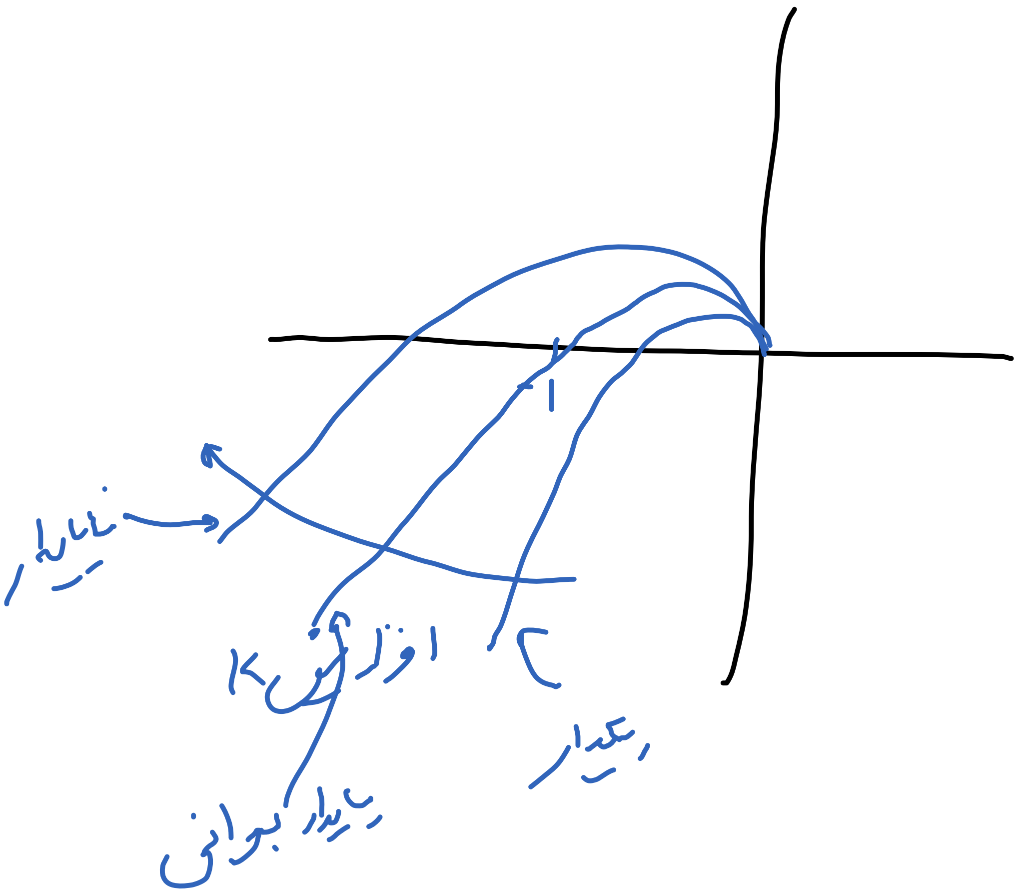


(a)



(b)

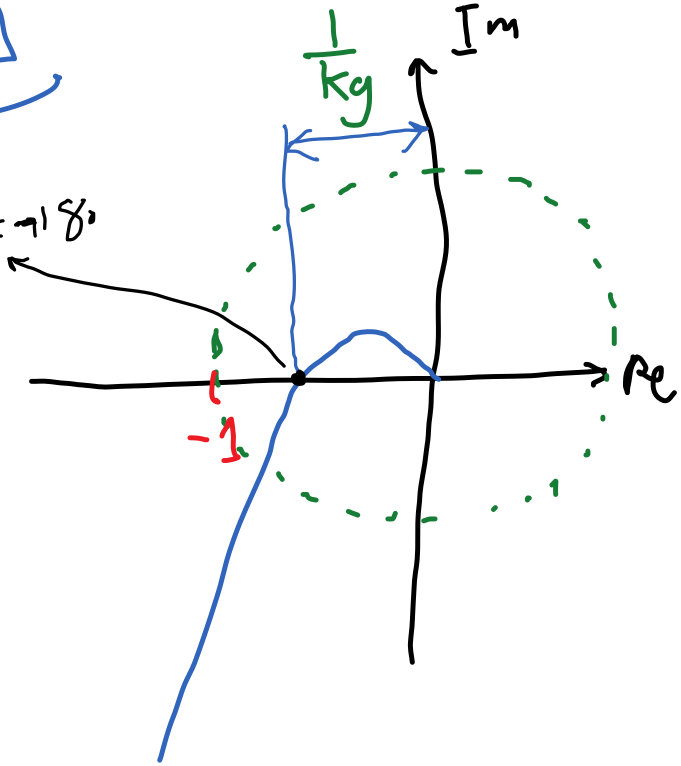
سیستمی که پایدارتر نمودار از نقطه $-1+0j$
دورتر است


-1
ناپایدار
افزایش K
پایدار بحرانی
پایدار

پایدار

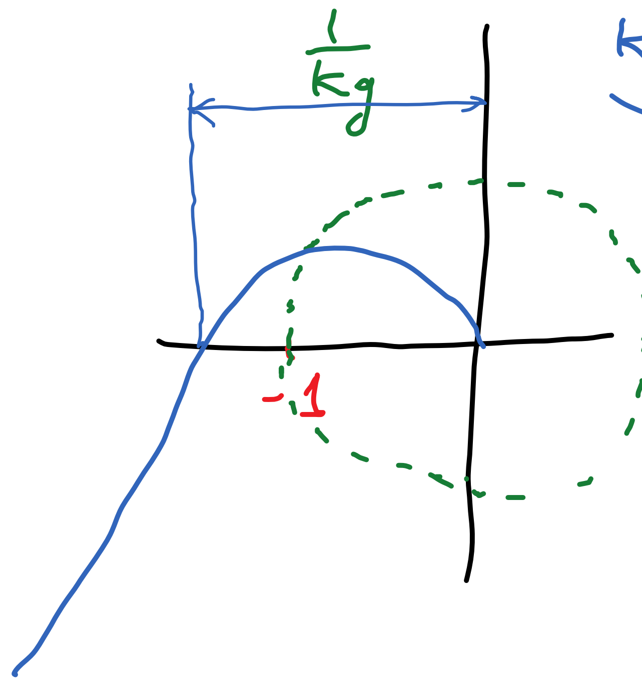
$K_g > 1$

$\angle G(j\omega) = -180$



ناپایدار

$K_g < 1$



$$\frac{1}{K_g} = |G(j\omega)|\Big|_{\omega=\omega_1} \quad , \quad \angle G(j\omega_1) = -180$$

ω_1: فرکانس قطع فاز

Phase crossover Frequency

Gain Margin

* به K_g حاشیه بهره گفته می‌شود

هرچه بزرگتر باشد، سیستم پایدارتر است،

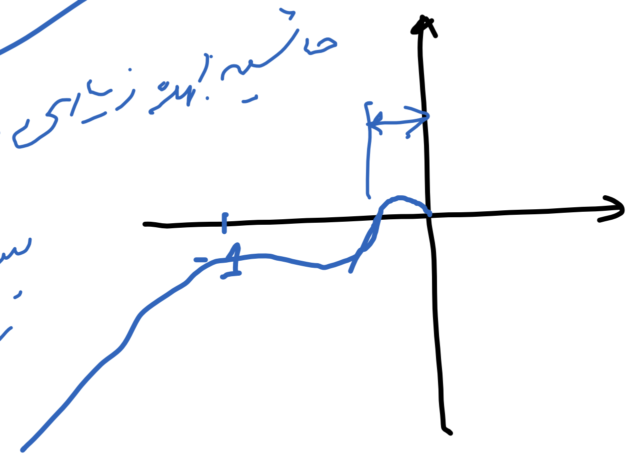
$$\frac{1}{K_g} = |G(j\omega_1)| \Rightarrow -20\log K_g = 20\log|G(j\omega_1)|$$

$$\Rightarrow K_g(dB) = 20\log K_g = -20\log|G(j\omega_1)|$$

پایدار $K_g > 1 \longrightarrow K_g(dB) > 0$

ناپایدار $K_g < 1 \longrightarrow K_g < 0$

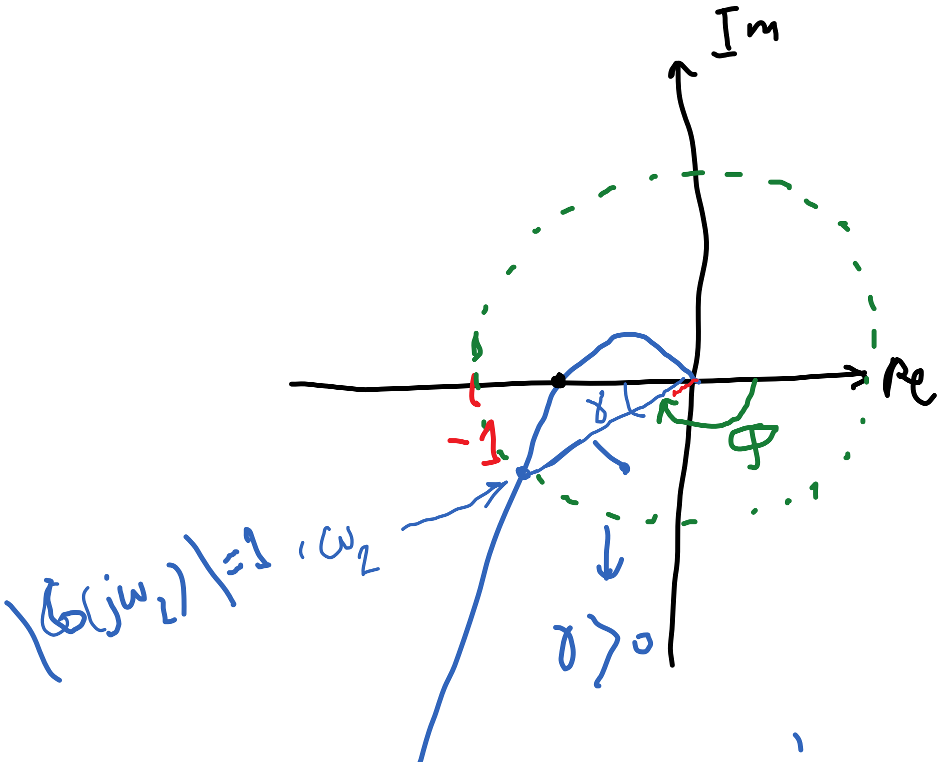
حاشیه بهره زیادی دارد



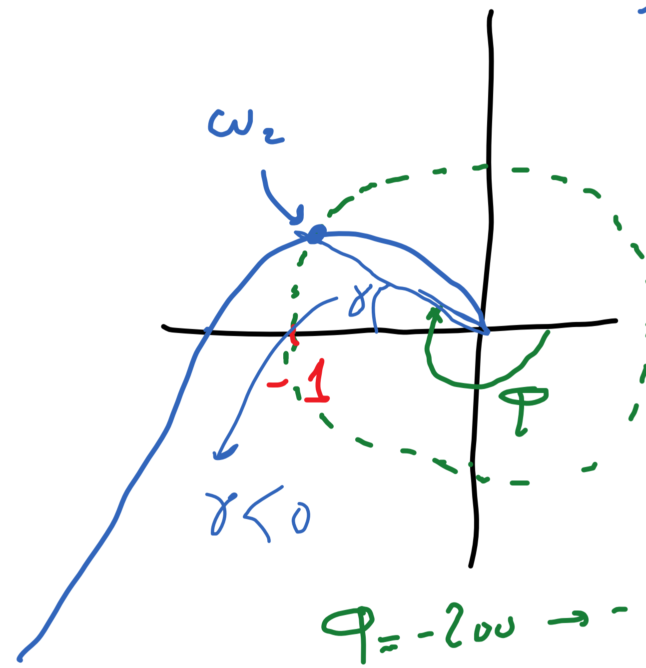
پس حاشیه بهره به تنهایی معیار دقیقی نیست.

حاشیه فاز

پایدار



ناپایدار



$\varphi + 180$

$\varphi = -200 \rightarrow -200 + 180 = -20$

حاشیه فاز γ ، $|G(j\omega_2)| = 1$ ω_2 : فرکانس قطع بهره

Gain cross over Frequency

$$\gamma = 180 + \varphi \quad , \quad \varphi = \angle G(j\omega_2)$$

روش محاسبه حاشیه فاز

فرکانس قطع بهره

1- $|G(j\omega)| = 1 \longrightarrow \omega_2 = \checkmark$

$\longrightarrow 2\log|G(j\omega)| = 0 \longrightarrow \omega_2 = \checkmark$

2- $\varphi = \angle G(j\omega_2)$

3- $\gamma = 180 + \varphi \longrightarrow$

$\gamma > 0$ سیستم پایدار

$\gamma < 0$ سیستم ناپایدار

روش محاسبه حاشیه بهره

فرکانس قطع فاز

1. $\angle G(j\omega) = -180 \longrightarrow \omega_1 =$

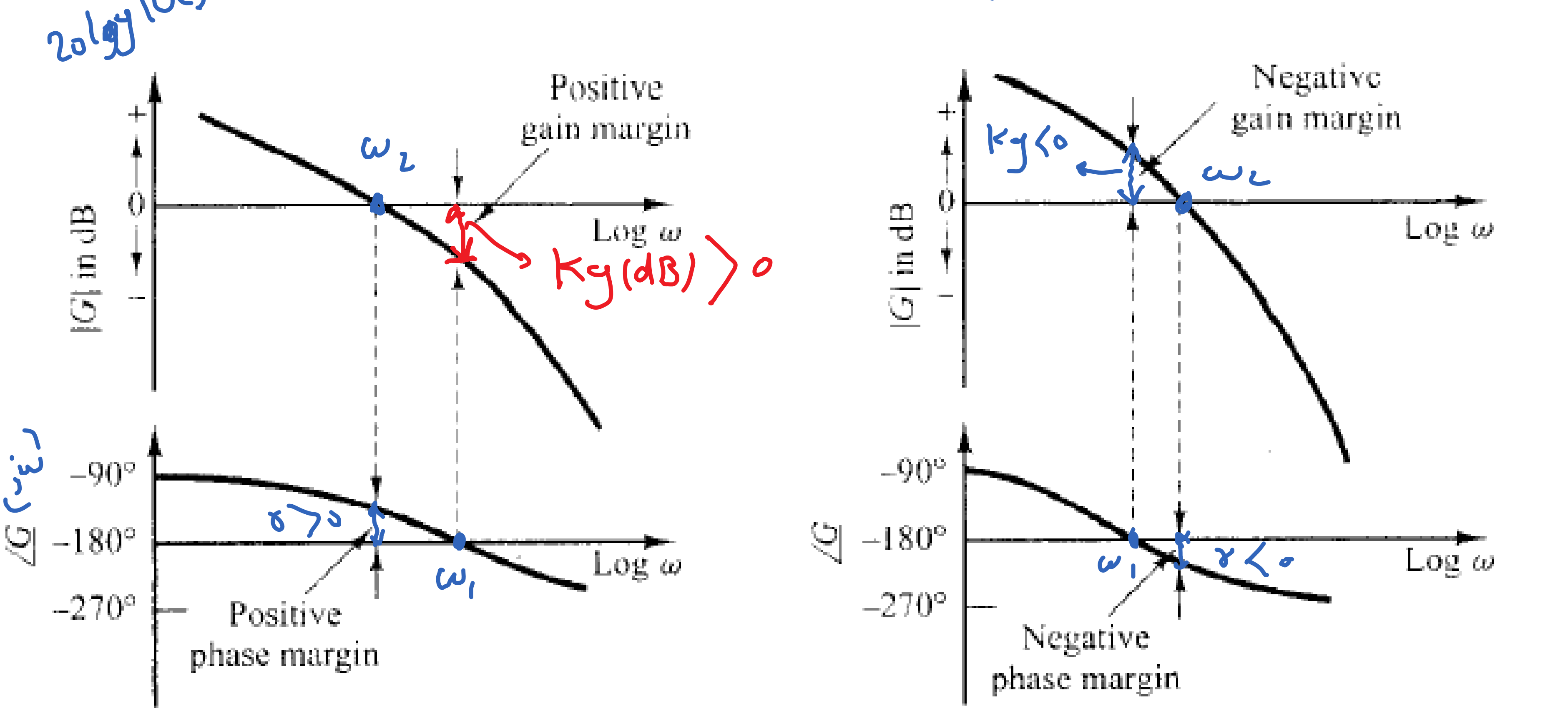
2- $|G(j\omega_1)|$

3- $K_g(dB) = -20\log|G(j\omega_1)|$

$K_g > 0$ — پایدار

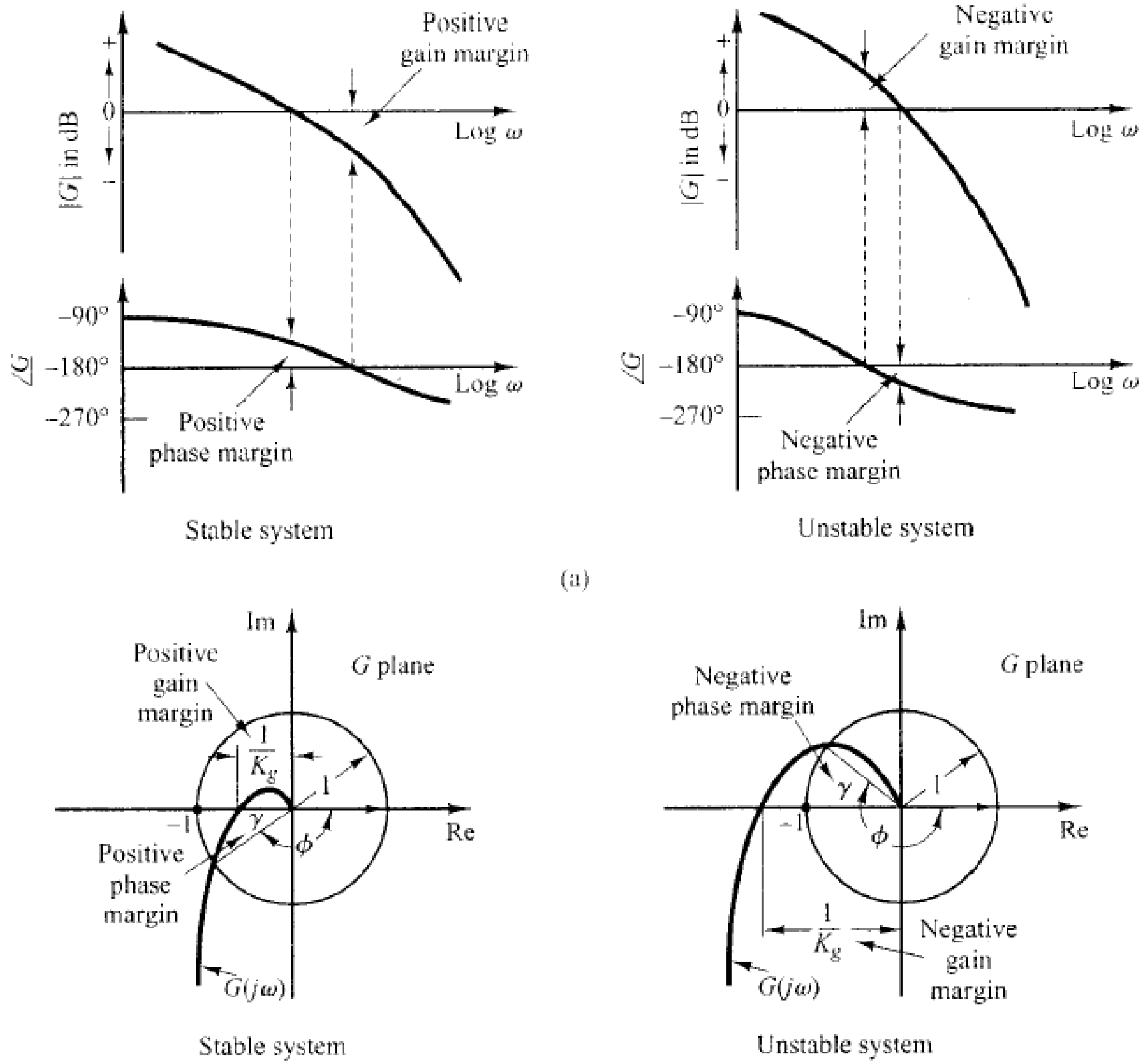
$K_g < 0 \longrightarrow$ ناپایدار

تعیین حاشیه بهره و فاز در دیاگرام بود



Stable system

Unstable system


Positive
gain margin
|G| in dB
Log ω
−90°
−180°
−270°
Log ω
Positive
phase margin
Stable system
Negative
gain margin
|G| in dB
Log ω
−90°
−180°
−270°
Log ω
Negative
phase margin
Unstable system
(a)
Im
G plane
Positive
gain
margin
1/K_g
Re
Positive
phase
margin
G(jω)
Stable system
Im
G plane
Negative
phase margin
Re
1/K_g
Negative
gain
margin
G(jω)
Unstable system

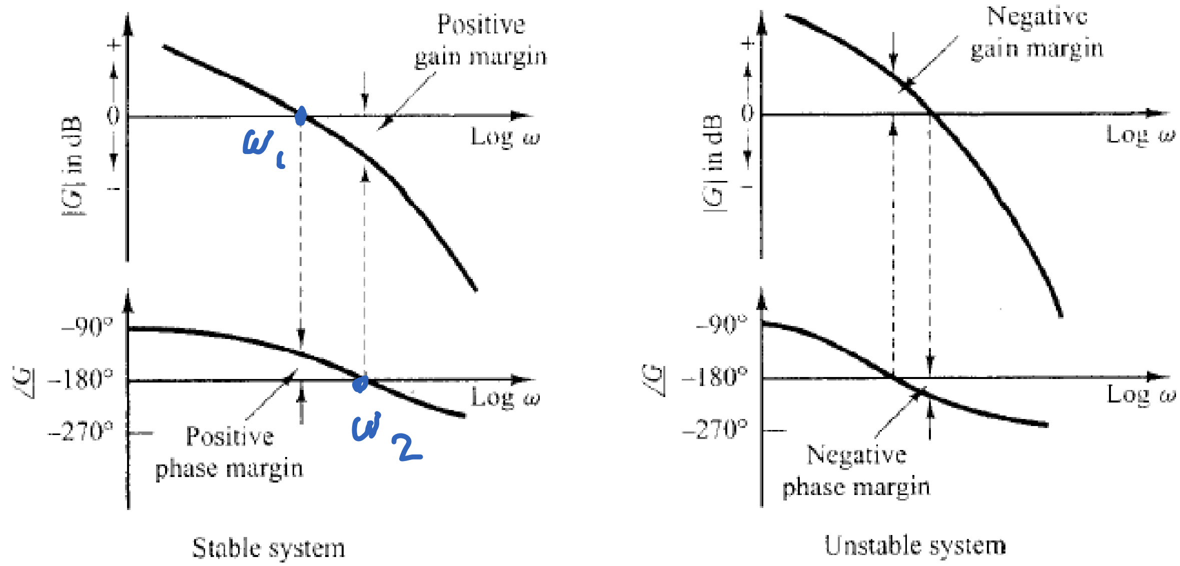
کنترل اتوماتیک

تحلیل پاسخ فرکانسی
حاشیه بهره و فاز

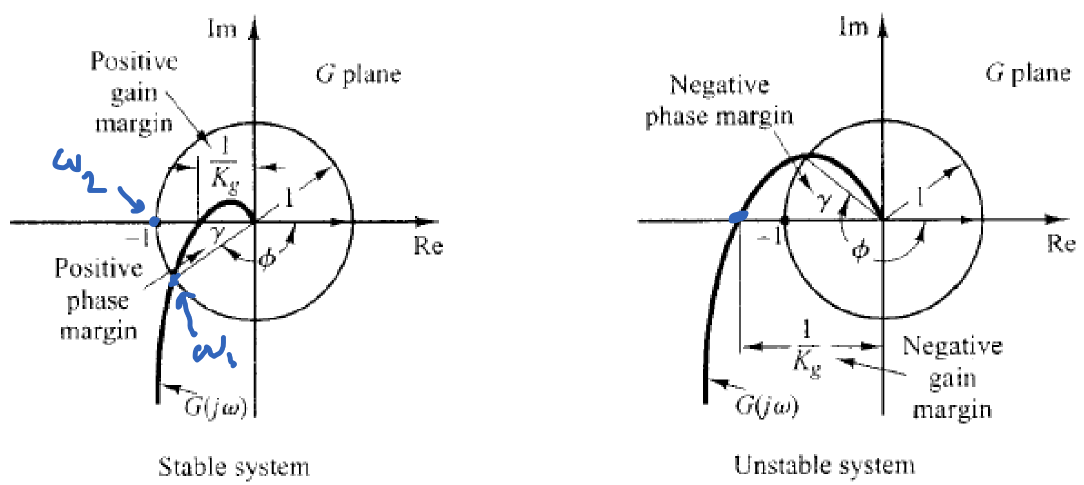
دکتر امین نیکوبین

دانشگاه سمنان، دانشکده مهندسی مکانیک

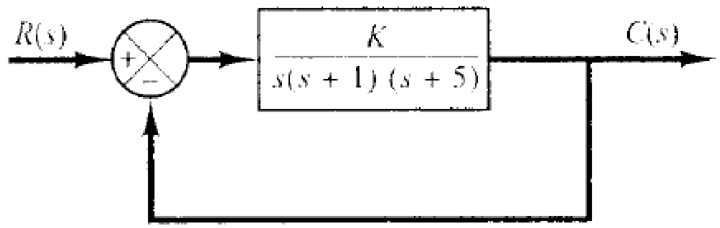
anikoobin@semnan.ac.ir


Positive
gain margin
Log ω
$|G|$ in dB
ω1
−90°
−180°
−270°
$\angle G$
Positive
phase margin
ω2
Stable system
Negative
gain margin
Negative
phase margin
Unstable system

(a)


Im
Re
G plane
Positive
gain
margin
$\frac{1}{K_g}$
ω2
−1
1
γ
φ
Positive
phase
margin
ω1
$G(j\omega)$
Stable system
Negative
phase margin
Negative
gain
margin
Unstable system

Obtain the phase and gain margins of the system shown in Figure 8–72 for the two cases where $K = 10$ and $K = 100$.



$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+5)}$$

برای محاسبه حاشیه بهره و فاز تابع تبدیل
حلقه باز باید در نظر گرفته شود

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\,\sqrt{\omega^2+25}}$$

$$\angle G(j\omega) = -90 - tg^{-1}\omega - tg^{-1}\frac{\omega}{5}$$

محاسبه حاشیه فاز

$K = 10$

۱- محاسبه فرکانس قطع بهره

$$|G(j\omega)| = 1 \Rightarrow \frac{10}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\,\sqrt{\omega^2+25}} = 1$$

$$\Rightarrow \omega\sqrt{\omega^2+1}\,\sqrt{\omega^2+25} = 10 \longrightarrow \omega^2(\omega^2+1)(\omega^2+25) = 100$$

حل با ماشین حساب و محاسبه ω

حل به روش سعی و خطا

$$\omega = 1 \longrightarrow 1(2)(26) = 52$$

$$\omega = 2 \longrightarrow 4(5)(29) = 580$$

$$\omega = 1.25 \longrightarrow 106$$

$$\omega = 1.23 \longrightarrow 100.7$$

$\Rightarrow \omega_1 = 1.23$ فرکانس قطع بهره

$$\varphi = \angle G(j\omega_1) = -90 - tg^{-1}\omega - tg^{-1}\frac{\omega}{5}$$ ‏۲-

$$= -90 - tg^{-1}1.23 - tg^{-1}\frac{1.23}{5} = -90 - 50.8 - 13.8 = -154.7$$

$$\gamma = 180 + \varphi = 180 - 154.7 = 25.3 > 0$$ ‏۳-

و سیستم پایدار است.

محاسبه حاشیه بهره:

۱- تعیین فرکانس تغییر فاز

$$\angle G(j\omega) = -180$$

$$\angle G(j\omega) = -90 - tg^{-1}\omega - tg^{-1}\frac{\omega}{5} = -180$$

سعی و خطا $\quad \omega = 1 \longrightarrow -90-45-11 = -146$

$\vdots$

$\omega = 2.2 \longrightarrow \angle G(j\omega) \simeq -180 \longrightarrow \boxed{\omega_2 = 2.2}$

۲-

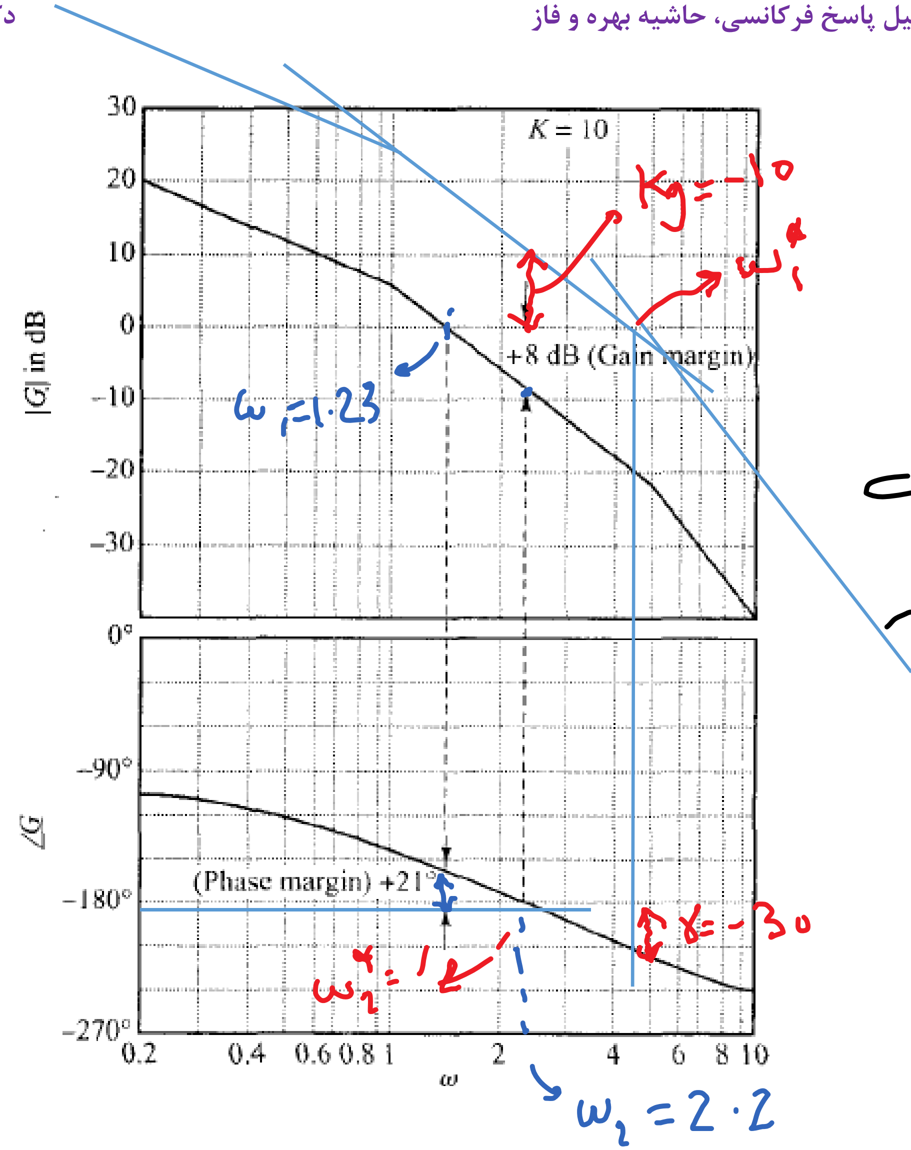
$$|G(j\omega_2)| = \left.\frac{10}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+25}}\right|_{\omega=2.2} = 0.344$$

۳- محاسبه K_g

$$K_g = -20\log|G(j\omega_2)| = -20\log 0.344 = +9.2\,dB > 0$$

حاشیه بهره و حاشیه فاز هر دو هم علامت هستند.

$$\text{for } K=100 \xrightarrow{\text{تمرین}} \begin{cases} \gamma = -30 \\ K_g = -12\,dB \end{cases}$$



$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+5)}$$

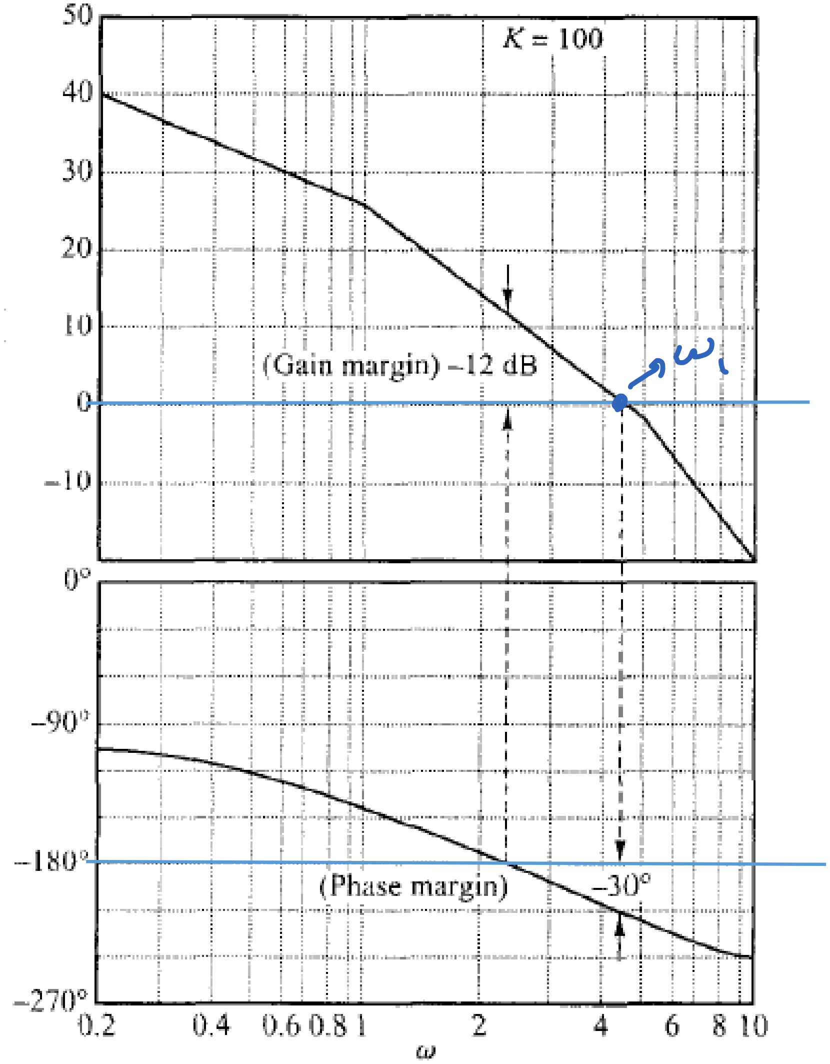
$\rightarrow k = 100$

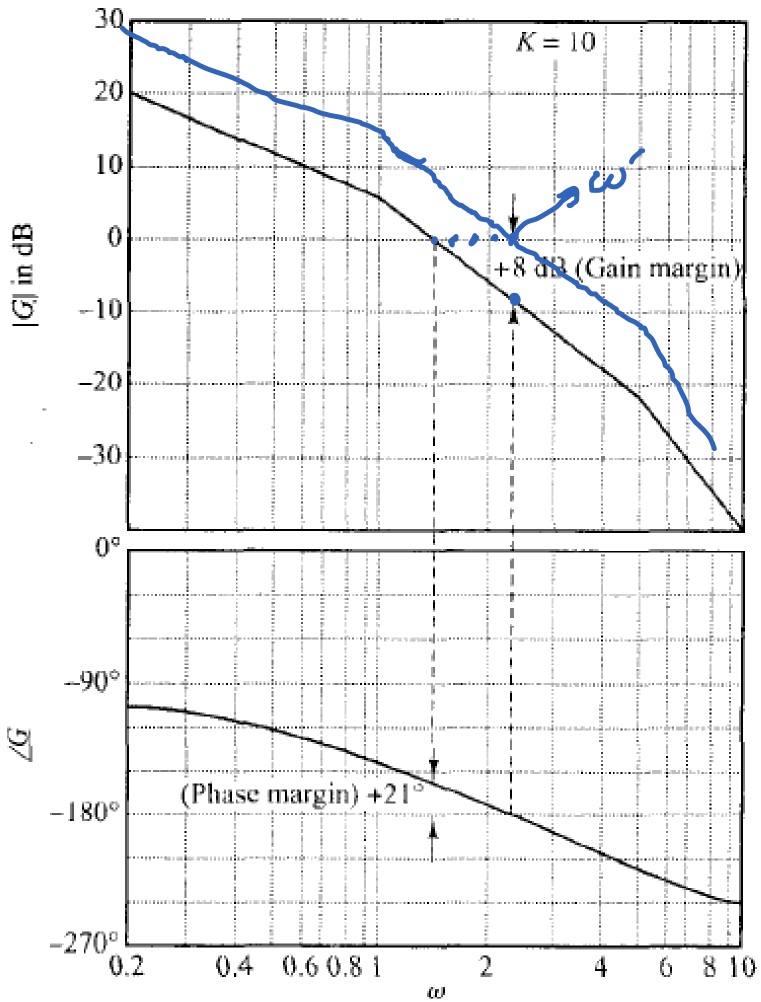
مقدار قبلی با اندازه 20log10 به سمت بالا شیفت خواهد داشت

$$G_1 = 10\,G$$

$$20\log G_1 = 20\log 10 + 20\log G$$

$$= 20 + 20\log G$$


50
40
30
20
10
0
−10
K = 100
(Gain margin) −12 dB
ω_1
0°
−90°
−180°
−270°
(Phase margin)
−30°
0.2
0.4
0.6
0.8
1
2
4
6
8
10
ω



نمودار دامنه $G(s)$ را اگر به اندازه $8dB$ به سمت بالا ببریم،
حاشیه بهره صفر می‌شود
و با افزایش حاشیه فاز منفی می‌شود
در این حالت حاشیه فاز منفی می‌شود.
منظور از حاشیه فاز، مقداری که می‌توان
نمودار دامنه را به سمت بالا شیفت داد تا سیستم هنوز
ناپایدار نشود.

$$20\log a = 9 \to a = 10^{9/20}$$

$$\to a = 3.3$$

$$G' = \frac{10 \times a}{s(s+1)(s+5)}$$

$$9 \longrightarrow a = 3.3$$

$$20 \log G' = 20 \log G + 20 \log a$$

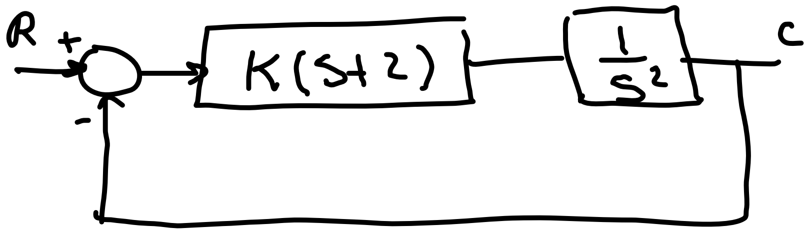
$$G = \frac{K}{\;}$$

تا $K=33$ سیستم پایدار است.

اگر $K>33$ سیستم ناپایدار می شود

مثال: برای سیستم زیر مقدار K را به نحوی تعیین کنید که حاشیه فاز 50° شود.

در این حالت حاشیه بهره چقدر است.



$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2}$$

محاسبه حاشیه فاز:

$$\angle G(j\omega) = tg^{-1}\omega/2 - 90 - 90$$

۱- تعیین فرکانس عبور بهره

$$|G(j\omega)| = 1 \Rightarrow \frac{K\sqrt{\omega_2^2+4}}{\omega_2^2} = 1 \longrightarrow \omega_2 =$$

$$\varphi = \angle G(j\omega_2) \longrightarrow \gamma = \angle G(j\omega_2) + 180 = 50$$

$$\Rightarrow \angle G(j\omega_2) = 50 - 180 = -130 \Rightarrow tg^{-1}\frac{\omega_2}{2} - 90 - 90 = -130$$

$$\Rightarrow tg^{-1}\omega_2/2 = 50 \longrightarrow \omega_2 = 2.38$$

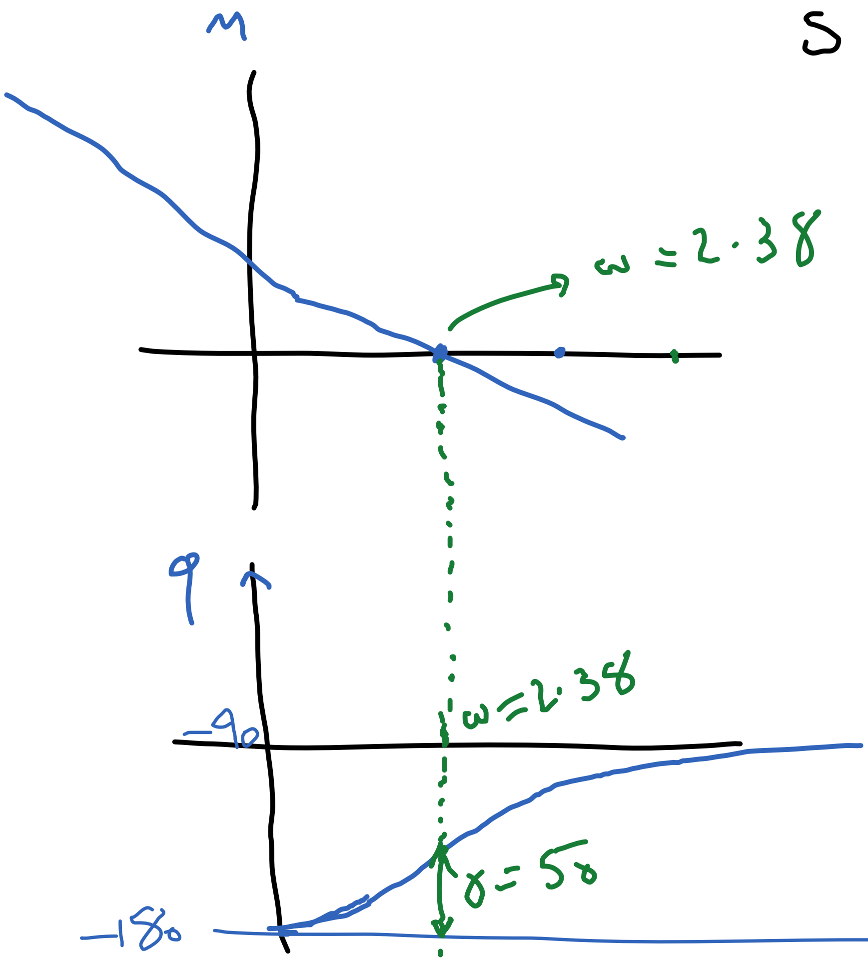
$$\frac{K\sqrt{\omega_2^2+4}}{\omega_2^2}=1 \Rightarrow K=\frac{\omega_2^2}{\sqrt{\omega_2^2+4}}=\frac{2.38^2}{\sqrt{2.38^2+4}}=1.82$$

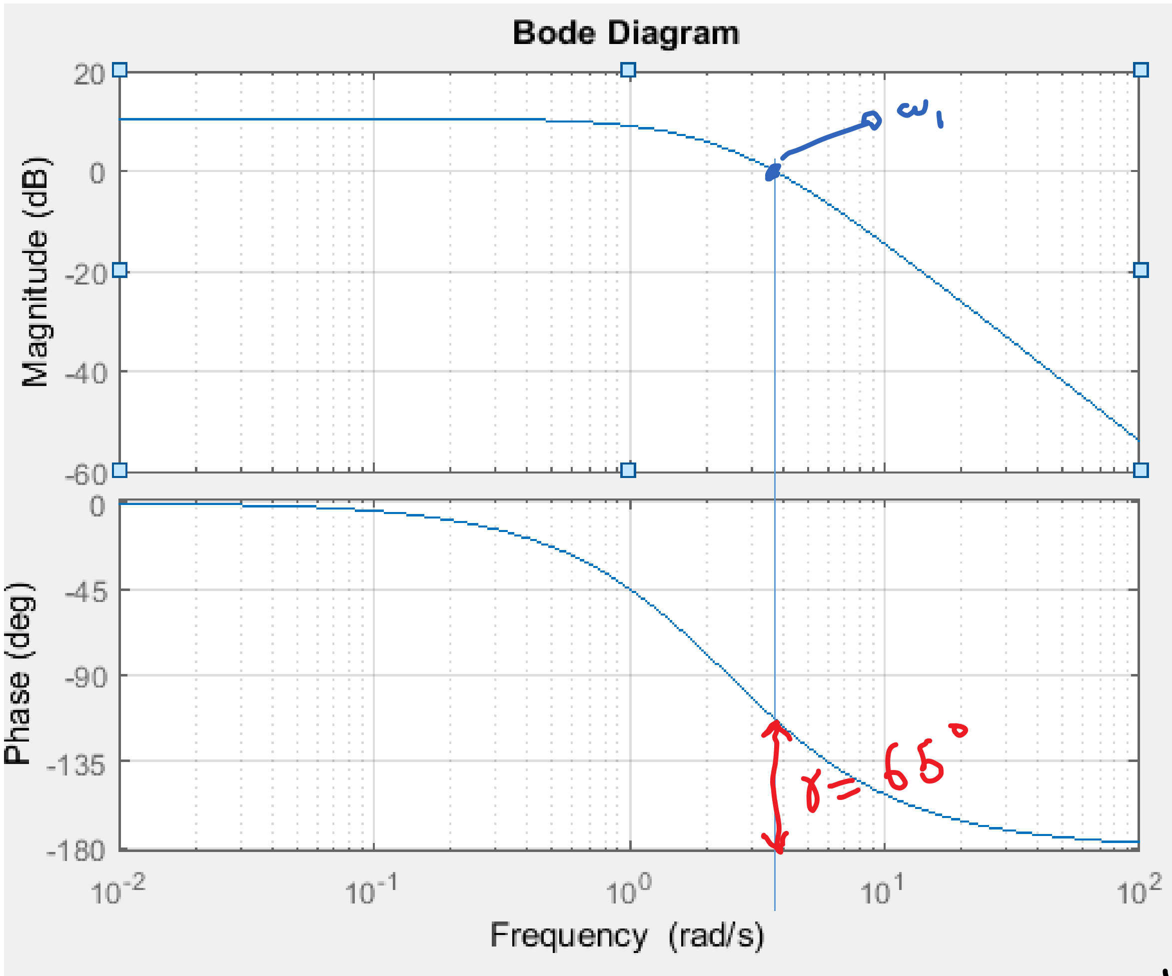
ب - محاسبه حاشیه بهره:

$$\angle G(j\omega)=tg\,\omega/2-180=-180 \rightarrow \omega_1=0$$? فرکانس عبور فاز

$$|G(j\omega_1)|=\left.\frac{1.82\sqrt{\omega^2+4}}{\omega^2}\right|_{\omega=0}=\infty$$

$$G(s) = \frac{k(s+2)}{s^2}$$





ω_1 فرکانس عبور بهره: 3.6

$\gamma = 65 > 0$

$K_g = 50\,dB$ غلط

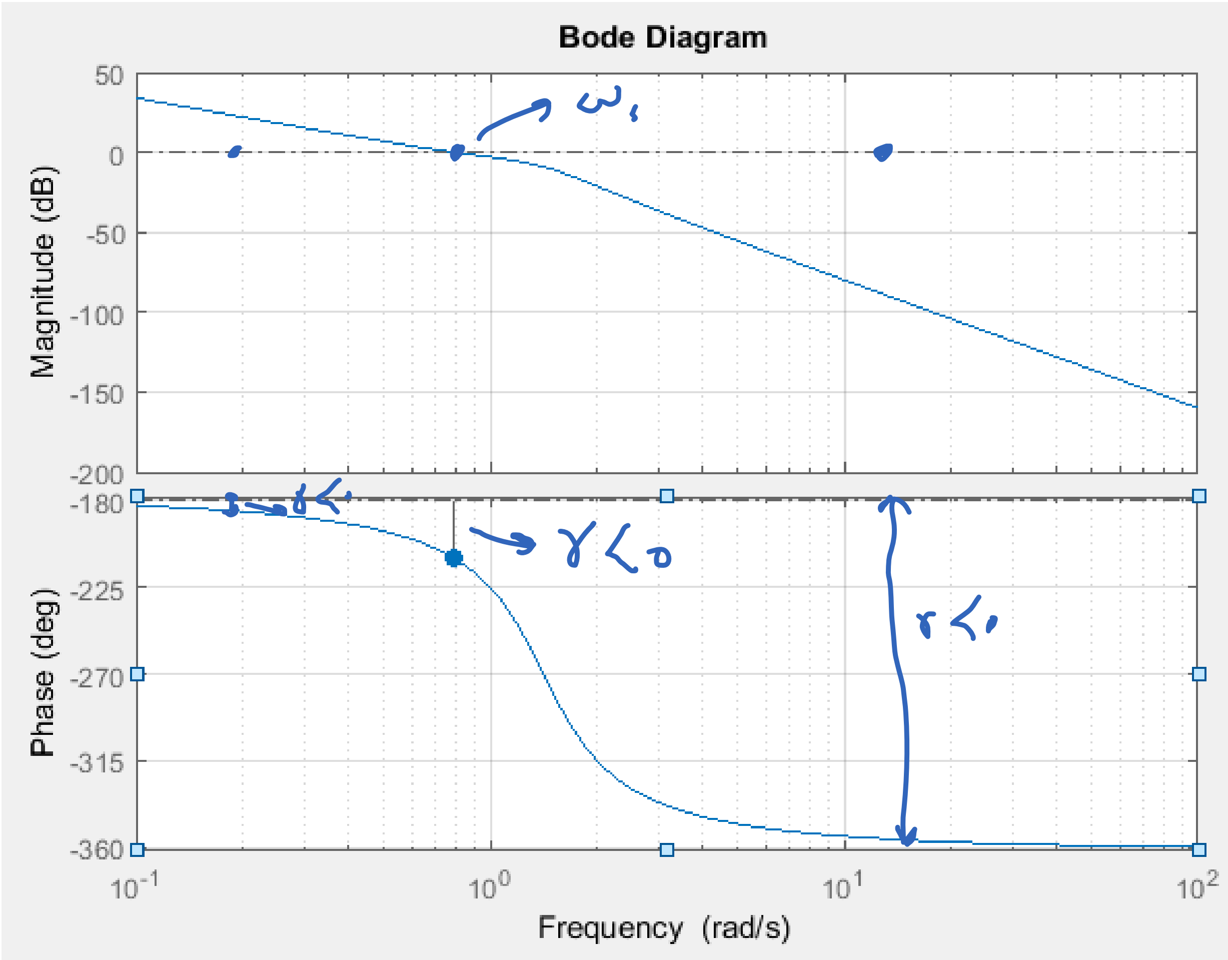
$K_g = +\infty$

وقتی نمودار فاز بر خط -180 مماس است یا آن را قطع نمی‌کند، K_g به $+\infty$ یا ∞ خواهد

اگر $\gamma > 0 \longrightarrow K_g = +\infty$

$\gamma < 0 \longrightarrow K_g = -\infty$

فرضی نمودار فاز به خط -180
مماس است یا آن را قطع
نمی‌کند، K_g ، $+\infty$ یا $-\infty$ خواهد



$\gamma = -۲۰$

$K_g = -\infty$